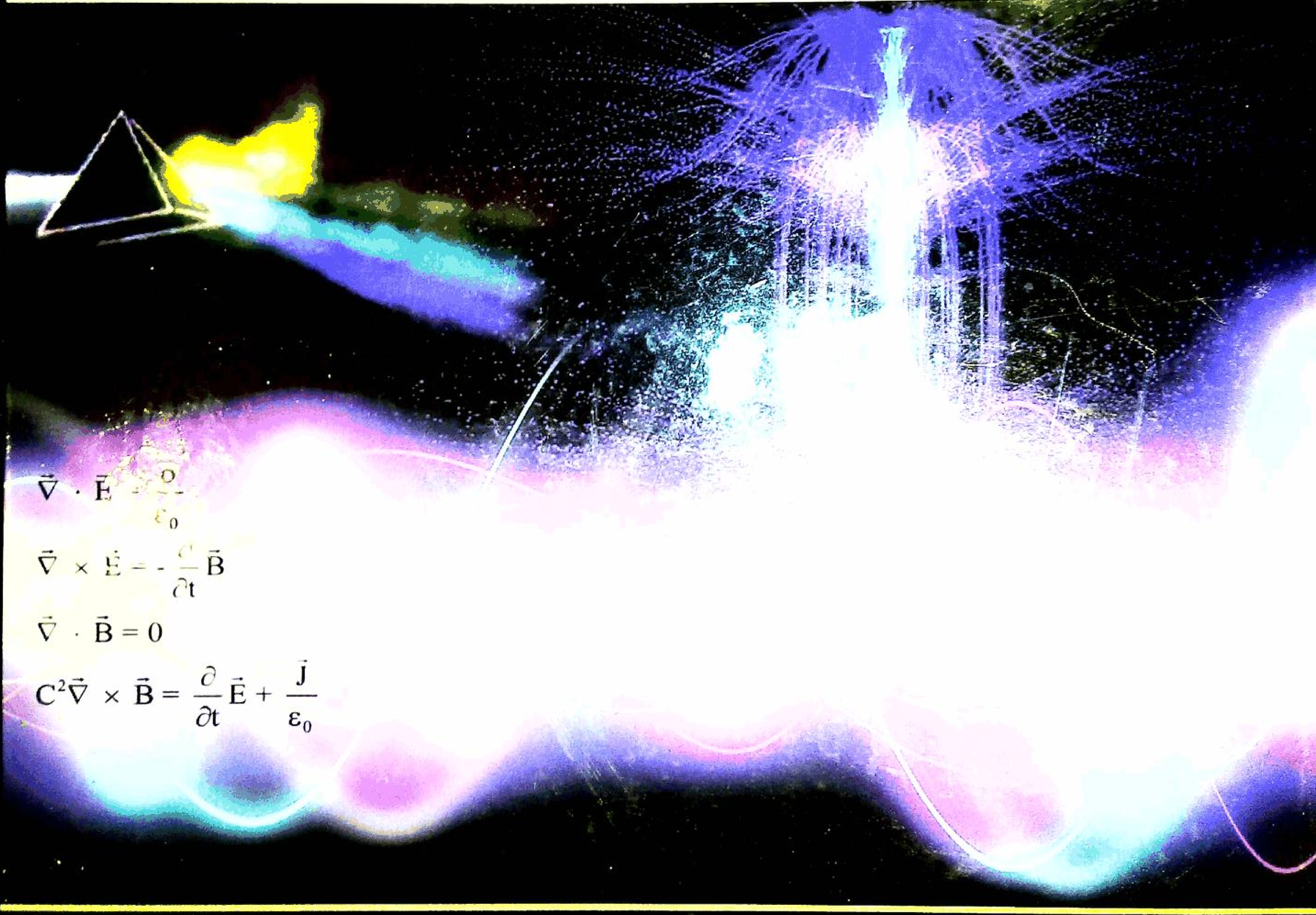
محمد البغدادي

أسس الفيزياء المعاصرة



المجلد الثالث

الكهرطيسية والضوء

محمد البغـدادي

أسس الفيزياء المعاصرة

المجلد الثالث

الكهرطيسية والضوء

أسس الفيزياء المعاصرة

المجلد الثالث: الكهرطيسية والضوء

المؤلف: محمد البغدادي

الطبعة: الأولى 2015

الناشر: طوب بريس للطباعة والنشر والتوزيع

رقم الإيداع القانوني: 2016MO0157

ردمك: 978-9954-594-47-6

الطبع: طوب بريس - الرباط

هذه لغتي، ومعجزتي عصا سحري
حدائق بابلي ومسلتي، وهويتي الأولى
معدني الصقيل

محمود درويش

"لم يبد علماؤنا رغبة قوية لحماية اللغة الألمانية، بعضهم لأنهم يظنون فعلاً أنه لا يمكن لباس الحكمة إلا بلباس لاتيني أو يوناني، والبعض الآخر لأنهم يخشون أن يكتشف العالم جهلهم الذي يخبئونه الآن خلف قناع من الكلمات الكبيرة... لقد تركت الأمة بعيدة عن المعرفة".

لايبنيز (1646–1716)
مؤسس حساب التفاضل

مقدمة الكتاب

يعترض تعليم العلوم باللغة العربية مشاكل عديدة، لعل أهمها افتقار اللغة العربية إلى مراجع يستطيع الطالب استشارتها عندما يجد صعوبة ما في فهم ما بين يديه من أمال أو كتب تغطي أحد المقررات أو عندما يريد تجاوز هذه الأمالي والكتب والحصول على بعض الأجوبة للأسئلة العديدة التي يطرحها على نفسه والتي لا يمكن إلا للمرجع أن يضعها بين يديه أو عندما يرغب في التوسع في المعرفة. والمشكلة الهامة الثانية هي عدم وجود مقابل واحد متفق عليه للمصطلح العلمي الأجنبي بين مختلف البلدان العربية أو بين الجامعيين في قطر واحد أو المنتمين إلى أقسام علمية متقاربة كالفيزياء والرياضيات بل وبين العاملين في القسم الواحد.

ونحن نود في هذا الكتاب إعطاء صورة واضحة عميقة وشاملة للأسس التي تقوم عليها الفيزياء وتغطية المواضيع التي نعتقد أن على الفيزيائي استيعابها في المراحل الجامعية الأولى – لنقل سنوات الدراسة الأربعة أو الخمسة الأولى– سواء توقف عن الدراسة بعدها أو تابعها. فقد حاولنا للوصول إلى هذه الغاية أخذ أمرين بعين الاعتبار، أولهما ضرورة الانطلاق من المفاهيم والمبادئ كما يعيها الفيزيائيون المعاصرون ومن الأهداف التي يضعها مختلف الباحثين نصب أعينهم، لما يوفر ذلك من وضوح في الرؤية واختصار للوقت ومن فعالية لا يمكن للعرض التاريخي أن يوفرها بأي حال من الأحوال. وثانيهما ملاءمة هذه الضرورة مع المقتضيات التربوية في التسلسل من الأسهل إلى الأصعب وبالتالي مراعاة تسلسل البرامج المتبع في أغلب الجامعات إلى أبعد حد ممكن.

وهكذا فإن الفرضية الذرية مثلاً هي من أهم المفاهيم الأساسية في فيزياء اليوم : إن بنية المادة هي بنية غير متصلة ولا نتصور هذه المادة إلا على شكل حبيبات سواء كانت هذه الحبيبات ذرات أو جزيئات أو نويات؛ أو جسيمات تتكون منها هذه الأنواع الثلاثة نسميها جسيمات أولية. ولهذا فقد انطلقنا من هذا المفهوم لشرح مختلف الظواهر الفيزيائية بما فيها الظواهر الجهرية. ثم إن مفهوم المادة، كيانها، مرتبط بمفهوم المكان والزمان. ولهذا فقد تعرضنا بالتفصيل وبالترتيب إلى مفهوم الفضاء –المكان– الخاوي بمعزل عن مفهوم المادة وعن مفهوم الزمان وبنينا الميكانيك النيوتوني التقليدي وانتقلنا بعد ذلك إلى مفهوم للمكان متحد مع مفهوم الزمان وبنينا نظرية النسبية الخاصة التي ارتبط اسمها باسم آنشتاين وأخيراً إلى هذه المفاهيم مرتبطة ببعضها كلها معاً لإعطاء فكرة عن نظرية النسبية العامة التي وضعها آنشتاين.

وقد بيّنا في دراسة مختلف فروع الفيزياء أهمية المبادئ التي يبتكرها الفكر الفيزيائي الخلاق لفهم وتفسير الظواهر الطبيعية والتنبؤ بحدوث ظواهر فيزيائية جديدة وتوحيد ظواهر، متباينة للوهلة الأولى، كالكهربائية والمغنطيسية والضوء مثلاً في نظرية واحدة تعبر عنها أربع معادلات رياضية هي مبادئ الكهرطيسية التي وضعها ماكسويل في القرن التاسع عشر. وأوضحنا أن قبول المبادئ وبقاءها لا ينجم عن بساطتها أو جمال عبارتها الرياضية مهما كان لهاتين الصفتين من أثر وإنما لتطابق النتائج المترتبة عليها مع الواقع التجريبي.

فالفيزياء علم تجريبي قبل كل شيء والتجربة وحدها هي التي تقرر الحقيقة أي أن معرفة الواقع تبدأ بالتجربة وتنتهي بها. وهكذا ولما كانت المبادئ هي نتاج الفكر والخيال الإنساني، تستوحي التجربة أحياناً ولكنها لا تستخلص منها، فهي لا تتصف بالأزلية ولا تصلح في كل الأحوال. إن المغامرة الفيزيائية تسعى إلى الوصول إلى المبادئ الأكثر شمولية المفسرة لأكبر عدد ممكن من الحادثات والموحدة لمختلف فروع الفيزياء.

وقد آلينا جهداً إعطاء صورة متسعة، متكاملة منطقياً، للنظريات التي عالجناها وتجنبنا وسعنا العروض الوصفية العقيمة التي تعيق التعليم العالي والتي لا تليق به في نظرنا وحاولنا الإحاطة بدقة بمختلف جوانب المواضيع المطروقة. وقد سمح لنا تجنب التكرار الناتج عن الانتقال من العرض الوصفي إلى العرض الرياضي استنفاد الموضوع وتكريس حيز أكبر للغة الوحيدة التي يمكن أن تصف الطبيعة وتصقُلها ونعني بذلك الرياضيات.

إننا على وعي تام بما يترتب على عرض الفيزياء على هذا الشكل : مبادئ مصاغة بقالب رياضي يزداد تعقيداً ويبتعد عن الحدس مع تطور الفيزياء وتعمقها في بنية المادة وبنية المكان والزمان، وقوانين –نظريات ودعاوى وقضايا رياضية – تنتج عنها منطقياً مما يحول الفيزياء إلى رياضيات من حيث كونها تقوم على دراسة بنى معينة – معرفة بإعطاء علاقات تركيب بين عناصر مجموعة ما – فهي فيزياء البنى بقدر كون الرياضيات المعاصرة رياضيات البنى. ولكن لم لا؟ ألا تهدف الفيزياء فيما تهدف إليه إلى الوحدة مع الهندسة وما هي الهندسة؟ يقول آنشتاين "تبقى الهندسة علماً رياضياً مادام استنتاج النظريات من المصادرة (الموضوعة) مسألة منطقية صرفة ولكنها في الوقت نفسه علم فيزيائي بقدر ما تحوى مصادراتها على مقولات تخص الأشياء الطبيعية ولا يمكن التحقق منها إلا بالتجربة. وهكذا فإن المحاذير المترتبة على العرض الموضوعاتي (المصادراتي) Axiomatic للفيزياء تزول إذا منحت الأشغال المخبرية والتطبيقية أهمية خاصة، إضافة إلى دورها المألوف في تعلم العلوم الطبيعية والتعامل معها. فالتجربة وحدها هي التي ترفع عن الفيزياء الموضوعاتية كل طابع مسلماتي ودوغماتي. كما أن الإشارة إلى تطور الأفكار في الفيزياء من آن إلى آخر وإعطاء الخطوط العريضة للطريق المتعرج والمتقلب الذي اتبعته تسهم – بغض النظر عن أهميتها التاريخية – في إلقاء الأضواء على المحتوى الحديث للمبادئ وفي تجنب الأخطار الناجمة عن الطريقة التي اتبعناها.

لقد قسمنا هذا الكتاب إلى مجلدات خمسة :

- I– الميكانيك التقليدي النيوتوني والنسبوي
- II– الميكانيك الإحصائي والترموديناميك
- III– الكهرطيسية والضوء
- IV– ميكانيك الكم
- V– الفيزياء الإحصائية

ويتضمن محتوى هذه المجلدات المواد كما درسناها خلال سنوات عديدة تتجاوز العقدين في جامعتي الرباط ودمشق وغيرهما في المرحلتين الجامعيتين الأوليين وقسماً طفيفاً مما درسناه في المرحلة بعد

الجامعية. ونحن وإن لم نعتمد مصدراً معيناً فإننا لا ندعي الإبداع أو التجديد اللهم إلا فيما يتعلق بالأخذ بيد القارئ المبتدئ والوصول به إلى عمق المفاهيم والقوانين الفيزيائية المعروفة في مختلف الفروع من وجهة نظر تؤمن بوحدة الفيزياء وبوحدة طريقة دراستها.

ولقد طمحنا إلى إصدار هذا الكتاب إن أمكن بلغتين : العربية والفرنسية أو العربية والإنكليزية حتى يعتاد القارئ العربي ذو الثقافة المزدوجة التعامل العلمي مع لغته العربية ولغة التدريس الأجنبية في بلده في آن واحد. وأخيراً فإن المراجع التي عدنا إليها غالباً هي :

1- سلسلة الفيزياء النظرية للانداو وليفشيتز بأجزائها التسعة المترجمة عن الروسية إلى الفرنسية والإنكليزية والألمانية.

2- دروس الفيزياء النظرية لسومرفلد بأجزائها الستة وهي مترجمة عن الألمانية إلى الإنكليزية ويتجاوز محتوى هاتين السلسلتين محتوى كتابنا بكثير.

3- محاضرات فاينمان في الفيزياء بثلاثة أجزاء وهي مترجمة عن الإنكليزية إلى الفرنسية والعربية.

4- دروس الفيزياء لجامعة بيركلي بخمسة أجزاء وهي أيضاً مترجمة إلى الفرنسية.

يغطي المرجعان الأخيران برامج السنتين الأولى والثانية في جامعات الولايات المتحدة ولكنهما يبقيان، وخاصة الأول منهما – محاضرات فاينمان – أفضل ما يمكن أن ينصح الفيزيائي مدرساً وطالباً بقراءته.

لقد قسمنا كل مجلد إلى فصول يتألف كل منها من فقرات مرقمة بعدد بدءاً من الواحد ومن أرقام – تحت فقرات – مرقمة بعددين أولهما يدل على الفقرة وثانيهما إلى تحت الفقرة أما العلاقات فيشار إليها، في الفصل، برقمين أولهما (من اليسار) رقم الفقرة وثانيهما رقم العلاقة في الفقرة المذكورة وبثلاثة أرقام عندما لا تقع العلاقة في الفصل المذكور وهكذا فإن (4.2.5) تعنى العلاقة رقم 5 في الفقرة الثانية من الفصل الرابع. ونشير إلى العلاقة بأربعة أرقام أولها روماني I، II، III، IV، V، عندما لا تقع العلاقة في المجلد المذكور.

****

أود أولا وقبل كل شيء أن أوجه شكري وامتناني للسيد عبد الإله بن كيران فلولا مبادرته لما تم نشر هذا الكتاب بالمغرب.

كما أود أن أعبر عن شكري للسيدة بشرى حسني – وكانت قد عملت معي في مختبر الفيزياء النظرية – للمجهود الذي بذلته لفك رموز كتابتي في هذا الكتاب وفي مؤلفات أخرى، ولعلو باعها في التنقل بين اللغة العربية واللغات الأوربية التي كتبت بها؛ لا أعرف غيرها قادرا على القيام بهذا العمل بنفس الهدوء والصبر الذي تتمتع بهما.

وأود أخيرا التعبير عن خالص الشكر لمؤسسة طوب بريس لقبولها نشر هذا الكتاب ولعنايتها بإخراجه على الشكل الذي هو عليه.

مقدمة

جمعت الكهرطيسية ظواهر متعددة ومتباينة في إطار واحد هي الظواهر الكهربائية والمغنطيسية والضوئية، فوضعت بذلك أسس الثورة الصناعية الثانية : المحركات والمولدات الكهربائية، المنويات، الإنارة، الاتصالات السلكية واللاسلكية وغيرها. لقد اتضحت الصلة تجريبياً ونظرياً بين هذه الظواهر تدريجياً من خلال أعمال آمبير، فارادي، أورستد وآخرين عديدين في النصف الأول من القرن التاسع عشر. ثم توجت أعمال ماكسويل في مطلع الثلث الأخير من هذا القرن ما وصل إليه من سبقوه، فقد صاغ أربع معادلات تفسر كل أشكال التفاعلات الكهربائية والمغنطيسية وتبين كيفية انتشارها في الفضاء على شكل موجات سرعتها سرعة الضوء وتتنبأ بظواهر أخرى لم تكن معروفة آنذاك - الموجات الهرتزية على سبيل المثال. فهي إذاً المبادئ التي بنيت الكهرطيسية عليها كما بني الميكانيك التقليدي على مبادئ نيوتن.

هذا من جهة، ومن جهة أخرى فإن نجاح الكهرطيسية في توحيد نوعين من القوى، القوى الكهربائية والقوى المغنطيسية وضم الظواهر الضوئية إليها فاتحاً بذلك الباب أمام نشوء نظرية النسبية جعل منها مثالاً يحتذي به الفيزيائيون النظريون لتوحيد قوى التفاعل الأساسية الأخرى في الطبيعة في إطار نظري واحد. إنها، مرتبة حسب شدة التفاعل من الأصغر إلى الأعظم، قوى التثاقل، التفاعل النووي الضعيف، الكهرطيسي والنووي الشديد. لقد وُحدت التفاعلات الثلاثة الأخيرة ولكن توحيدها مع التثاقل - مع نظرية النسبية العامة لآنشتاين - مازال عصياً إلى اليوم.

إن عرض الكهرطيسية انطلاقاً من مبادئها الأربعة - من معادلات ماكسويل - لا يخلو من محاذير. فهي لا تقوم على الحدس كما هو عليه الحال في الميكانيك التقليدي، حيث نستطيع بسهولة تبرير مبادئ نيوتن وتناسب تسارع الجسم مع القوة المطبقة عليه. ولا تعبر عنها معادلة تفاضلية عادية وإنما معادلات تفاضلية جزئية بأربعة متغيرات هي الوضع في المكان والزمان. ومع ذلك فقد اخترنا في هذا المجلد، كغيره من المجلدات الأربعة الأخرى في هذا الكتاب، العرض الموضوعاتي - المنطلق من المبادئ - متخذين الاحتياطات الكفيلة بجعله منذ البداية مقبولاً ومفهوماً.

وهكذا فقد افتتحنا الفصل الأول بإعطاء الشكل التكاملي لمعادلات ماكسويل المعتمد على مفهومي التدفق والدوران لتحديد الصلة بين تغيرات الحقلين، الكهربائي والمغنطيسي، الزمانية والمكانية وعلاقة هذه التغيرات بسرعة الضوء. وذلك قبل إعطاء شكلها التفاضلي الذي يحتاج إلى تمهيد رياضي : جبر المؤثرات التفاضلية ومبرهنة ستوكس بصيغتها العامة. تبقى أولى هذه المعادلات - قانون غاوص - دون تعديل في حالة استقلال الحقل الكهربائي عن الزمن إلا أن الصلة بين الحقلين الكهربائي والمغنطيسي تنفك في معادلة ماكسويل الثانية. إنهما معادلتا ماكسويل للكهربائية الراكدة المكافئتان لقانون كولون

التجريبي. لا يختلف عندئذ عرضنا للكهربائية الراكدة عما تفعله أغلب الكتب إلا في إلحاحنا على مفهوم كثافة الطاقة في الفضاء وعلى التناقض بين مفهوم الشحنة النقطية والطاقة اللامنتهية في الكبر لهذه الشحنة.

تبقى معادلة ماكسويل الثالثة دون تغيير في حالة استقلال الحقل المغنطيسي عن الزمن وتنفك هنا أيضاً الصلة بين الحقلين الكهربائي والمغنطيسي في معادلة ماكسويل الرابعة؛ ولا يبقى إلا الصلة بين الحقل المغنطيسي وكثافة التيار الكهربائي الثابتة – التيار المستمر. إنهما معادلتا ماكسويل في المغنطيسية المستقرة (ثبات الظواهر زمنياً) التي أقمنا الفصل الثاني عليها. تعرف معادلة ماكسويل الرابعة في هذه الحالة الخاصة باسم قانون آمبير نظراً لسبق آمبير في صياغتها وهي تقابل قانون غاوص في الكهربائية الراكدة. بينا في هذا الفصل أن اشتقاق الحقل المغنطيسي من كمون متجهي ليس مجرد أداة رياضية وإنما لهذا الكمون وجود فيزيائي يمكن قياسه كما تقاس شدة الحقول الأخرى.

تأخذ معادلات ماكسويل شكلها العام عندما يصبح الحقلان الكهربائي والمغنطيسي تابعين للزمن. يطلق على معادلة ماكسويل الثانية اسم معادلة ماكسويل–فارادي لسبق هذا الأخير ماكسويل في صياغتها، إلا أنه لا شريك لماكسويل في صياغة المعادلة الرابعة. يلعب الكمون السلمي والمتجهي دور متجهة رباعية الأبعاد في فضاء مينكوفسكي يقابلهما في معادلة الموجة المتجهة رباعية الأبعاد كثافة الشحنة وكثافة التيار، معادلة الموجة معادلة نسبوية. تنتشر الموجة بسرعة منتهية هي سرعة الضوء في الفضاء الخاوي مما يضع حداً لمفهوم التفاعل عن بعد – التفاعل الآني – الذي يقبل به الميكانيك التقليدي : لا تشعر شحنة التجربة بوجود الحقل الصادر عن الشحنات والتيارات المتحركة إلا بعد مرور فترة زمنية على صدوره؛ ولذا يلعب مفهوم الكمون المؤخر دوراً أساسياً في حساب التفاعل. يعالج الفصل الثالث كل هذه الأمور وما يترتب عليها، فهو بحق العمود الفقري للكهرطيسية. ناقشنا فيه منشأ الكتلة مبينين أن كتلة الشحنة (الإلكترون) الناتجة عن تفاعلها مع الحقل الكهرطيسي – الكتلة الكهرطيسية – لامنتهية في الكبر في حال الشحنة النقطية كما أنها لا تتطابق مع الكتلة الكلية مما يدل على عدم اتساق النظرية الكهرطيسية ويطرح التساؤل عما وراء الكهرطيسية للخروج من مفارقاتها.

لم نعر نظم الوحدات الاهتمام الذي تلقاه عادة في أمهات الكتب (سومرفلد على سبيل المثال) : ثلاث، أربع أو ست وحدات والانتقال بينها. بقينا بعيداً عن هذا الكابوس الذي كان يقض مضاجع الأساتذة والطلاب على حد سواء فاعتمدنا الوحدات الدولية في كل الكتاب تقريباً ولم نهتم بالوحدات السغثية إلا في نهاية هذا الفصل والفصل الذي يليه نظراً للدور الهام الذي لعبته المقادير المعبر عنها بهذه الوحدات في النقاش النظري مطلع القرن العشرين.

إن تفاعل الحقل الكهرطيسي الصادر عن الشحنات المتحركة مع شحنات (ذرات) بعيدة عنها هو موضوع الفصل الرابع – نظرية الإشعاع –؛ وهو فصل قصير لا يتسم بالسهولة إذ لابد من كتابة معادلات الحركة النسبوية والتقرب منها عندما تكون السرعة صغيرة أمام سرعة الضوء، سواء كانت سرعة الذرات المتأثرة

بالحقل أو تلك التي تنتجه. ونشر الكمون رباعي الأبعاد بدليل مسافة وسطية أو بدليل زمن قريب من الزمن المؤخر. اكتفينا بعرض بعض حالات هذا النشر الاضطرابي. ويمكن إهمال هذا الفصل في قراءة أولى.

لا تكتسي دراسة معادلات ماكسويل صعوبة تذكر عندما يتعلق الأمر بالخواص الكهربائية للعوازل – ظواهر الاستقطاب. إلا أنها تصبح صعبة عند دراسة الخواص المغنطيسية. إذ إن منشأ هذه الخواص في المغنطيسية المسايرة والحديدية كمومي بحت : عزم الذرات الزاوي الصميمي- السبين – والعزم المغنطيسي المتناسب معه وتفاعله مع الحقل المطبق وقد حاولنا في الفصل الخامس قدر المستطاع معالجة هذا الموضوع من وجهة نظر تقليدية، وجهرية في حال المغنطيسية الحديدية على أن نعود إليه من وجهة نظر كمومية في المجلد الخامس. ألقينا كذلك نظرة على الشروط على الحدود عند انتقال الموجة الكهرطيسية من وسط إلى آخر. درسنا قوانين الانعكاس والانكسار في حال العوازل وقوانين الانعكاس على سطح المعادن.

لا يمكن لكتاب في الكهرطيسية أن يكون شاملاً ما لم تدرس فيه ظواهر توضيع الموجات. ركزنا انتباهنا في الفصل السادس على ظواهر التداخل والانعراج من أجل أطوال الموجة المؤثرة على شبكة العين – الأمواج الضوئية. ثم بينا الطبيعة المزدوجة للضوء، الطبيعة الموجية من أجل الأبعاد القريبة من طول الموجة، والطبيعة الجسيمية التقليدية من أجل الأبعاد الكبيرة بالنسبة لطول الموجة – المتناهي إلى الصفر –، التي يعبر عنها الضوء الهندسي ومبدأ فيرما : فالضوء، أو الفوتون بالأحرى، موجة وجسيم في آن واحد. بينا شروط الانتقال بين هاتين الطبيعتين المتممتين الواحدة منهما للأخرى. وهو انتقال يعيننا في المجلد القادم على تحديد شروط الانتقال من الميكانيك التقليدي الجيسمي إلى الميكانيك الكمومي الموجي. درسنا في الفصل السابع والأخير الحوادث شبه المستقرة المتميزة بأطوال موجة كبيرة أي التيارات المتناوبة، انتشارها في الدارات وتكوين المرشحات، انتشارها في التجويف وفي موجهات الموجة دون الدخول في تفاصيل تقنية تطيل الكتاب وتبعده عن الأهداف التي حددت له.

فهرس

مقدمة الكتاب III

مقدمة VII

الفصل الأول: الكهربائية الراكدة 1

1. مبادئ الكهرطيسية 1

1.1- الشحنة الكهربائية 1

2.1- الحقل الكهرطيسي 2

3.1- مبادئ الكهرطيسية 4

4.1- المؤثرات التفاضلية 9

5.1- معادلات ماكسويل 13

2. الكهربائية الراكدة 15

1.2- الكمون الكهربائي 15

2.2- تدفق الحقل الكهربائي 18

3.2- السطوح متساوية الكمون equipotential 20

4.2- التوازن الكهربائي الراكد 23

3. حساب الحقل الكهربائي 25

1.3- حالة التناظر 25

2.3- حقل الموصلات (النواقل) 29

3.3- ثنائي القطب الكهربائي 33

4.3- التوازن الكهربائي الراكد للموصلات 37

5.3- مبرهنة غرين وحل مسألة الكمون 45

4. المكثفات 47
1.4- السعات وأمثال التأثير 47
2.4- سعة المكثفة (Capacitor) Condenser, Condendsor 50
3.4- ربط المكثفات 54
5. الطاقة الكهربائية الراكدة 55
1.5- طاقة مجموعة من الشحنات 55
2.5- كثافة الطاقة الكهربائية الراكدة 58
3.5- طاقة المكثفات 60
ملحق 1: مبرهنة ستوكس 64
ملحق 2: خواص "الدالة" δ 68
الفصل الثاني: المغنطيسية الراكدة والظواهر المستقرة 73
1. التيار الكهربائي 73
1.1- معادلة الاتصالية 73
2.1- التيار الكهربائي وقانون لابلاس 74
3.1- قانون أوم وقانون جول 76
4.1- قوة لورانتس في حقل مغنطيسي ثابت ومتجانس 78
5.1- حركة الشحنة في حقلين، كهربائي، مغنطيسي، ثابتين ومتجانسين 80
2. المغنطيسية الراكدة 82
1.2- قانون آمبير 82
2.2- حساب الحقل المغنطيسي الراكد 84
3.2- تحول الحقل المغنطيسي إلى حقل كهربائي 87
4.2- الكمون المتجهي 89

3. حساب الحقول المغنطيسية من الكمون المتجهي 92
1.3- الحقل الناتج عن سلك 92
2.3- الكمون والحقل الناتج عن ملف طويل (سولينوئيد) 94
3.3- الكمون والحقل الناتج عن دارة صغيرة، العزم المغنطيسي 95
4.3- قانون بيو وسافار Biot-Savart 99
5.3- قياس حقل الكمون المتجهي 102
4. الطاقة المغنطيسية الراكدة 104
1.4- عمل القوى المغنطيسية 104
2.4- عمل القوى المغنطيسية في ثنائي قطب مغنطيسي 106
3.4- الطاقة الكلية 107
4.4- طاقة التيارات المستمرة 109
5. مصادر التيار المستمر 110
1.5- القوة المحركة الكهربائية (emf) Electromotive force 110
2.5- مولدات التيار المستمر، الخلايا الفولتائية 113
الفصل الثالث: الظواهر الكهربائية والمغنطيسية التابعة للزمن- الأمواج الكهرطيسية 119
1. ظواهر التحريض 119
1.1- قانون فارادي Faraday 119
2.1- المولد والمحرك الكهربائيان 120
3.1- قاعدة لنز Lenz 124
4.1- مسرع الإلكترونات Betatron 126
2. التحريض والطاقة المغنطيسية 127
1.2- معامل التحريض المتبادل 127
2.2- معامل التحريض الذاتي Self inductance 129
3.2- الطاقة المغنطيسية 131

6.1- الحساب التقريبي للاغرانجي 196
2. إشعاع الشحنات المتحركة عن بعد 199
1.2- إشعاع الشحنات على مسافات كبيرة 199
2.2- إشعاع ثنائي القطب 201
3.2- العزم رباعي الأقطاب 206
4.2- الإشعاع رباعي الأقطاب (الكهربائي) وثنائي القطب (المغنطيسي) 208
3. حالات الإشعاع الأخرى 210
1.3- إشعاع شحنة سريعة الحركة 210
2.3- إشعاع شحنة ذات حركة منتظمة على محيط دائرة 213
3.3- إشعاع الكبح 215
الفصل الخامس: معادلات ماكسويل في داخل المادة 221
1. العوازل 221
1.1- الاستقطاب الإلكتروني 221
2.1- معادلات الكهربائية الراكدة 224
3.1- حساب القابلية الإلكترونية والقطبية في الغازات 226
4.1- الاستقطاب الإلكتروني في المائع 229
5.1- استقطاب الجسم الصلب 230
2. الاستقطاب المغنطيسي 235
1.2- العزم الزاوي والعزم المغنطيسي 235
2.2- المغنطيسية المسايرة Paramgnetism 237
3.2- المغنطيسية المعاكسة Diamagnetism 240
4.2- مبرهنة لارمور Larmor 242
5.2- المغنطيسية الحديدية 244
6.2- منشأ المغنطيسية الحديدية 249

7.2- مناطق فيس Weiss ومنحني البطاء Hysterisis 251

3. معادلات ماكسويل في المادة 256

1.3- معادلات ماكسويل داخل المادة العازلة 256

2.3- معامل الانكسار في العوازل 258

3.3- معامل الانكسار في المعادن 262

4. الانعكاس 267

1.4- الشروط على الحدود 267

2.4- قوانين الانعكاس والانكسار 270

3.4- الانعكاس التام عن سطح معدني 276

الفصل السادس: الضوء 279

1. التداخل 279

1.1- سرعة الزمرة وسرعة الطور 279

2.1- تجربة يونغ 282

3.1- التداخل في الصفائح الدقيقة 287

4.1- تداخل الموجات المستقرة 291

2. الانعراج 294

1.2- ظاهرة الانعراج 294

2.2- الشبكة أو المحززة Grating 295

3.2- انعراج الأمواج الكروية، الحل العام 302

4.2- انعراج فراونهوفر Fraunhofer 308

5.2- انعراج فرينل 313

6.2- الانعراج على حرف حاجز 317

7.2- قوة الفصل Resolving Power 319

3. الضوء الهندسي 324
1.3- مبدأ فيرما Fermat 324
2.3- تقوس الأشعة الضوئية 325
3.3- قوانين الضوء الهندسي 327
4.3- الانتقال من الضوء الموجي إلى الضوء الهندسي، معادلة الأيكونال 331
5.3- شدة الضوء في الضوء الهندسي 335
الفصل السابع: التيارات المتناوبة، الظواهر شبه المستقرة 337
1. دارات التيارات المتناوبة 337
1.1- الممانعة Impedance 337
2.1- قواعد كيرشوف 341
3.1- المرشحات Filters 346
2. الإرنان Resonance 351
1.2- تفريغ المكثفة، التيارات عالية التواتر 351
2.2- الإرنان 354
3.2- المكثفة في التواترات العالية 358
4.2- التجويف المرنان 364
5.2- مفعول القشرة Skin effect 365
3. قيادة الموجة 367
1.3- خطوط نقل الطاقة الكهرطيسية 367
2.3- مُوجّه الموجة Waveguide المستطيل 371
3.3- المقارنة مع الشبيكة البلورية 374

الفصل الأول

الكهربائية الراكدة

1- مبادئ الكهرطيسية............................ 1
2- الكهربائية الراكدة............................ 15
3- حساب الحقل الكهربائي............................ 25
4- المكثفات............................ 47
5- الطاقة الكهربائية الراكدة............................ 55

الفصل الأول: الكهربائية الراكدة

1. مبادئ الكهرطيسية

1.1- الشحنة الكهربائية

تتصف الجسيمات الأولية التي تتكون منها كل العناصر والأجسام بصفات عديدة تميزها عن بعضها بعضاً؛ إحدى هذه الصفات هي الشحنة الكهربائية التي تحدد التفاعل الكهرطيسي موضوع هذا المجلد كما تحدد الكتلة التفاعل التثاقلي الذي درسناه في المجلد الأول. والفيرميونات هي الجسيمات الأولية ذات الشحنة الكهربائية، وهي إما ليبتونات : الإلكترون والميون والتاو ذات الشحنة السالبة؛ إنها نفس الشحنة السالبة، شحنة الإلكترون التي نرمز لها بـ $-|e|$، وإما كواركات وقد تكون ذات شحنة موجبة كالكوارك u وشحنته تساوي $\frac{2}{3}|e|$، أو ذات شحنة سالبة كالكوارك d وشحنته تساوي $-\frac{1}{3}|e|$.. u و d كما نعلم هو رمز السبين النظائري، نحو الأعلى up أو الأسفل down. تتألف مكونات النواة، البروتون والنوترون من ثلاثة كواركات، uud للبروتون ذي الشحنة الموجبة $|e|$، و udd للنوترون ذي الشحنة 0- الحيادي كهربائياً. وهكذا فإن شحنة نواة الذرة هي $Z|e|$، حيث Z هو عدد البروتونات في النواة؛ وعدد النوترونات هو A - Z حيث A عدد الكتلة (الوزن الذري مقيساً بعدد مكونات النواة من بروتونات ونوترونات التي لها نفس الكتلة). إن شحنة نواة الهدروجين هي $|e|$ وشحنة نواة النظير 238 للأورانيوم هي $92|e|$ وعدد نوترونات هذا النظير هو 92 - 238 = 146. كما أن Z هو أيضاً عدد الإلكترونات المحيطة بالنواة لتكوين الذرة، فالذرة حيادية كهربائياً يتساوى فيها عدد الشحنات الموجبة – عدد البروتونات – مع عدد الشحنات السالبة – عدد الإلكترونات. ولكنها تصبح موجبة أو سالبة عندما تتأين أي عندما تفقد أو تكسب إلكتروناً أو أكثر. وهذا هو حال الجزيئات والأجسام الجهرية التي تتكون منها، فهي حيادية أومشحونة بشحنة موجبة أو سالبة تساوي عدداً صحيحاً من $|e|$. هذا يعني أن الشحنة مكممة لا تأخذ – انطلاقاً من المستوى النووي على الأقل – إلا قيماً منتهية هي أضعاف القيمة المطلقة للإلكترون : $\pm n|e|$ وبالتالي فإن مفهوم الشحنة النقطية التي تأخذ قيماً لامتناهية في الصغر غير فيزيائي في الوقت الحاضر وحتى إشعار آخر. تتجاذب الشحنات أو تتنابذ حسبما تكون من إشارتين مختلفتين أو من إشارة واحدة وتتناسب شدة التفاعل كما في حال التفاعل التثاقلي مع مقلوب مربع المسافة الفاصلة بين الشحنتين المتفاعلتين، وهي شدة أكبر بـ 10^{39} مرة من قوة التفاعل بين الكتل التي تفسر سقوط الأجسام على سطح الأرض. لا يظهر مفعول هذه القوة في الأجسام الجهرية نظراً للتساوي التام بين عدد البروتونات

والإلكترونات في هذه الأجسام الحيادية؛ فلو احتوى جسم الإنسان على سبيل المثال على عدد من الإلكترونات يفوق عدد البروتونات بنسبة 1 بالمئة فقط ووجد شخصان على بعد متر واحد أحدهما عن الآخر لكانت قوة التنابذ بينهما كبيرة إلى حد كاف لرفع ثقل يساوي وزن الأرض كلها ! أما التجاذب على مستوى الذرة أو مستوى الأجسام الجهرية فيفسر تماسك المادة ووجود الأجسام الصلبة وضرورة بذل طاقة لتأيين الذرة أو لتقسيم الجسم الصلب إلى أجزاء. يبقى سؤال وحيد لا نستطيع الإجابة عليه في إطار النظرية التي سندرسها في هذا المجلد وهو: ما الذي يجعل الذرات مستقرة ؟ لماذا لا يسقط إلكترون ذرة الهدروجين الخفيف على البروتون الأثقل منه بحوالي ألفي مرة تحت تأثير الجاذبية الكهربائية الهائلة ؟ يجيب ميكانيك الكم موضوع المجلد التالي على هذا السؤال اعتماداً على مبدأ اللاتحديد الذي وضعه هايزنبرغ.

2.1 – الحقل الكهرطيسي

تحدث الشحنة، ولنعين وضعها في اللحظة $t = 0$ بمبدأ الإحداثيات، في نقاط الفضاء المحيطة بها وفي اللحظات التالية لـ t، حقلين متجهين هما الحقل الكهربائي والحقل المغنطيسي؛ نرمز لهما بالترتيب بـ $\vec{E}(x, y, z; t)$ و $\vec{B}(x, y, z; t)$ أو اختصاراً $\vec{E}(\vec{r}, t)$ و $\vec{B}(\vec{r}, t)$. يعبر هذان الحقلان عن التفاعل بين الشحنة التي أحدثت الحقلين وشحنة أخرى q، نسيمها شحنة التجربة لأنها تكشف عن وجود الحقلين في النقطة $\vec{r}$ واللحظة t، تتأثر بقوة تحددها العلاقة التالية

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right) \qquad (1.1)$$

تسمى هذه القوة، المحسوبة في النقطة $\vec{r}$ واللحظة t، قوة لورانتس، $\vec{V}$ هي سرعة الشحنة q في اللحظة t والنقطة $\vec{r}$.

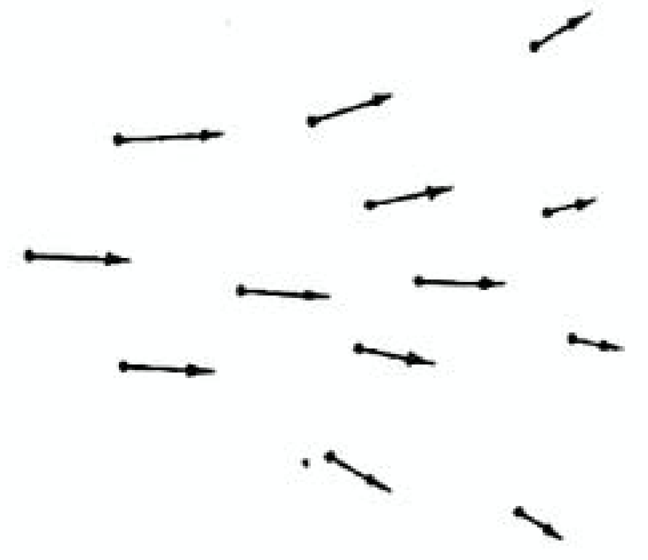
يمكن النظر إلى العلاقة (1.1) التي تحدد الصلة بين الحقلين الكهربائي والمغنطيسي والقوة المبطقة على شحنة التجربة كمبدأ، ولنسمه المبدأ صفر في الكهرطيسية، ذلك أننا استخلصنا صيغة قوة لورانتس في المجلد الأول ((4.25).I.7) من النسبية الخاصة ومبادئ الكهرطيسية الأربعة التي سنعرضها بعد قليل. تبين هذه العلاقة أن الحقل الكهربائي هو، على غرار حقل الجاذبية الكونية، القوة المطبقة على واحدة الشحنة مع فارق مهم هو دخول الزمن في تعريف هذين المقدارين. لكن الحقل المغنطيسي مختلف تماماً فهو عمودي على اتجاه القوة ويبطل مفعوله عندما تكون شحنة التجربة ساكنة فعلاً أو عندما نعالج التفاعل الكهرطيسي في لحظة معينة في جملة محاور مرتبطة بهذه الشحنة.

أبعاد الحقل المغنطيسي هي أبعاد قوة على أبعاد شحنة Q مضروبة بأبعاد سرعة : $\frac{MT^{-1}}{Q} = \frac{MLT^{-2}}{QLT^{-1}}$.

إنها أبعاد الحقل الكهربائي مقسومة على أبعاد السرعة LT^{-1} وتتطبق أبعاد الحقلين في نظمة أبعاد تساوي بين البعد الزماني والبعد المكاني (النسبية الخاصة).

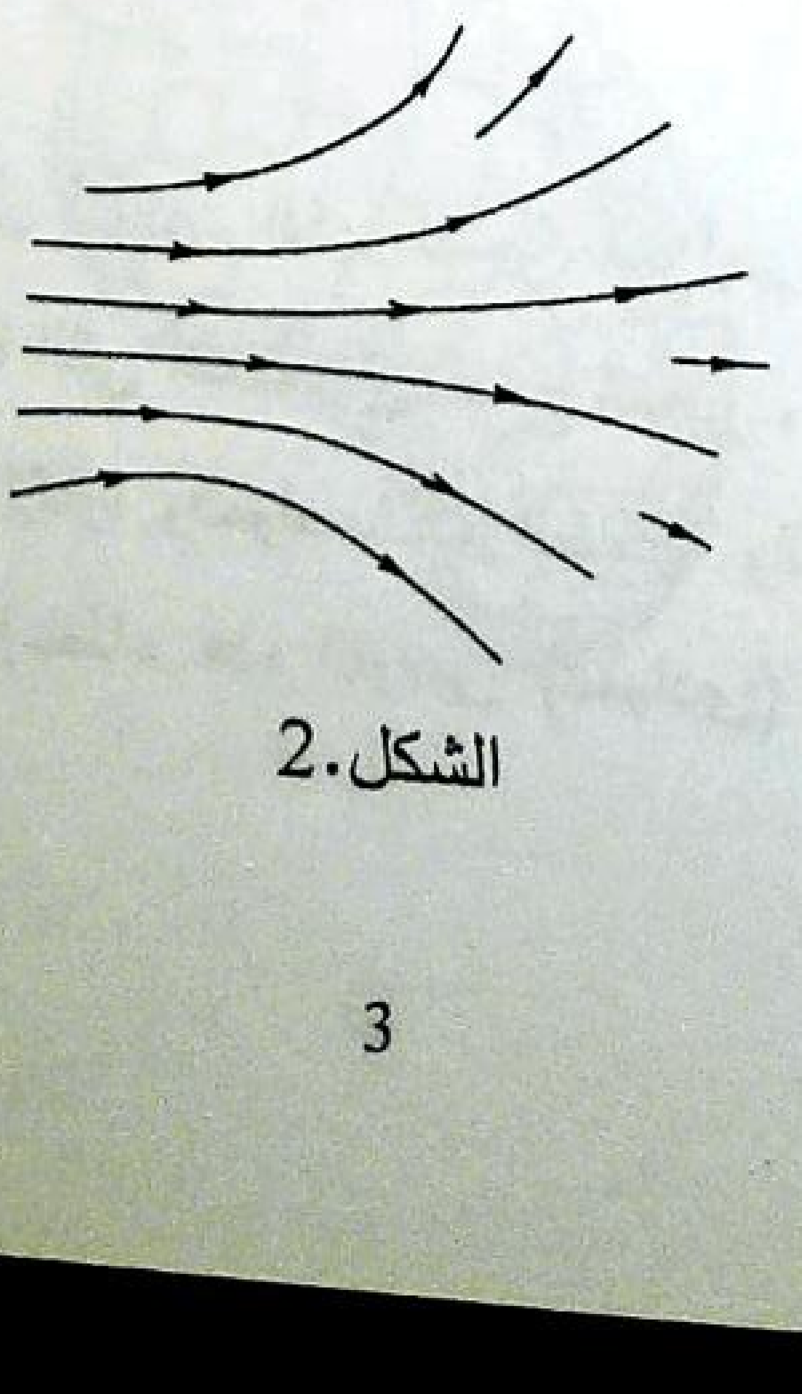
إن مفهوم الحقل الذي تصوره فارادي Faradey أساسي في كل الفيزياء لأنه يبين تغير خواص الفضاء شيئاً فشيئاً مع الزمن نتيجة وجود الشحنة في نقطة منه ولحظة معينة، فهو من وجهة النظر هذه تعبير عن إسهام الفضاء الخاوي في التفاعل بين الجسيمات. يتجلى اشتراك الفضاء في التفاعل في أسمى صوره في نظرية النسبية العامة لأنشتاين حيث يعبر تحدب الفضاء – الذي لم يعد فضاءً شبه إقليدي مسطحاً (فضاء مينكوفسكي) – عن شدة تجاذب الكتل التثاقلي. لقد وحدت النسبية العامة الزمان–المكان مع المادة وأوصلت الفيزياء إلى أعلى مراتبها في جمعها بين الهندسة (مينكوفسكي) والمادة وهو أمر لم يكن من الممكن بلوغه لولا مفهوم الحقل.

ليست كل الحقول حقولاً متجهية، فقد تكون سُلمية، متجهية أو تانسورية، وليس لكل الحقول هذا الطابع المجرد الذي يأخذه الحقلان $\vec{E}$ و $\vec{B}$، فقد رأينا على سبيل المثال حقل درجة الحرارة السلمي في نقاط الفضاء المحيطة بمنبع حراري؛ عرفنا أيضاً (((II.5.(1.9 تانسوراً (حقلاً تانسورياً σ) – مصفوفة بثلاثة أسطر وثلاثة أعمدة – تعبر عن القوى الممارسة على حجم صغير لسائل خارج وضع التوازن. لنأخذ كتمثيل محسوس للحقل المتجهي حقل السرع لجزيئات سائل (مائع أو غازي)، فنتمثل حركة حجم من السائل برسم متجهات متعددة تعين وضع واتجاه حركة وقيمة سرعة كل جزيء منه، تتناسب هذه القيمة مع طول السهم كما في الشكل.1



الشكل.1

تتيح هذه الأسهم رسم مسار كل جزيء، كل حجم لامتناه في الصغر من الحجم الكلي، لتصبح مماسة له في مختلف نقاطه، الشكل.2. نستعيض في هذا التمثيل عن قيمة السرعة التي لم تعد ممثلة كما في الشكل.1 برسم مسارات يتناسب تقاربها مع قيمة السرعة، أي أن كثافة المسارات هي المعبرة عن قيمة السرعة.



الشكل.2

خطوط القوة وتعبر كثافتها عن شدة القوة.

تسمى هذه المسارات عندما يكون الحقل المتجهي حقل قوة $\vec{F}$ خطوط القوة وتعبر كثافتها عن شدة القوة.

يمثل توزع نشارة الحديد حول أحد قطبي قضيب مغنطيسي خطوط قوة الحقل المغنطيسي الناتج عنه.

3.1- مبادئ الكهرطيسية

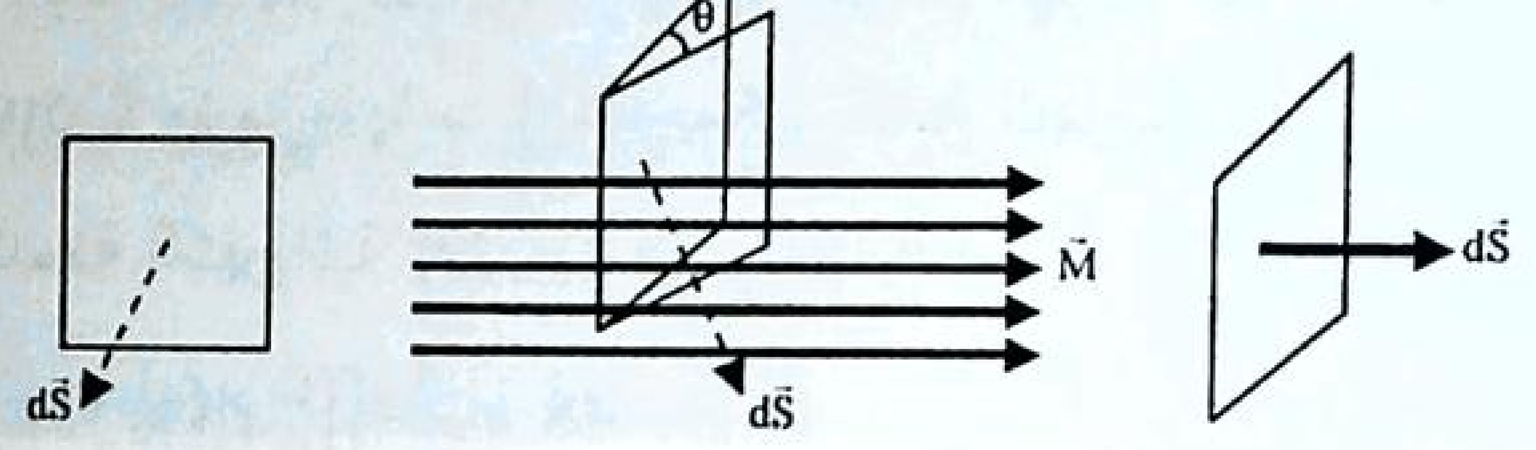
كان ينظر إلى تجاذب الشحنات الكهربائية وتنابذها، من جهة وتجاذب وتنابذ أقطاب الأجسام الممغنطة، من جهة أخرى، كظواهر فيزيائية مستقلة رغم وجود تشابه كبير بينهما، إذ تتناسب قوة التجاذب والتنابذ مع مقلوب مربع المسافة بين العنصرين. إلى أن جاء ماكسويل (J.C. Maxwell) ووضع في الثلث الأخير من القرن التاسع عشر – في العام 1865 تحديداً – نظرية توحد هاتين الظاهرتين تحت اسم الكهرمغنطيسية (الكهرطيسية) وتبين في الوقت ذاته أن الحقل الكهرطيسي المؤلف من $\vec{E}$ و $\vec{B}$ ينتشر في الفضاء على شكل أمواج سرعتها هي سرعة الضوء C وأن النور لا يعدو كونه أمواجاً كهرطيسية تتميز بأطوال موجة محددة تتأثر شبكة العين بها. يقول ماكسويل : "يشير توافق النتائج أن الضوء والمغنطيسية ظاهرتان من طبيعة واحدة وأن الضوء هو اضطراب ينتشر في الفضاء حسب قوانين الكهرطيسية".

تتلخص نظرية ماكسويل بأربعة مبادئ تعبر عنها أربع معادلات تفاضلية جزئية، فكانت أول نظرية في الفيزياء توحد ظواهر الكهرباء والمغنطيس والضوء في إطار واحد، وفتحت الطريق من ثم أمام النسبية الخاصة التي قلبت مفاهيم الزمان والمكان النيوتونية فأقامت الميكانيك النسبوي وأعادت صياغة مبادئ الكهرطيسية في إطار هذا الميكانيك، انظر الفصل السابع في المجلد الأول. وأخذت الكهرطيسية منحى جديداً عندما اقتضى الأمر الجمع بين ميكانيك الكم والنسبية الخاصة لدراسة فيزياء الجسيمات الذرية وتحت الذرية ذات السرعة الكبيرة (القريبة من سرعة الضوء) فاتخذ الحقلان $\vec{E}$ و $\vec{B}$ شكل مؤثرين عوضاً عن شكلهما كدالتين في هذا المجلد ونشأت نظرية جديدة، هي الكهرطيسية الكمومية أو الإلكتروديناميك الكمومي؛ نجحت هذه النظرية نجاحاً منقطع النظير في معالجة التفاعلات الكهرطيسية بين الجسيمات الأولية – الخاضعة لميكانيك الكم ولنظرية النسبية في آن واحد –، فلا عجب والحالة هذه أن تصبح الكهرطيسية الكمومية نموذجاً يحتذى لتوحيدها مع قوى الطبيعة الثلاث الأخرى، النووية الضعيفة والنووية القوية والجاذبية الكونية.

مما لا شك فيه أن اكتشاف ماكسويل لقوانين الكهرطيسية هو أهم حدث علمي في القرن التاسع عشر ونقطة انطلاق للثورة الصناعية الثانية التي أحلت، إن صح التعبير، الكهرباء محل الفحم وأتاحت المجال لكل التطبيقات التقنية المعروفة : الإنارة والمواصلات السلكية واللاسلكية (الهاتف، البرق والتلغراف) والتحريك الكهربائي، الخ. لنشر قبل إعطاء هذه القوانين (المبادئ) أن منشأ المغنطيسية الحديدية منشأ

كهربائي راكد – تفاعل كهربائي راكد بين سبيبين متوازيين – ولكن هذا المنشأ لم يتضح إلا في القرن العشرين بعد قيام ميكانيك الكم على أسس نظرية متينة، انظر (V.3.§3).

تقوم مبادئ ماكسويل على مفهومين هما مفهوم التدفق، flux، ومفهوم الدوران (الجولان في أنبوب ضيق مغلق) Circulation. فالتدفق بالمعنى المادي للكلمة هو كمية السائل التي تعبر سطحاً ما – وليكن واحدة السطوح في واحدة الزمن عمودياً على متجهة السرعة –، إنها كمية المادة الموجودة في أسطوانة قائمة، مولدها مواز لمتجهة السرعة في واحدة الحجوم، طولها مساو لقيمة السرعة، وسطح قاعدتها مساو لواحدة السطوح. نرمز لهذه الكمية بـ $\vec{M}$ إنها كثافة المادة مضروبة بمتجهة السرعة. ليكن لدينا الآن سطح عنصري نعين وضعه في الفضاء بالمتجهة $d\vec{S}$ العمودية عليه. إن تدفق المادة عبر هذا السطح مساو للصفر إذا كان موازياً لمتجهة السرعة ($d\vec{S}$ عمودياً عليها) وهو مساو لـ MdS إذا كان عمودياً عليها ($d\vec{S}$ موازياً لها) ولذا نعبر عنه في كل الأحوال بالجداء السلمي $\vec{M} \cdot d\vec{S}$، الشكل.3



الشكل.3

نرمز لتدفق حقل متجهي $\vec{E}$ (أو $\vec{B}$) عبر عنصر السطح $d\vec{S}$ بـ

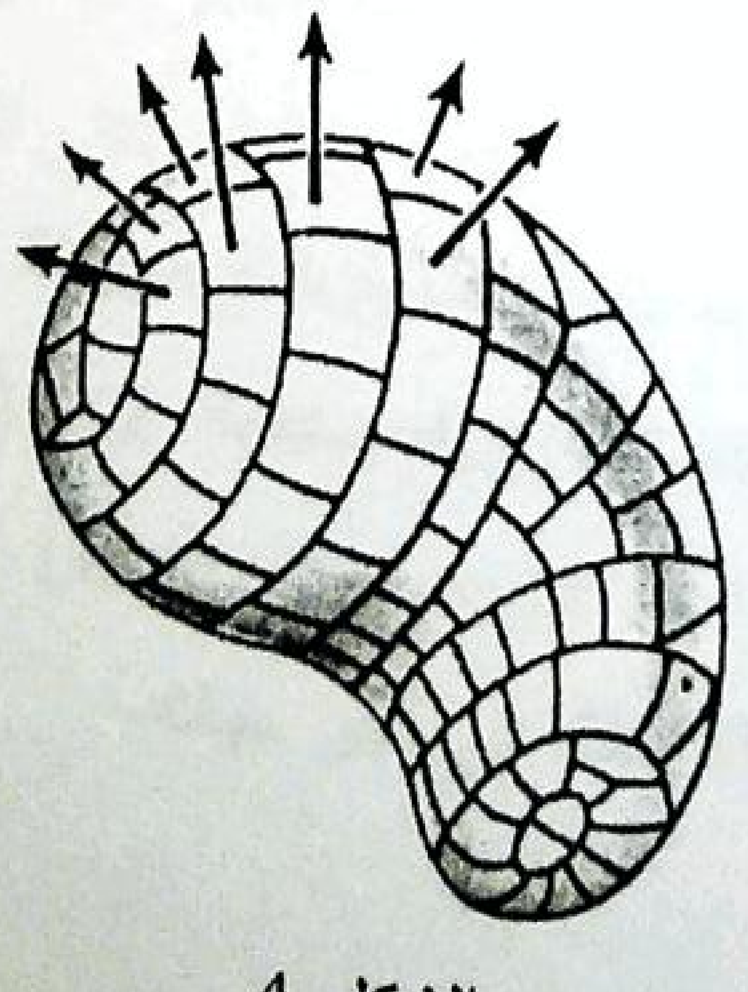
$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = EdS\cos\theta$$

حيث θ الزاوية التي يصنعها $d\vec{S}$ مع اتجاه الحقل $\vec{E}$.

ونعبر عن التدفق من حجم ما V بالتكامل الثنائي

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

حيث S هو السطح الذي يحدد الحجم V وحيث عناصر السطح $d\vec{S}$ متجهة بشكل مستمر نحو خارج الحجم، الشكل.4



الشكل.4

يمكن تصور الدوران كحركة مائع على شكل دوامات (مغلقة) ونعرفه من أجل محيط الدوامة بالعلاقة

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$$

حيث $\vec{V}$ هي سرعة السائل و $d\vec{\ell}$ عنصر الطول والتكامل على محيط الدوامة.

نصيغ مبادئ الكهرطيسية الأربعة على شكل تكاملي على النحو التالي:

1- المبدأ الأول:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (1.2)$$

ونقول إن تدفق الحقل الكهربائي عبر سطح ما محيط بحجم V يساوي للشحنة الكهربائية الكلية في هذا الحجم مقسومة على معامل ثابت تحدد قيمته وحدات القياس المستعملة. سنستعمل بالإضافة إلى الوحدات الميكانيكية المقيسة بالكيلوغرام والمتروالثانية، $[M][L][T]$، وحدة رابعة هي وحدة الشحنة الكهربائية المسماة كولون Coulomb ونرمز لها بـ $[Q]$. يمكن كتابة الطرف الثاني لهذا المبدأ على شكل تكامل ثلاثي بتعريف كثافة الشحنة الكهربائية (الشحنة في واحدة الحجوم) $\rho(x, y, z)$ لتصبح (1.2) :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho(x, y, z)\, dx dy dz \quad (1.2)'$$

يمكننا أن نرى للتو محتوى هذا المبدأ بأن نأخذ شحنة q متمركزة في نقطة O وسطح كرة نصف قطرها r ومركزها O. سنقبل أن الفضاء متناح وأن للحقل الكهربائي العمودي على سطح الكرة ذات القيمة في كل نقاط سطح الكرة. تأخذ (1.2) عندئذ الشكل

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint E dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

والحقل الناتج عن الشحنة q في نقطة تبعد عنها المسافة r يساوي

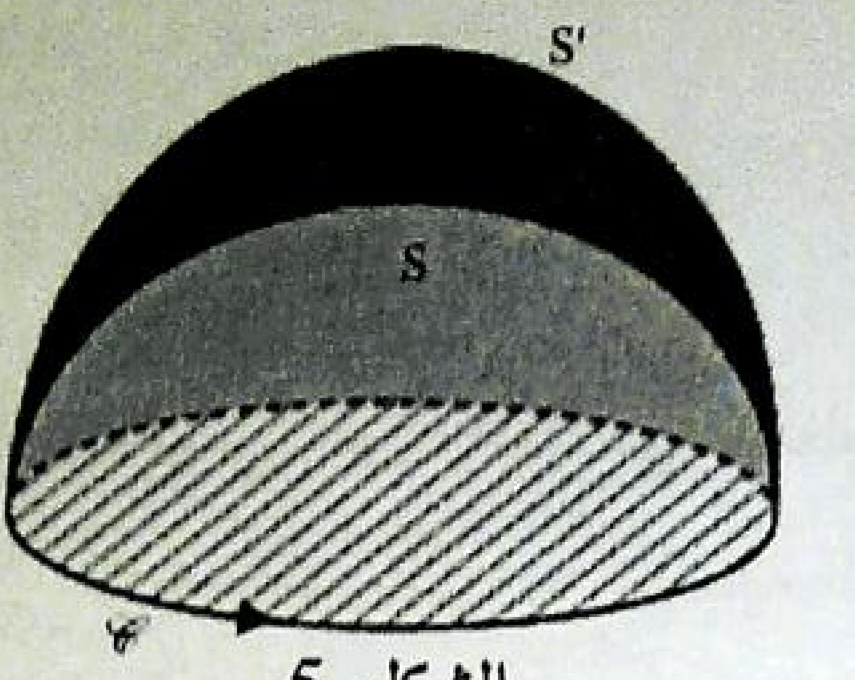
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

القوة الكهربائية المؤثرة على شحنة تجربة q' في هذه النقطة r هي

$$F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

وهو قانون كولون الذي بنيت عليه كل الكهربائية الراكدة.

ليكن لدينا منحن مغلق $\mathscr{C}$ يحد سطحاً ما S. توجد سطوح عديدة يحددها المنحني المغلق $\mathscr{C}$، الشكل.5



الشكل.5

2- المبدأ الثاني:

يحدد هذا المبدأ العلاقة بين الحقلين المغنطيسي والكهربائي بقوله إن دوران الحقل $\vec{E}$ حول المنحني المغلق $\mathscr{C}$ متناسب مع تناقص تدفق الحقل المغنطيسي ويساوي لناقص مشتق تدفق $\vec{B}$ عبر السطح لا على التعيين S المستند على $\mathscr{C}$ بالنسبة للزمن؛ أي أن

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad (1.3)$$

لنلاحظ أن $\vec{B}$ تابع للوضع x, y, z وللزمن t؛ لذلك كتبنا الاشتقاق بالنسبة للزمن على شكل اشتقاق جزئي لأن السطح S ليس مغلقاً (لا يحدد حجماً).

تعني هذه العلاقة أن تغير التدفق المغنطيسي – تحريك القضيب المغنطيسي على سبيل المثال – ينتج حقلاً كهربائياً. تقوم المولدات الكهربائية والمحولات على هذا المبدأ.

يتعلق الأمر في المبدأين الآخرين بتدفق الحقل المغنطيسي ودورانه.

3- المبدأ الثالث:

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad (1.4)$$

يعبر هذا المبدأ عن استحالة وجود شحنات مغنطيسية، يطلق عليها اسم الكتل المغنطيسية، شبيهة بالشحنات الكهربائية، وهو في واقع الأمر إقرار بتجارب المغنطيسية الابتدائية التي تبين استحالة فصل قطبي مادة ممغنطة عن بعضهما : إن كسر قضيب ممغنط مهما صغر ينتج قضيبين مغنطيسيين جديدين، قطب المغنطيس الشمالي لأحدهما في منطقة الكسر هو القطب الجنوبي للثاني في هذه المنطقة وبالتالي فإن الفعل المغنطيسي هو فعل ثنائي قطب، كفعل ثنائي القطب الكهربائي المكون من شحنتين متعاكستي الإشارة ومتساويتين بالقيمة المطلقة واقعتين على مسافة معينة إحداهما عن الأخرى. إن جعل تدفق الحقل المغنطيسي مختلفاً عن الصفر يعني إمكانية عزل أحد القطبين عن الآخر ووجود وحيد القطب Monopole المغنطيسي. هذا ما اقترحه ديراك Dirac عام 1930 ولكن كل محاولات عزل وحيد القطب باءت بالفشل كما أقر ديراك بذلك في آخر حياته.

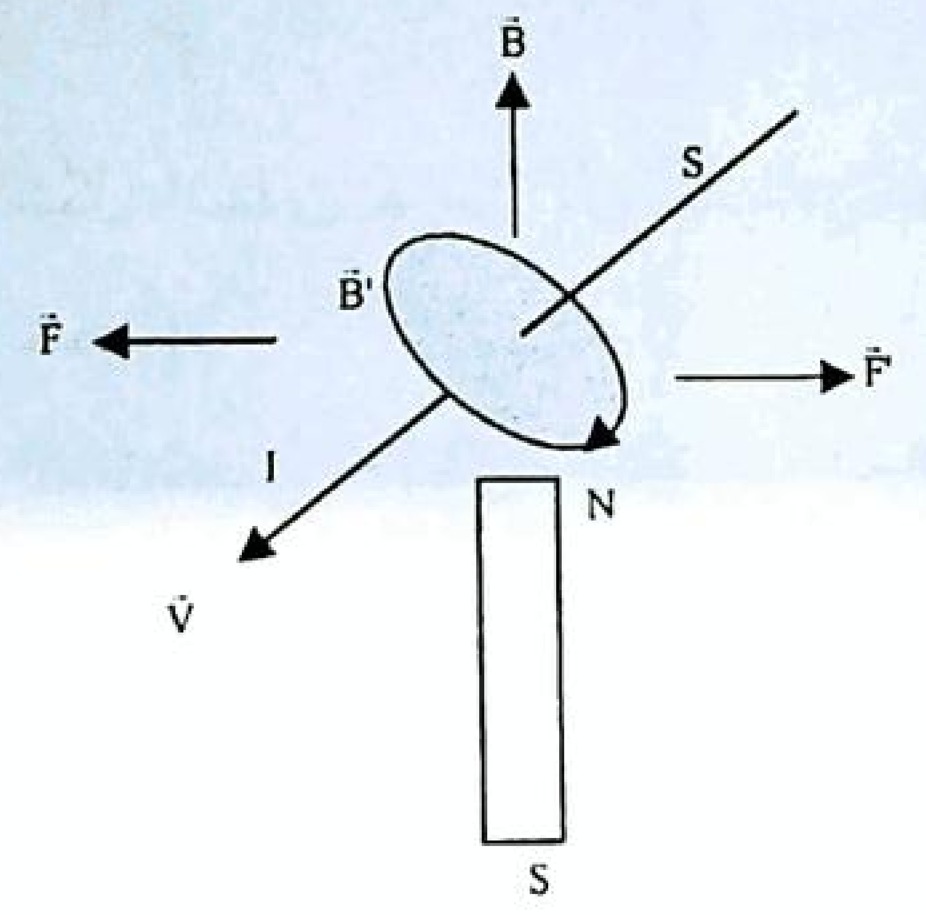
4- المبدأ الرابع:

$$C^2\oint_{\mathscr{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{\varepsilon_0}\iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (1.5)$$

يقول هذا المبدأ إن دروان الحقل المغنطيسي حول المنحني المغلق $\mathscr{C}$ يساوي مشتق تدفق الحقل الكهربائي عبر السطح لا على التعيين S المستند على $\mathscr{C}$ بالنسبة للزمن، مضافاً إليه تدفق التيار عبر هذا السطح. حيث C هي سرعة الضوء و $\vec{J}$ كثافة التيار الكهربائي.

إن ظهور سرعة الضوء في هذا المبدأ عائد إلى كون المغنطيسية مفعولاً نسبوياً للكهرباء، كما رأينا في نظرية النسبية. .

ترينا العلاقة (1.1) أن الحقل المغنطيسي، الناتج عن قضيب مغنطيسي على سبيل المثال، يحرف الشحنة عن مسارها ويدفع بالسلك الحامل للتيار I نحو اليسار، الشكل.6.

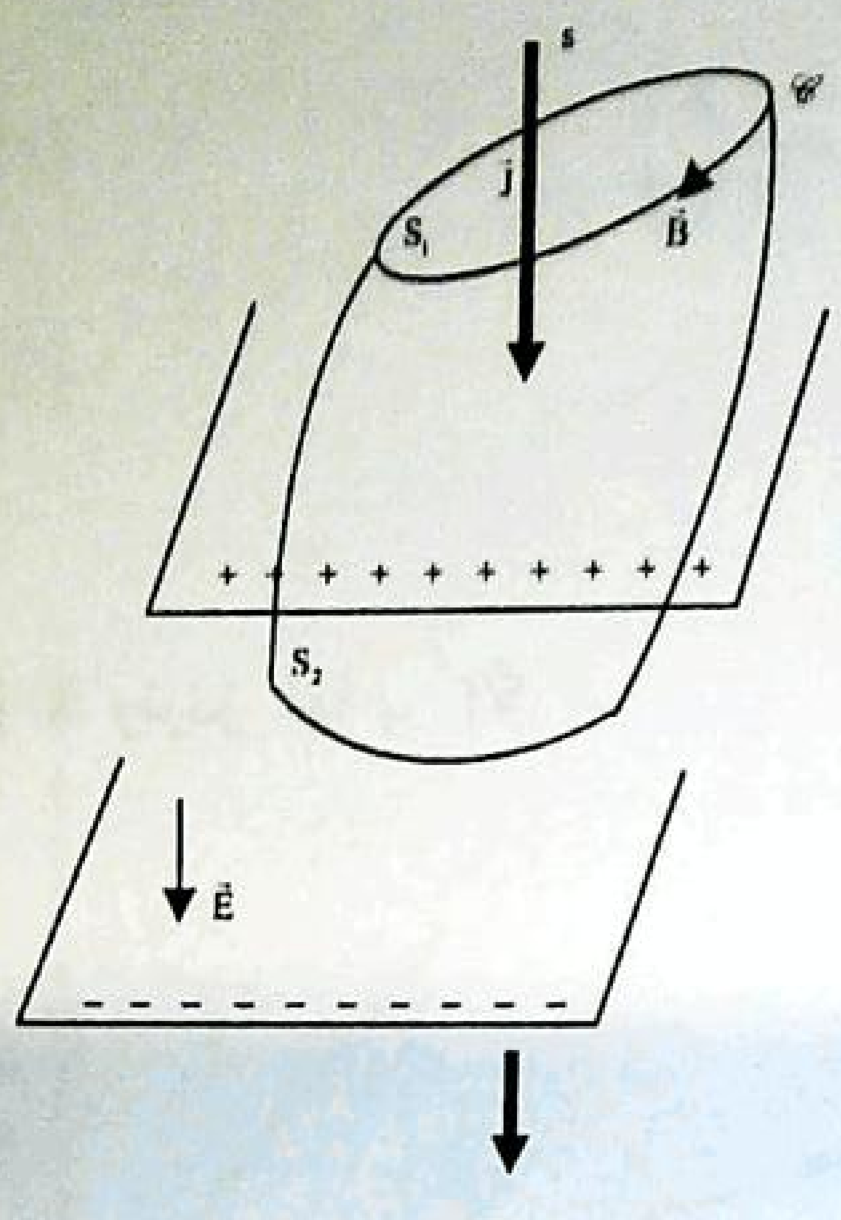


الشكل.6

وهكذا يعبر الحد الثاني من الطرف الأيمن عن رد فعل التيار الذي ينتج حقلاً مغنطيسياً يدور حول السلك، نرمز له هنا بـ $\vec{B}'$ يدفع القضيب الممغنط في الاتجاه المعاكس لـ $\vec{F}$ تحت تأثير القوة $\vec{F}'$. وبما أن الدوران متناسب مع تدفق التيار الثابت فإن شدة الحقل تتناقص كلما كبرت الدائرة

$$\frac{B'}{B''} = \frac{r''}{r'} \quad (1.6)$$

يكتسي الحد الأول في الطرف الأيمن أهمية خاصة، فقد استخلصه ماكسويل نظرياً إذ يقع المبدأ الرابع في تناقض صارخ لولا هذا الحد. لنفسر ذلك، ولو استبقنا الأحداث على النحو التالي : لتكن لدينا مكثفة مستوية متصلة بدارة يمر فيها تيار كثافته $\vec{J}$ يشحن المكثفة ولنرسم منحنياً مغلقاً $\mathscr{C}$ يحيط بالسلك سطحه S_1، الشكل.7.



الشكل.7

يحدث تدفق التيار $I = \vec{J} \cdot \vec{s}$ حيث s مقطع السلك عبر هذا السطح حقلاً مغنطيسياً يتعين دورانه على $\mathscr{C}$ بتدفق التيار – بالحد الثاني من (1.5). لنأخذ سطحاً آخر S_2 يستند على المنحني المغلق ولكنه يمر بين لبوسي المكثفة. لا وجود لتدفق تيار عبر S_2 ولا وجود لحقل مغنطيسي ناتج عن الحد الأول. ولكن تغيير السطح الاعتباطي المستند على $\mathscr{C}$ لا يغير الواقع الفيزيائي : يبقى دوران الحقل المغنطيسي على $\mathscr{C}$ قائماً ولكنه ناتج عن تغير تدفق الحقل الكهربائي مع الزمن.

هذه إذاً المبادئ الأربعة التي تقوم عليها نظرية الكهرطيسية، لكن هذه المبادئ لا تتيح لنا حساب الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ التابعين للوضع والزمن $(\vec{r}, t)$ وبالتالي معرفة القوة التي تمارس على الشحنة q ذات السرعة $\vec{V}$ الموجودة في النقطة $\vec{r}$ واللحظة t. علينا لتحقيق ذلك صياغة هذه المبادئ المعبر عنها بشكل تكاملي، بشكل قيمة وسطية عملياً، صياغتها بشكل معادلات تفاضلية. ولذا فإننا بحاجة إلى معرفة جبر المؤثرات التفاضلية ومبرهنة ستوكس.

4.1– المؤثرات التفاضلية

نرمز بـ $\vec{\nabla}$ للمؤثر التفاضلي المتجهي ذي المركبات

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad (1.7)$$

ونعني بذلك أن فعل هذا المؤثر على دالة سلمية $f(x, y, z)$ هو المتجهة التي مركباتها هي

$$\frac{\partial f}{\partial x}\quad \frac{\partial f}{\partial y}\quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

نسمي هذه المتجهة غراديان (التدرج) f ونرمز لها بـ $\vec{\nabla} f$:

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad (1.8)$$

إن اعتبار المؤثر التفاضلي $\vec{\nabla}$ متجهة يسمح لنا بتطبيق جبر المتجهات عليه، حساب جدائه السلمي بمتجهة $\vec{A}$، مركباتها:

$A_x(x, y, z)$

$A_y(x, y, z)$ ،

$A_z(x, y, z)$

وتعريف فعل المؤثر بالعلاقة التالية

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (1.9)$$

نسمي هذا الجداء تباعد $\vec{A}$ (divergence $\vec{A}$) أو تفرق $\vec{A}$.

إن الطرف الثاني في هذا التعريف سلمي وبالتالي فإن الطرف الأول سلمي كذلك، على غرار الجداء السلمي العادي لمتجهتين، ولا يتغير إذاً عندما ننتقل بالدوران من جملة محاور (X, Y, Z) متعامدة في الفضاء الإقليدي إلى جملة محاور متعامدة أخرى (X', Y', Z'). لتكن β مصفوفة انتقال المتجهة $\vec{A}(x, y, z)$ في الجملة الأولى إلى $\vec{A}'(x', y', z')$ في الجملة الثانية $\vec{A}' = \beta\vec{A}$. نعلم من دروس الميكانيك (انظر زمرة الدورانات في الفصل الخامس وكذا ملحقه) أن $\tilde{\beta}\beta = I$ حيث β منقول المصفوفة $\tilde{\beta}$ و I المصفوفة الواحدية وأن المؤثر التفاضلي ينتمي إلى ثنوي الفضاء الإقليدي وننتقل من المتجهة $\vec{\nabla}$ إلى $\vec{\nabla}'$ بالعلاقة $\vec{\nabla}' = \vec{\nabla}\tilde{\beta}$، وهكذا فإن

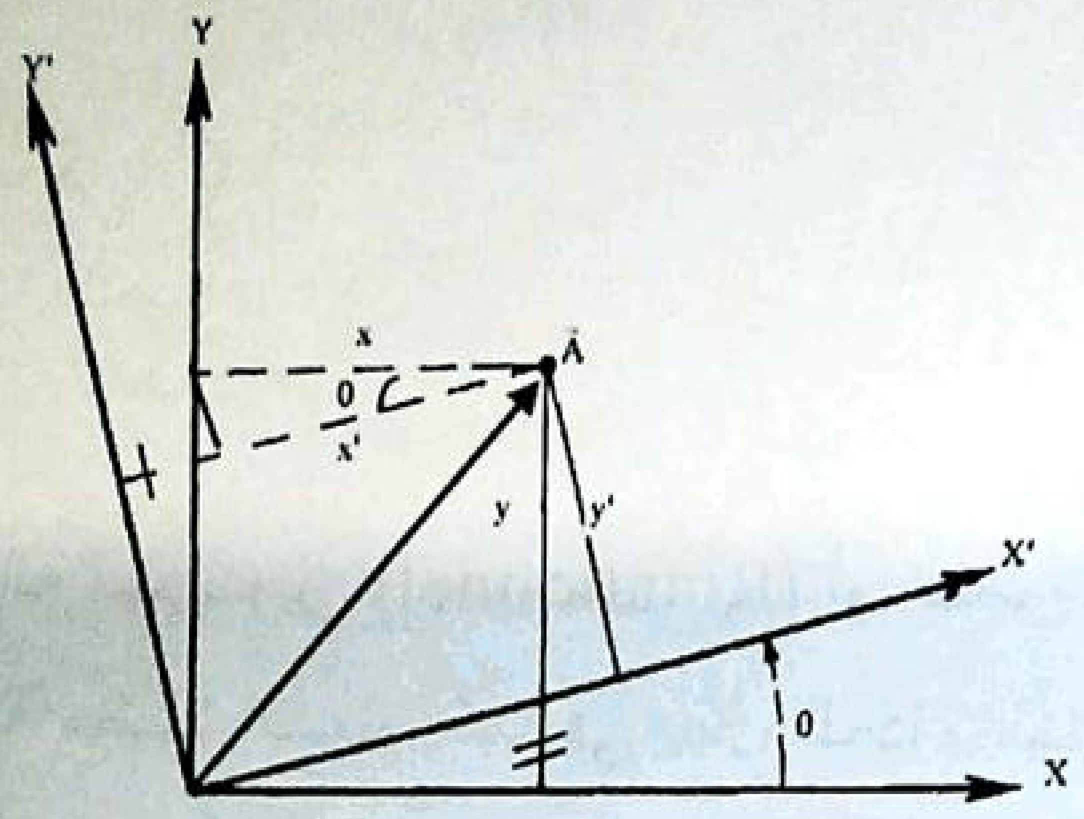
$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla}\tilde{\beta} \cdot \beta\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \qquad (1.10)$$

والجداء سلمي حقاً.

لنعط للتذكير وتوضيح هذه العلاقة حالة جملة محورين متعامدين (X, Y) تنتقل بدوران زاوية θ إلى الجملة (X', Y'). واضح أن مصفوفة الانتقال β من مركبات المتجهة $\vec{A}$، (x, y) في الجملة الأولى إلى (x', y') في الجملة الثانية هي، الشكل.8

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \quad (2)$$



الشكل.8

يرينا، الشكل.8، أن x' هي $x\cos\theta$ زائد القسم المشار إليه بـ / والمؤلف من قسمين مجموعهما يساوي $y\sin\theta$، بينما y' هي $y\cos\theta$ ناقص القسم المشار إليه بـ //. معين المصفوفة يساوي 1 ومنقولها هو مقلوبها

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (3)$$
$$\tilde{\beta}\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

الذي يحدد التحول العكسي

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \quad (4)$$

ننتقل في ثنوي الفضاء، الذي نكتب عناصره على شكل سطر، على النحو التالي

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x'} & \dfrac{\partial}{\partial y'} \end{pmatrix} = (\partial x \;\; \partial y) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (5)$$

(الجداء السطر بالعمود)

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial}{\partial y}\sin\theta \quad (6)$$
$$\frac{\partial}{\partial y'} = -\frac{\partial}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial}{\partial y}\cos\theta$$

نتحقق من (6) بملاحظة أن

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'}$$

وأخذ (4) بعين الاعتبار، وهكذا نحصل على (1.10) ببعدين فقط.

سنفعل الشيء ذاته في تعريف الجداء المتجهي للمؤثر التفاضلي $\vec{\nabla}$ بمتجهة ما للحصول على شبه المتجهة

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad (1.11)$$

يطلق على فعل $\vec{\nabla}$ في هذه الحالة اسم تدوير (Rotationnel) أو عِقص (Curl) $\vec{A}$. إن شبه المتجهة (1.11) تانسور من الرتبة الثانية مضاد التناظر كما في حال الجداء المتجهي العادي مع أنه لا معنى لجداء من الشكل $\vec{A} \times \vec{\nabla}$. تكفي مفاهيم الغراديان والتباعد (التفرق) والتدوير للتعبير عن معادلات ماكسويل ولكننا سنحتاج بعد ذلك إلى المؤثرات التفاضلية من الدرجة الثانية وهي التالية : لدينا من (1.8) و(1.9)

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} f\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

الطرف الثاني مقدار سلمي يطلق عليه اسم لابلاسي Laplacian الدالة f ونكتب المؤثر التفاضلي من الدرجة الثانية، اللابلاسي ∇^2، أياً كانت الدالة التي يفعل فيها.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (1.12)$$

نعرف فعل هذا المؤثر التفاضلي على متجهة $\vec{A}$ بالعلاقة المتجهية

$$\nabla^2 \vec{A} = \begin{cases} \nabla^2 A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \nabla^2 A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \nabla^2 A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{cases} \qquad (1.13)$$

لدينا كذلك من (1.9) و(1.8) المقدار المتجهي

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)=\vec{\nabla}f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}\\ \frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\end{pmatrix} \qquad (1.14)$$

حيث سمينا f الدالة السلمية $\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$.

ولدينا أيضاً من تعريف الجداء المتجهي المزدوج، بشرط وقوع المؤثر على اليسار حتى يكون للجداء معنى،

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)&=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}\\ &=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}\end{aligned} \qquad (1.15)$$

آخذين بعين الاعتبار (1.12) و(1.13).

لدينا أخيراً نظراً لخواص الجداء المتجهي أياً كانت الدالة f

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f=0 \qquad (1.16)$$

نتحقق من ذلك بسهولة بكتابته على الشكل

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=0\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=0\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=0\end{pmatrix}$$

وكذلك

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=0 \qquad (1.17)$$

وهنا أيضاً يكفي الرجوع إلى التعريف للتحقق من هذه العلاقة.

5.1– معادلات ماكسويل

علينا الآن بعد أن تعرفنا على جبر المؤثرات التفاضلية العودة إلى مبرهنة ستوكس Stokes لكتابة مبادئ الكهرطيسية على شكل تكاملات متجانسة، ببعد واحد أو بعدين أو ثلاثة أبعاد. أعطينا الصيغة العامة لهذه المبرهنة في ملحق الفصل الأول من المجلد السابق، لأننا تعاملنا مع فضاءات لا تقتصر أبعادها

على أبعاد الفضاء الفيزيائي العادي. ترينا العلاقة (6) من هذا الملحق، الذي نستعيده في نهاية هذا الفصل، أن

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad (1.18)$$

تعرف هذه الصيغة باسم مبرهنة ستوكس تخصيصاً. إن التكامل في الطرف الثاني هو تكامل على منحنٍ مغلق – إنه دوران $\vec{A}$، والتكامل في الطرف الأيسر على سطح لا على التعيين S يستند على المنحني المغلق. كما ترينا العلاقة '(7) من الملحق أن

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (1.19)$$

تعرف هذه الصيغة باسم مبرهنة غاوص أو مبرهنة غرين وأحياناً أوستروغرادسكي. التكامل في الطرف الثاني هنا هو على سطح مغلق يحدد الحجم V في الطرف الأيسر.

نعبر عن مبادئ الكهرطيسية بالمعادلات التالية:

يأخذ المبدأ الأول نظراً لـ '(1.2) و(1.19) الشكل

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.20)$$

والمبدأ الثاني نظراً لـ (1.3) و(1.18)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \quad (1.21)$$

والمبدأ الثالث (1.4) نظراً لـ (1.19)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.22)$$

والمبدأ الرابع (1.5) نظراً لـ (1.18)

$$C^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} + \frac{\vec{J}}{\varepsilon_0} \quad (1.23)$$

هذه هي معادلات ماكسويل الأربع التي ترتكز عليها نظرية الكهرطيسية. إنها معادلات تفاضلية جزئية، إلا أن المهم فيها هي أنها معادلات خطية يصح فيها مبدأ التوضيع (انظر (2.7)§I.4) – وهو مبدأ يصح على كل النظريات الفيزيائية التي ندرسها في هذا الكتاب –؛ ويعني على وجه الخصوص، إذا نظرنا إلى المعادلة الأولى (1.20) مثلاً، أنه إذا كان $\vec{E}$ حلاً لهذه المعادلة عندما تكون كثافة الشحنة ρ و$\vec{E}'$ حلاً آخر يقابل كثافة الشحنة ρ' فإن $\vec{E} + \vec{E}'$ حل أيضاً يقابل مجموع الكثافتين $\rho + \rho'$. أو بشكل آخر عندما ننظر إلى القوة $\vec{F}$ المطبقة على شحنة التجربة q فإنها مجموع القوتين الناتجتين عن ρ و ρ' معاً: لا يتفاعل الحقلان $\vec{E}$ و$\vec{E}'$ فيما بينهما.

لنضف أخيراً إلى ما ذكر في الملحق أنه إذا كانت $d\omega = 0$ ونقول عندئذ إن الصيغة مغلقة فإن هناك صيغة χ تحقق $\omega = d\chi$ ونقول عن الصيغة إنها مضبوطة. يبرهن (مبرهنة بوانكاريه Poincaré) أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون صيغة ما مغلقة هو أن تكون مضبوطة في شروط طوبولوجية معينة

محققة دوماً فيما يخصنا. لنلاحظ أنه إذا كانت الصيغة ω تانسوراً (مضاد التناظر) من المرتبة n-1 فإن $d\omega$ من المرتبة n وبالتالي فإن χ تانسور من المرتبة n-2 حسبما جاء في مطلع الملحق. إن التدوير (العقص) لمتجهة ما $\vec{A}$ تانسور من المرتبة الثانية مركباته بشكل دوري $\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dy \times dz$ الخ،

وهكذا فإن كون

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$

يكافئ وجود دالة سلمية $(n - 2 = 2 - 2 = 0)$ نرمز لها بـ χ تحقق العلاقة $\vec{A} = \vec{\nabla}\chi$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A} = \vec{\nabla}\chi \qquad (1.24)$$

كذلك فإن التباعد (التفرق) تانسور من المرتبة الثالثة و $\vec{\omega}$ تانسور من المرتبة الثانية

$$d\omega = \frac{\partial \omega_x}{\partial x} dx \times dy \times dz + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} dx \times dy \times dz + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} dx \times dy \times dz$$

وإذا كان $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0$ فتوجد متجهة $(3 - 2 = 1)$ نرمز لها بـ $\vec{\psi}$ تحقق العلاقة

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0 \qquad (1.25)$$

واضح من جبر المؤثرات في الحالتين (1.24) و(1.25) أن كون الصيغة مضبوطة يلزم كونها مغلقة

حسب (1.16) $\qquad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi = 0$

حسب (1.17) $\qquad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\psi}) = 0$

هذا هو كل ما في الكهرطيسية، أربع معادلات مصاغة على شكل تكاملي أو تفاضلي (1. 2,3,4,5) و(1.20-23). ومهمة هذا المجلد هي دراسة القوانين المستنبطة من هذه المبادئ، وإن كان منشؤها تجريبياً في كثير من الأحيان، تفسير الظواهر الطبيعية على هداها واستعراض بعض النتائج التقنية التي ولدتها. سنبدأ بعرض الظواهر المستقلة عن الزمن، الكهربائية الراكدة في هذا الفصل، ثم الظواهر المستقرة المغنطيسية الراكدة والتيار المستمر في الفصل التالي.

2. الكهربائية الراكدة

1.2– الكمون الكهربائي

لنبدأ بدراسة التفاعل الكهربائي المستقل عن الزمن، عن تفاعل الشحنات الساكنة. لا يتغير شيء في شكل معادلة ماكسويل الأولى (1.20)، $\vec{E}$ تابع لوضعه في الفضاء وليس للزمن ويصبح الطرف الثاني في معادلة ماكسويل الثانية (1.21) مساوياً للصفر لأنه لا وجود لحقل مغنطيسي ناتج عن شحنات ساكنة ولا

وهكذا فإن معادلات (1.1) حسب موجوداً كان ولو مغنطيسي حقل مع الساكنة الشحنات تفاعل الكهربائية الراكدة هي

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad (2.2)$$

القوة المؤثرة على شحنة ما q' هي

$$\vec{F} = q'\vec{E} \qquad (2.3)$$

رأينا في الفقرة السابقة (1.24) أن الشرط اللازم والكافي لتحقيق (2.2) هو وجود دالة سلمية، نرمز لها هنا بـ $-V$، يكون $\vec{E}$ مساوياً لغرادیانها

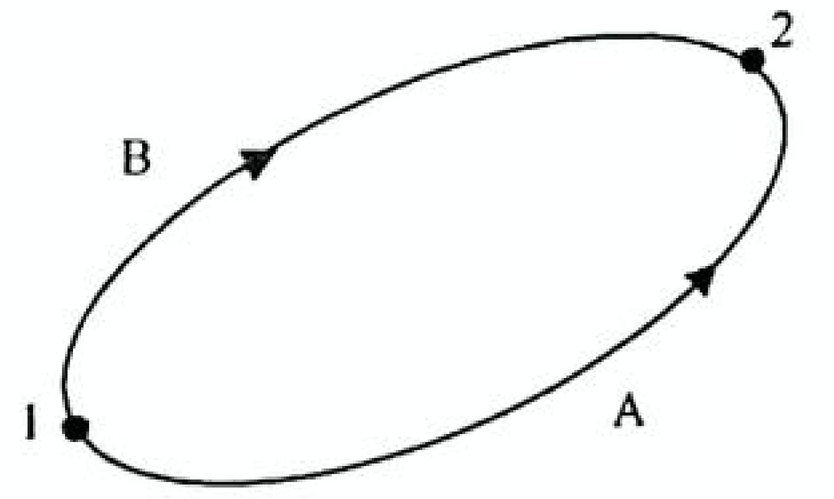
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \qquad (2.4)$$

ونقول في هذه الحالة إن الحقل الكهربائي الراكد مشتق من كمون. تبين مبرهنة ستوكس (1.18) أن (2.2) تعني أن

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

أي أن دوران الحقل على منحني مغلق يساوي الصفر أو أن تكامل $\vec{E}$ بين النقطتين 1 و 2 في الفضاء لا يتوقف على الطريق المتبع، الشكل.9

$$\left(\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}\right)_A = \left(\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}\right)_B$$



الشكل.9

لنكتب مبرهنة غاوص من أجل شحنة q متمركزة في نقطة ولنأخذ لحساب تدفق $\vec{E}$ سطحاً كروياً مركزه q. وليكن r نصف قطر الكرة. إن تدفق الحقل الكهربائي عبر هذا السطح هو $4\pi r^2 E$ حيث فرضنا أن شدة الحقل هي ذاتها على كل نقاط السطح الكروي وأنه عمودي على السطح في كل نقطة من نقاطه، وهو فرض يتفق مع خواص الفضاء الإقليدي (التناحي والتجانس) التي قبلناها في كل النظريات الفيزيائية. لدينا

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

و

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\vec{e} \qquad (2.5)$$

حيث $\vec{e}$ المتجهة الواحدية على المستقيم الواصل بين وضع الشحنة ونقطة قياس الحقل. كثيراً ما نكتب هذه العلاقة على الشكل

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi r^3 \varepsilon_0} \qquad (2.5)'$$

التي ترينا أن الحقل ينطلق من الشحنة الموجبة وينتهي على الشحنة السالبة.

نرى من (2.3) أن القوة التي تمارسها الشحنة q على شحنة التجربة q' هي

$$\vec{F} = \frac{qq'\vec{e}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \qquad (2.6)$$

ونحصل على هذا الشكل على قانون كولون التجريبي القائل بتناسب القوة بين شحنتين طرداً مع جداء الشحنتين وعكساً مع مربع المسافة بينهما. رأينا في دروس الميكانيك (I.4§1) أن عمل القوى المتناسبة مع r^n $n \gtrless 0$ و $n \neq -1$ بين نقطتين 1 و 2 لا يتوقف على الطريق المتبعة وإنما على فرق قيمة الدالة الأصلية للعمل البدائي dW بين هاتين النقطتين

$$[W]_1^2 = \int_1^2 dW = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = U_1 - U_2 = -\Delta U \qquad (2.7)$$

سمينا الدالة التابعة للوضع، U، الطاقة الكامنة وقلنا إن عمل القوة $\vec{F}$ بين الوضعين 1 و 2 يساوي لتناقص الطاقة الكامنة، إن القوة مشتقة من كمون ومحافظة تعريفاً لأن انحفاظ الطاقة الكلية – وهي خاصة كونية ناتجة عن تجانس الزمن – لا يتحقق إلا بتحقق العلاقة (2.7). لتكن $X(x, y, z)$، $Y(x, y, z)$، $Z(x, y, z)$ مركبات القوة. ترينا (2.7) أن

$$\int_1^2 Xdx + Ydy + Zdz = -\int_1^2 dU = -\int_1^2 \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

وبالتالي فإن

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = -\vec{\nabla} U \equiv -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \qquad (2.8)$$

نرى بوضع (2.6) في (2.7) وإجراء المكاملة

$$\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_1^2 r^{-2}dr = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)_1^2 = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}r_1^{-1} - \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}r_2^{-1}$$

وهكذا فالطاقة الكامنة متناسبة عكساً مع المسافة بين الشحنتين المتفاعلتين عندما تتناسب القوة عكساً مع مربع المسافة

$$U = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (2.9)$$

نرى من العلاقتين السابقتين و(2.4)

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r} = q'\vec{E} = -q'\vec{\nabla}V \quad (2.8)'$$

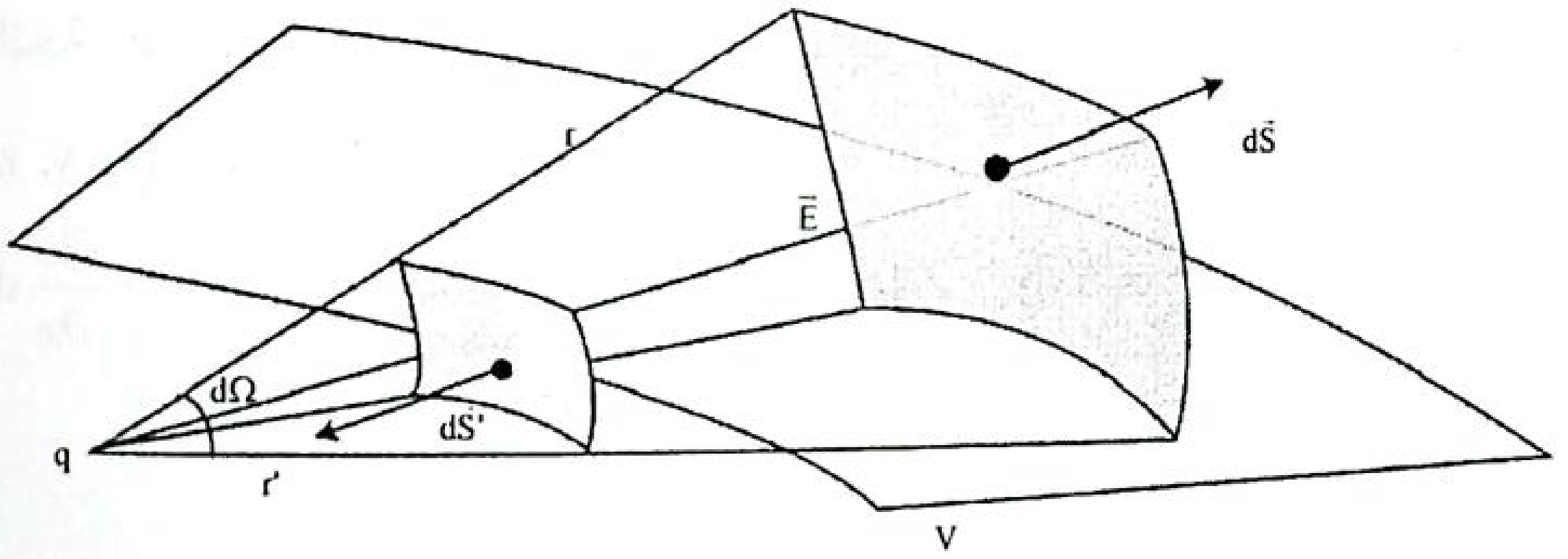
والكمون الكهربائي الذي تنتجه الشحنة q في نقطة تبعد عنها مسافة r هو

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (2.10)$$

وهو موجب أو سالب حسب إشارة الشحنة q.

2.2- تدفق الحقل الكهربائي

لتكن لدينا شحنة نقطية q ولنحسب تدفق الحقل الكهربائي عبر سطح حجم لا يحتوي على q، نقسم الحجم بمخروطات عنصرية رأسها في نقطة الشحنة q زاويتها المجسمة $d\Omega$ ونقطع الحجم بسطحين عنصريين dS و dS' ننظر إليهما بإهمال اللامتناهيات في الصغر من الدرجة الثانية كسطحي قطاعين كرويين، الشكل.10



الشكل.10

إن التدفق عبر السطوح الجانبية يساوي الصفر لأن $\vec{E}$ مواز لمولدات المخروط، ومن جهة ثانية فإن $dS = r^2 d\Omega$ و $dS' = r'^2 d\Omega$ ولدينا $EdS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} r^2 d\Omega$ وهو مستقل عن r. يُعدِم التدفقان عبر $d\vec{S}$ و $d\vec{S}'$ المتساويان بالقيمة المطلقة والمتعاكسان بالاتجاه بعضهما. والتدفق معدوم من أجل كل المخروطات العنصرية التي تشكل الحجم

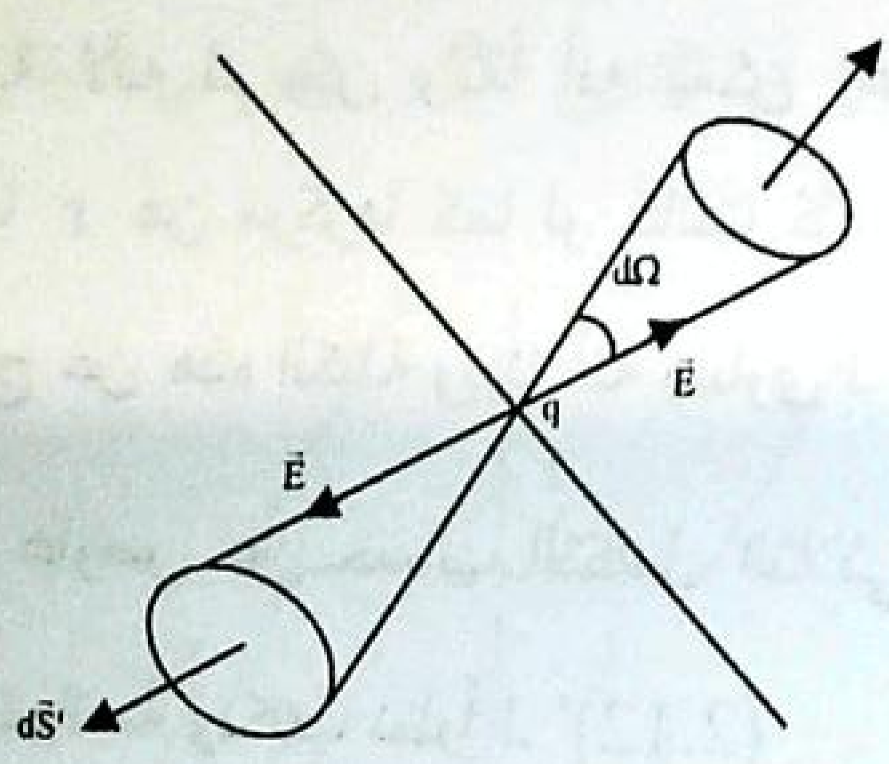
$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$= \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dV$$

حسب مبرهنة غاوص، وهكذا فإن تباعد $\vec{E}$ معدوم في كل نقطة من الحجم الذي لا يحتوي على الشحنة :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad (2.11)$$

يختلف الأمر عندما تقع الشحنة q داخل الحجم إذ تحدُّ المخروطات العنصرية المنطلقة منها سطوحاً متعاكسة، الشكل.11، والتدفق الناتج عن السطحين هو $\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$ ؛ نحصل على التدفق الكلي بمكاملة $d\Omega$ بين الصفر و 2π لنجد أنه يساوي $\frac{q}{\varepsilon_0}$



الشكل.11

وإذا كان في الحجم أكثر من شحنة نقطية فإن محاكمتنا تصح من أجل كل واحدة منها وتدفق الحقل الكلي هو مجموع التدفقات، والشحنة الكلية مجموع الشحنات

$$\iint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i \iint E \cdot dS = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0} \qquad (2.12)$$

يتحول الجمع الأخير إلى تكامل إذا كان توزع الشحنات متصلاً داخل الحجم، نرمز لكثافة الشحنة بـ ρ ونكتب (2.12) على الشكل

$$\iint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (2.12)'$$

إن السطح S هو سطح أي حجم يحتوي في داخله على الشحنات سواء كانت متصلة أو منفصلة ولا شيء يمنع من أخذه سطح حجم الشحنات بالذات وتطبيق مبرهنة غاوص لنجد أن

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (2.13)$$

بينت لنا العلاقة (2.5) أن معادلتي ماكسويل في الكهربائية الراكدة تؤدي إلى قانون كولون التجريبي الذي قامت عليه نظرية الكهربائية الراكدة وبينت العلاقتان (2.8) و(2.13) على العكس أن قانون كولون يبين أن $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ $(\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0)$ وأن $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ومنه

قضية 1 : إن الشرط اللازم والكافي لتحقيق معادلتي ماكسويل هو أن يكون الحقل الكهربائي متناسباً عكساً مع مربع المسافة التي تفصله عن الشحنة التي أحدثته (قانون كولون).

لقد كان من الممكن إذاً الانطلاق من قانون كولون التجريبي والمحسوس كما يفعل كثيرون واستخلاص معادلتي ماكسويل منه لكننا فضلنا العكس لأن قانون كولون يقتصر على الظواهر الكهربائية المستقلة عن الزمن في حين تبقى (2.1) ومعها مبرهنة غاوص صالحة على الدوام. لنذكر بالمناسبة أن نيوتن أجل نشر نظريته في الجاذبية الكونية لأنه لم يكن واثقاً أنه يمكن اعتبار القوة التي تمارسها كتلة كروية متجانسة في نقطة تبعد مسافة ما r عن مركزها كما لو كانت كل الكتلة مجمعة في المركز. حسبنا في (I.4.§4.2) كمون الجاذبية الناتج عن هذه الكتلة وبينا أنه يساوي لـ $-\frac{Gm}{r}$ حيث m كتلة الكرة وأن القوة بالتالي هي $-\frac{Gm}{r^2}$. تغنينا مبرهنة غاوص عن حساب التكامل الثلاثي بأن نأخذ كرة A نصف قطرها r أكبر من قطر الشحنة الكروية المتجانسة ونكتب نظراً لـ '(2.12)

$$\iint_{A\text{سطح}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (2.12)''$$

لنجد أن $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ كما لو أن كل الشحنة مجمعة في مركز الكرة A.

3.2– السطوح متساوية الكمون equipotential

لنعد إلى المعادلة (2.4)، المكافئة لمعادلة ماكسويل الثانية في الكهربائية الراكدة، التي تنص على اشتقاق الحقل الكهربائي، وكذلك القوة المتناسبة معه، من كمون : من دالة سلمية V تابعة للوضع الذي نحسب فيه الحقل $V(x, y, z) = V(\vec{r})$. تحدد المعادلة التالية :

$$V(x, y, z) = \text{ثابـــت} \qquad (2.14)$$

سطحاً في الفضاء لأن المتغيرات x, y, z لم تعد مستقلة عن بعضها، $z = f(x, y)$، نسميه السطح متساوي الكمون. نكتب تفاضل هذه المعادلة

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = 0$$

على الشكل

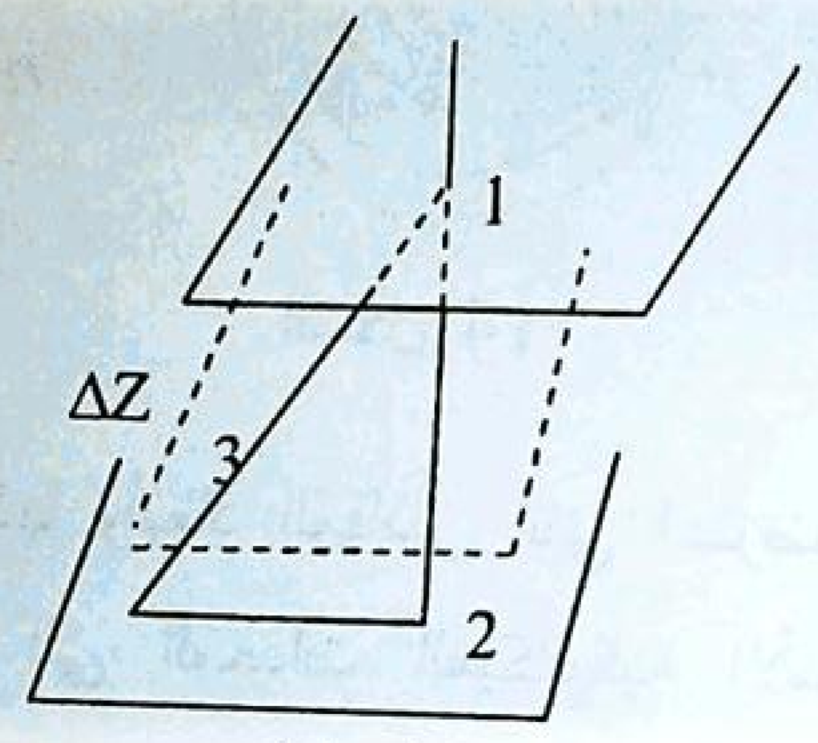
$$\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} d\vec{r} = 0 \qquad (2.15)$$

يقع العنصر التفاضلي على السطح متساوي الكمون وبالتالي فإن غراديان V، $\vec{\nabla} V \equiv \frac{\partial V}{\partial \vec{r}}$، عمودي عليه ومنه

قضية 2 :

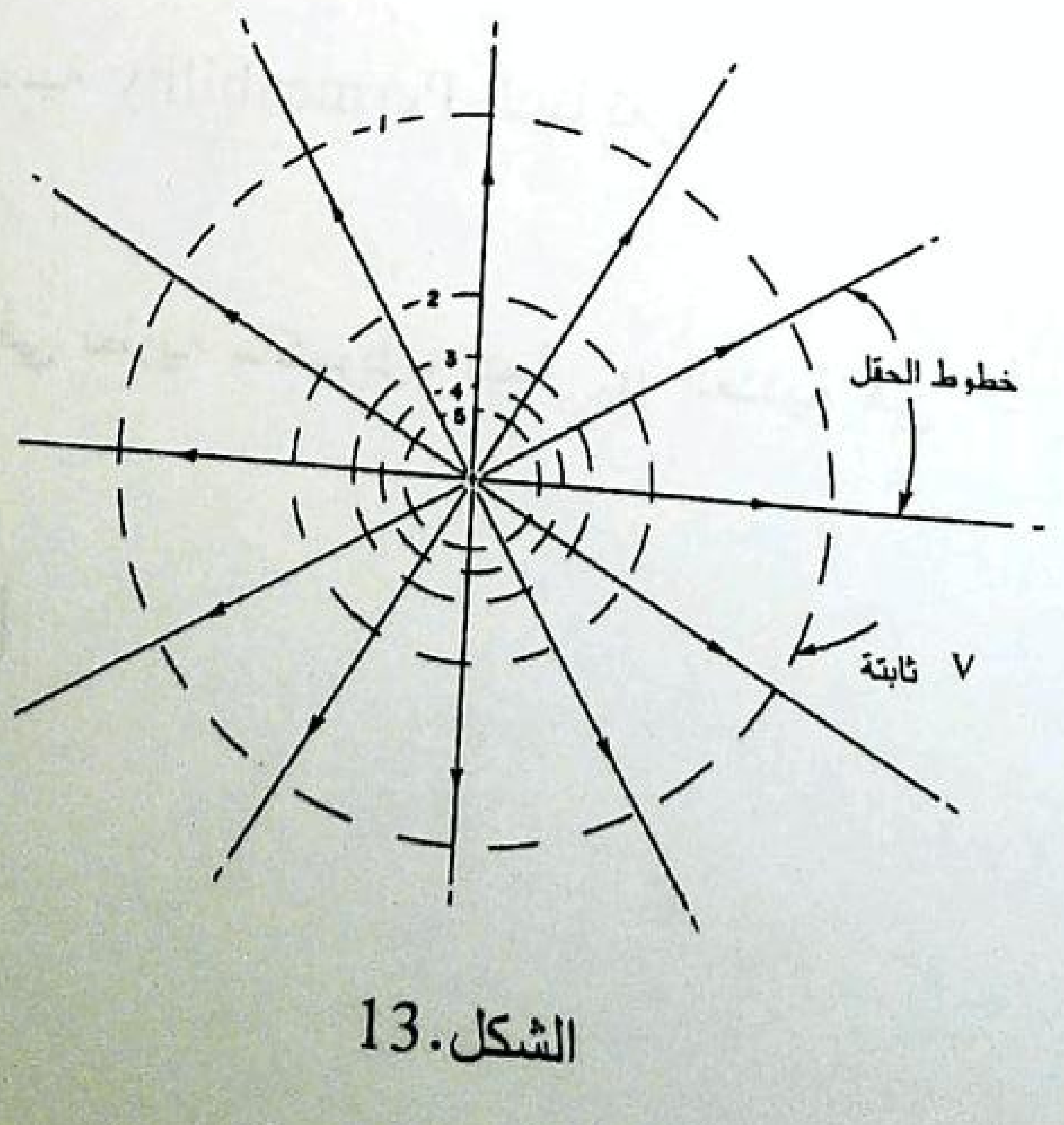
إن الحقل الكهربائي عمودي على السطح متساوي الكمون في كل نقطة من نقاطه.

لا بأس من التوقف قليلاً هنا لإعطاء معنى ملموس لمفهوم الغراديان ولنأخذ كمثال السطوح متساوية الكمون في حقل الجاذبية الأرضية إنها مستويات متوازية عمودية على اتجاه الشاقول في المنطقة التي نحسب فيها هذا الكمون. إن أسرع طريق لتغيير الكمون بالمقدار ΔZ هو الاتجاه العمودي (اتجاه حقل الثقالة) الانتقال من 1 إلى 2 لأن كل اتجاه آخر، الاتجاه المائل بين 1 و 3، يحدد تغير كمون أصغر من ΔZ، وهكذا فالغراديان هو الانحدار أو التدرج الأكبر وهو في ذات الوقت أقصر طريق للانتقال من 1 إلى 2، الشكل.12



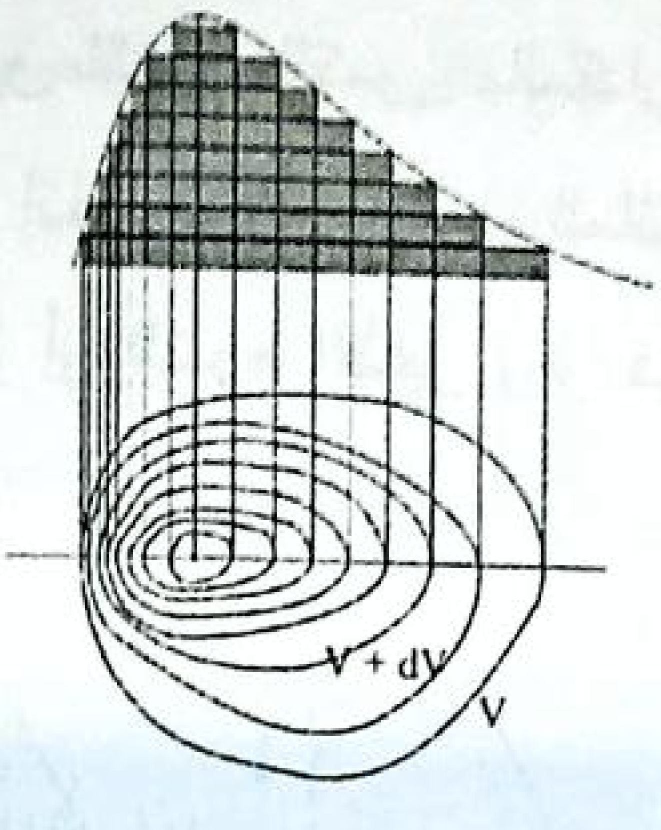
الشكل.12

إن السطوح متساوية الكمون الناتجة عن شحنة كهربائية نقطية q هي كرات مركزها q حسب (2.10)، والحقل الكهربائي عمودي على سطح الكرة في النقطة r، تنخفض شدته المتناسبة مع $\frac{1}{r^2}$ ولكن عدد خطوط القوة المتناسب مع شدة الحقل يبقى ثابتاً لأنه متناسب مع السطح المتناسب مع r^2 المحصور بين خطي قوة، الشكل.13، الذي يبين دائرات تقاطع هذه المستويات مع مستو مار من النقطة q.



الشكل.13

لنلاحظ بمقارنة (2.8) و(2.8)' أن الكمون الكهربائي هو طاقة واحدة الشحنة $q' = 1$ الموجودة في نقطة القياس. ولهذا فإن السطوح متساوية الكمون هي سطوح تساوي الطاقة الكامنة لواحدة الشحنات. يمكن تمثل السطوح متساوية الكمون كما تمثل منحنيات الارتفاع المتساوي على هضبة ما والنظر إلى العمودي على $V + dV$ كأقصر طريق للانتقال من $V + dV$ إلى V، الشكل.14



الشكل.14

لنعين أخيراً الوحدات التي سنستعملها وأبعاد المقادير التي اعترضتنا حتى الآن. ننظر إلى الشحنة الكهربائية كوحدة أساسية نضيفها إلى الوحدات الميكانيكية الأساسية ونستعمل النظمة KMTQ (كيلوغرام، متر، ثانية، كولون) المعروفة باسم النظمة الدولية. يجب والحال هذه تعيين أبعاد الثابتة ε_0 وقيمتها العددية. إن القيمة المقيسة لـ $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ هي 9×10^9 وأبعادها، حسب قانون كولون، هي

$$[\varepsilon_0] = \frac{[Q]^2}{[F][L]^2} = \frac{[Q]^2}{[M][L]^3[T]^{-2}} \qquad (2.16)$$

إنها أبعاد كولون مربع/نيوتن. متر مربع. يطلق على ε_0 اسم السماحية المطلقة للخواء Permittivity.
تدخل معادلة ماكسويل الرابعة ثابتة أخرى هي مقلوب الجداء $\varepsilon_0 C^2$، نرمز لها بـ μ_0

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 C^2}$$

وتسمى نفوذية الخواء المغنطيسية Permeability. لدينا تعريفاً

$$\varepsilon_0 \mu_0 C^2 = 1 \qquad (2.17)$$

وهي علاقة لعبت دوراً هاماً في نظرية ماكسويل، قيمة μ_0 العددية هي $\frac{4\pi \cdot 9\cdot10^9}{9\cdot10^{16}} = \frac{4\pi}{10^7}$ وأبعادها هي انطلاقاً من (2.16)

$$[\mu_0] = \frac{[M][L]}{[Q]^2} \qquad (2.18)$$

أبعاد الجقل الكهربائي هي أبعاد قوة مقسومة على بعد الشحنة ويقاس إذاً في الوحدات التي اخترناها بالنيوتن/كولون. وبما أن الكمون هو طاقة مقسومة على الشحنة فيقاس بالجول/كولون ويطلق على هذه الوحدة اسم الفولت وبما أن أبعاد الحقل الكهربائي هي $[E] = [V]/[L]$ فوحدته هي $\frac{\text{فولت}}{\text{متر}}$:

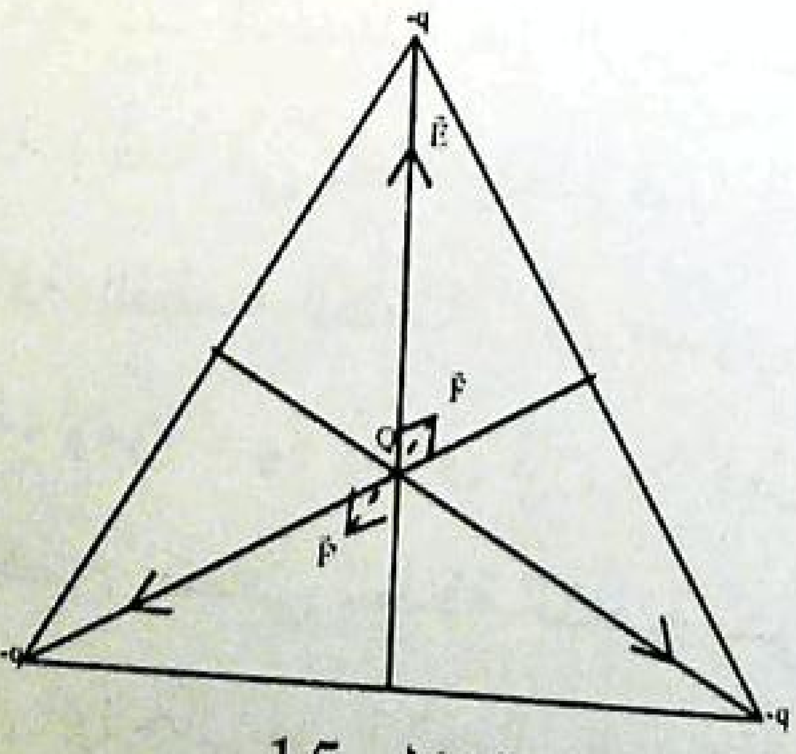
$$[V] = \frac{[M][L]^2[T]^{-2}}{[Q]} \qquad (2.19)$$

$$[E] = \frac{[M][M]T^{-2}}{Q} \qquad (2.20)$$

لنذكر من جديد أن الشحنة الكهربائية مكممة وأن أصغر شحنة هي شحنة الإلكترون (المساوية بالقيمة المطلقة لشحنة البروتون)، – وهي $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{3}$ من هذه الشحنة إذا نظرنا إلى الجسيمات تحت النووية – وتساوي $1,6 \cdot 10^{-19}$ كولون وتقاس الطاقة في حالة الجسيمات بالإلكترون فولت.

4.2– التوازن الكهربائي الراكد

لنبدأ بالنظر إلى الحالة التالية لتوازن ثلاث شحنات سالبة ومتساوية تحتل رؤوس مثلث متساوي الأضلاع موضوع أفقياً – لإهمال مفعول الثقالة – مع شحنة موجبة ما. الجواب سهل طبعاً : يكفي أن تكون الشحنة الموجبة في مركز المثلث، في نقطة تلاقي المنصفات الثلاث على بعد ثلث المنصف من القاعدة والثلثين من الرأس. واضح أن حصيلة القوى الثلاثة المؤثرة على Q تساوي الصفر وهو شرط لازم لوقوع التوازن الميكانيكي ولكنه غير كاف كما نعلم، لأن شرط التوازن المستقر اللازم والكافي لحركة جسم ما في حقل قوى هو أن تكون الطاقة الكامنة U أصغرية في نقطة التوازن : حصيلة القوى مساوية للصفر $(\vec{\nabla}U = 0)$ والمشتق الثاني موجب $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}U > 0$. سنعود إلى حساب هذا المشتق فيما بعد مكتفين هنا بملاحظة أن إزاحة الشحنة Q عن مركز المثلث إزاحة صغيرة بتطبيق قوة $\vec{F}$ عليها، اتجاهها لا على التعيين، يخرجها نهائياً عن حالة التوازن لعدم وجود قوة $\vec{F}'$ معاكسة لـ $\vec{F}$، الشكل.15، وهذا تعريفاً هو التوازن غير المستقر.



الشكل.15

في حالة التوازن المستقر هو أن تكون حصيلة القوى المطبقة يجب إذاً لكي تكون شحنة موجبة ما Q في حالة التوازن المستقر هو أن تكون حصيلة القوى المطبقة مساوية للصفر أو $\vec{E}=0$ وأن يكون هذا الحقل المنعدم مجموع حقول في كل الاتجاهات انطلاقاً من Q بحيث يقابل كل انزياح في اتجاه ما نتيجة فعل الحقل $\vec{E}_1$ مثلاً فعل الحقل المقابل $\vec{E}_2$ الذي يعيد الشحنة إلى وضع التوازن.

لكن هذين الشرطين متناقضان حسب مبرهنة غاوص، فالشرط الأول $\vec{E}=0$ يعني أن $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ وأنه لا وجود للشحنة Q بينما يعني الثاني أن تدفق الحقل عبر سطح ما، كروي مثلاً، مختلف عن الصفر مهما صغر نصف قطر هذه الكرة. يزول هذا التناقض إذا فرضنا وجود شحن سالبة قريبة قدر ما نريد من الشحنة الموجبة – ملتصقة بها إن شئنا، بحيث يتحقق

$$\iint \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q - \iint d\vec{S}q = 0$$

وبحيث تتجه كل القوى الفاعلة في Q نحو هذه النقطة، أي أن $\iint \vec{F}\cdot d\vec{S} < 0$ و

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} < 0 \qquad (2.21)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}U\right) < 0$$

وهو ما يحقق شرط التوازن الثاني $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}U\right) > 0$.

لنطبق هذه المحاكمة على حالة شحنتين متساويتين مرتبطتين ببعضهما بشكل صلب، بأن تقعا على نهايتي قضيب على سبيل المثال، واقعتين في حقل كهربائي راكد. ليكن $\vec{E}_1$ هذا الحقل في النقطة التي تقع فيه الشحنة الأولى q_1 و $\vec{E}_2$ في النقطة التي تقع فيها الشحنة الثانية q_2، لدينا القوة المؤثرة على الشحنتين

$$\vec{F} = q_1\vec{E}_1 + q_2\vec{E}_2$$

و

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = q_1\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_1\right) + q_2\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_2\right) \neq 0$$

أما في حال غياب الحقل الكهربائي الراكد فإن

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0$$

وشرط التوازن (2.21) غير محقق : يستحيل بقاء هاتين الشحنتين في حالة توازن مستقر.

يمكن تعميم هذه المحاكمة على كل الحالات المستقلة عن الزمن، لننظر إلى حالة تفاعل تيار مستمر مع شحنة ساكنة. لنفرض أن هذه الشحنة واقعة في نقطة ينعدم فيها الحقل الكهربائي $\vec{E}$؛ إن إزاحة الشحنة عن وضع التوازن يعني تناقص طاقة النظمة الكامنة لأن تساوي $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$ وازدياد قيمة الحقل هي نقصان الطاقة الكامنة، هذا من جهة، ومن جهة أخرى فإن رد فعل حركة الشحنات في التيار المستمر هو في النزوع نحو التوازن أي في تناقص إضافي للطاقة الكامنة لكي تصبح أصغرية والنتيجة أن الشحنة المزاحة عن وضع التوازن لن تعود في أي حال من الأحوال إلى هذا الوضع والتوازن غير مستقر.

سنضع إذاً القضية التالية، التي هي في واقع الأمر لازمة لمبرهنة غاوص

قضية 3 :

يستحيل تصور المادة المشحونة كهربائياً، المكونة من البروتونات والإلكترونات، كشحنات ساكنة خاضعة لقوانين الكهربائية الراكدة.

كان أول تصور لبنية الذرة أقرب ما يكون إلى نموذج الشحنة من إشارة ما المحاطة بشحنات من إشارة مختلفة لتكوين ذرة حيادية، إنه نموذج طومسون مكتشف الإلكترون J.J. Thomson (1904) : شحنة ساكنة سالبة (مجموعة الإلكترونات) وسط كرة من الشحنات الموجبة الموزعة توزعاً متجانساً في كل الكرة. لم يدم هذا النموذج لأكثر من خمس سنوات إذ جاءت تجربة كايكر ومارسدن Geiger, Marsden لتثبت أن الشحنة الموجبة مكثفة ومتمركزة في ما أسماه روذرفورد Rutherford النواة ثم وضع نموذج الذرة على غرار النظمة الشمسية : شحنة موجبة (النواة) تدور الشحنات السالبة حولها حسب قانون كولون – نموذج روذرفورد وبور Bohr. ولكن هذا النموذج غير مستقر لأن قوانين الكهربائية الراكدة غير كافية لدراسته.

فالإلكترونات، حالها حال الكواكب في النظمة الشمسية، تتسارع وتتباطأ حسب قانون كبلر الثاني، تناسب السطوح مع الأزمنة اللازمة لقطعها، ولكنها خلافاً للكواكب، تصدر إشعاعاً يجعلها تقترب من النواة شيئاً فشيئاً لتسقط عليها والذرة غير مستقرة حسب هذا النموذج. لقد بنينا دراستنا للميكانيك الكمومي على عدم موائمة هذا النموذج للواقع : استقرار الذرة.

3. حساب الحقل الكهربائي

1.3– حالة التناظر

أ– الحقل الناتج عن شحنة طولانية :

ليكن لدينا سلك مشحون بشكل متجانس ولامتناه بالطول، سلك رفيع عملياً تهمل أبعاد مقطعه أمام طوله كما تهمل مفاعيل طرفيه؛ ولتكن λ كثافة الشحنة الخطية – شحنة واحدة الطول. إن الحقل عمودي على السلك (تناظر أسطواني) إذ إن المركبات الموازية للسلك تعدم بعضها بعضاً، الشكل.16. نتصور أسطوانة، نصف قطر قاعدتها r، مولداتها موازية للسلك المنطبق على محورها وطولها مساو لواحدة الطول. لدينا بتطبيق مبرهنة غاوص

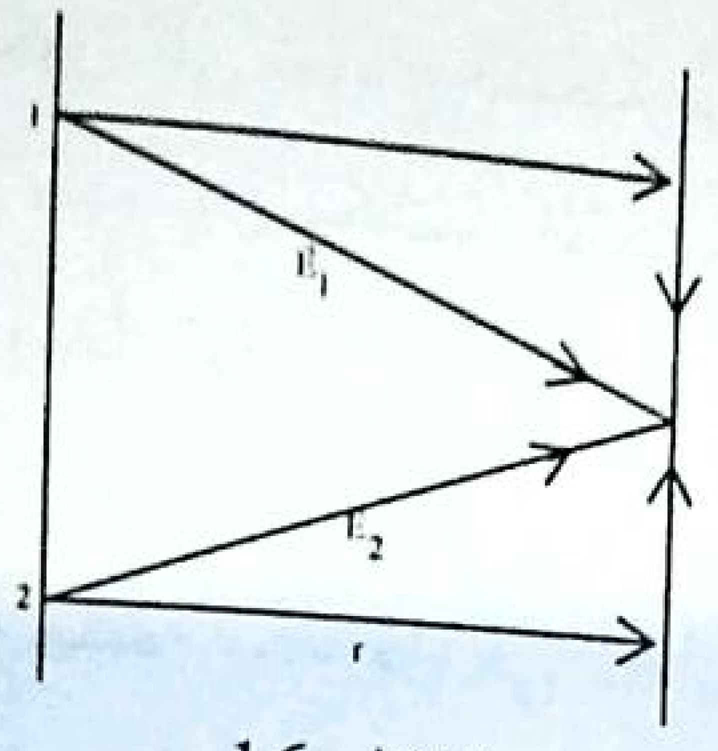
$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 2\pi r = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}$$

ومنه الحقل

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad (3.1)$$

المشتق من الكمون

$$V = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Lnr$$



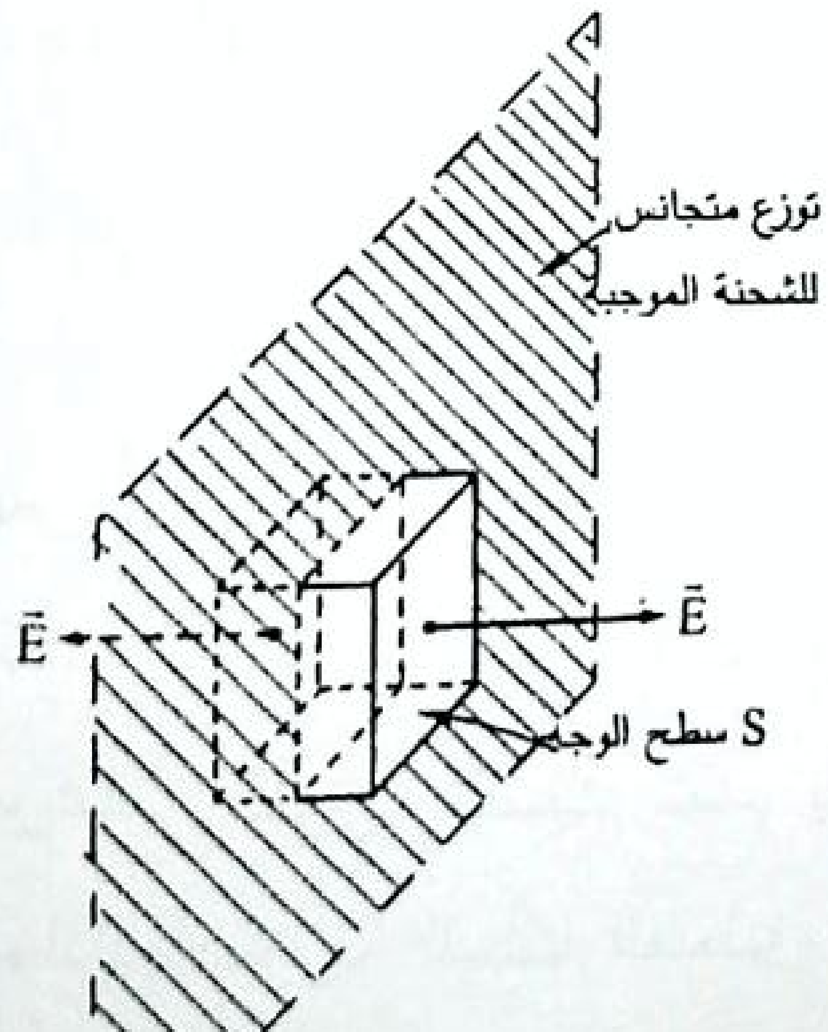
الشكل.16

لا يختلف الحساب في شيء عندما نستبدل الشحنة الخطية بكثافة شحنة ρ على أن يبقى نصف قطر السلك a مهملاً أمام نصف قطر قاعدة الأسطوانة r. لدينا

$$V = \frac{-\rho}{2\pi\varepsilon_0} Lnr \qquad (3.1)'$$

ب- الحقل الناتج عن مستوى مشحون :

لنفرض المستوى لامتناه في الأبعاد والشحنة موجبة وموزعة توزعاً متجانساً على سطح المستوي، لتكن σ كثافة الشحنة السطحية. إن الحقل عمودي على المستوي بالتناظر كما في الحالة السابقة نتصور سطحاً مغلقاً على شكل متوازي مستطيلات وجهان منه موازيان للمستوي ومتناظران بالنسبة له، الشكل.17a.



الشكل.17a

إن تدفق الحقل هو عبر هذين السطحين وحدهما. ليكن S سطح الوجه، لدينا بتطبيق مبرهنة غاوص

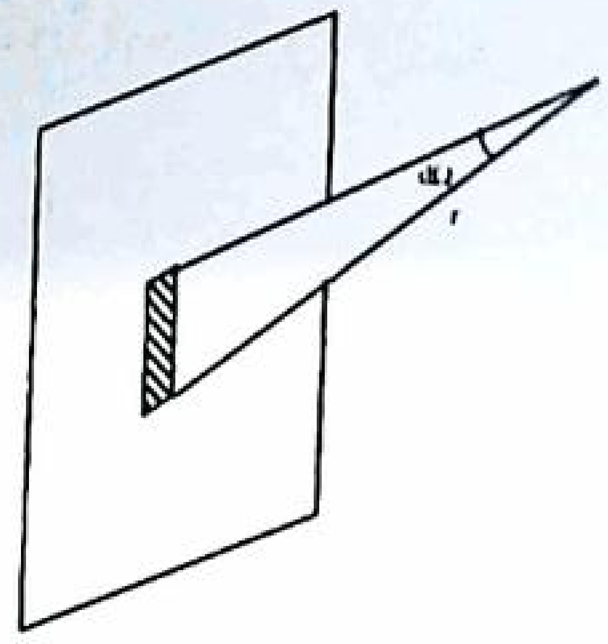
$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

ومنه

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (3.2)$$

نرى إذاً أن الحقل متجانس في كل الفضاء، لا تتوقف قيمته على بعده عن المستوي. لنلاحظ أنه يمكن حساب الحقل انطلاقاً من قانون كولون التجريبي، إنه $\frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ من أجل كل عنصر سطح dS من المستوي، في النقطة التي تبعد المسافة r عن هذا العنصر. نرى عنصر السطح من النقطة r عبر زاوية مجسمة $d\Omega$، الشكل.17b، ويساوي لـ $r^2 d\Omega$. نحصل على قيمة الحقل بالمكاملة على كل الزوايا المجسمة على يمين المستوي أي بين 0 و 2π ومنه

$$\int \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\sigma r^2 d\Omega}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



الشكل.17b

ج- الحقل الناتج عن كرة مشحونة أو سطح كرة :

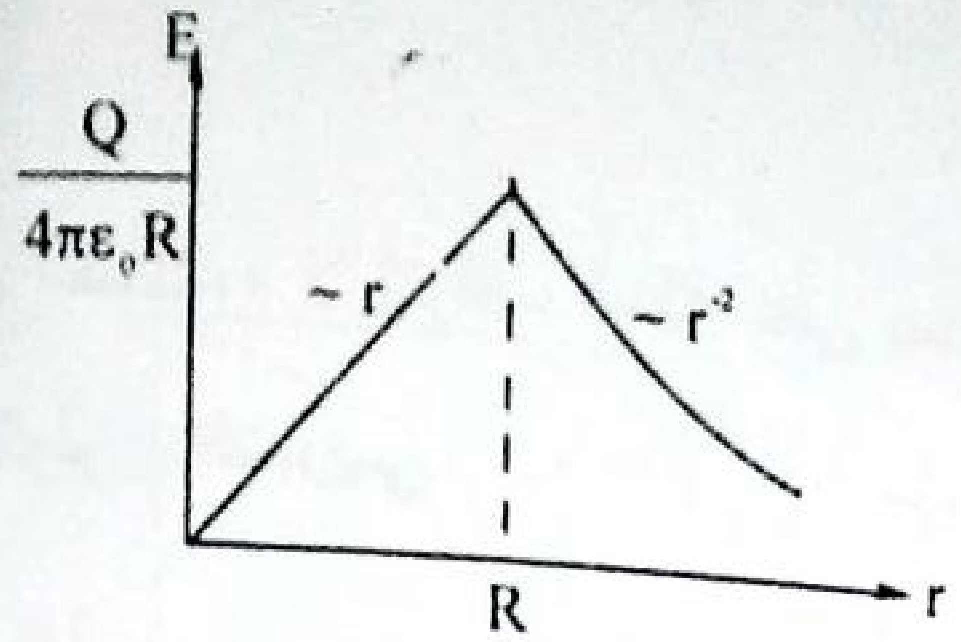
رأينا أن الحقل الأول في نقطة تبعد مسافة r عن مركز الكرة هو كما لو كانت الشحنة متمركزة في مركز الكرة "(2.12) وأن مبرهنة غاوص تغنينا عن إجراء التكامل كما في الحالتين السابقتين. لا تختلف المحاكمة في شيء عندما نريد حساب الحقل في نقطة ما داخل الكرة، حساب الحقل داخل نواة الذرة على سبيل المثال. لتكن ρ كثافة الشحنة الثابتة، نظراً للتوزع المتجانس للشحنة، لدينا في أي نقطة داخل الكرة، تبعد عن مركزها المسافة r

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0} r^3 \rho$$

ومنه

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \qquad (3.3)$$

وهكذا فالحقل متناسب مع المسافة عن المركز داخل الكرة وعكساً مع مربع المسافة خارجها ويحدث انقطاع في تغيرات قيمته (انقطاع في المماس على المنحني) من أجل $r = R$ حيث R نصف قطر الكرة، الشكل.18



الشكل.18

لا تفرق المحاكمة بين وجود الشحنة في مركز الكرة أو توزعها توزعاً متجانساً في كل الحجم أو توزعها على طبقة رقيقة قدر ما نريد على سطح الكرة. إن الشحنة الكلية عندما تكون موزعة توزعاً متجانساً على سطح الكرة التي نصف قطرها R هي $Q = 4\pi R^2\sigma$ والحقل في النقطة $r \rangle R$ هو

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi R^2\sigma}{\varepsilon_0}$$

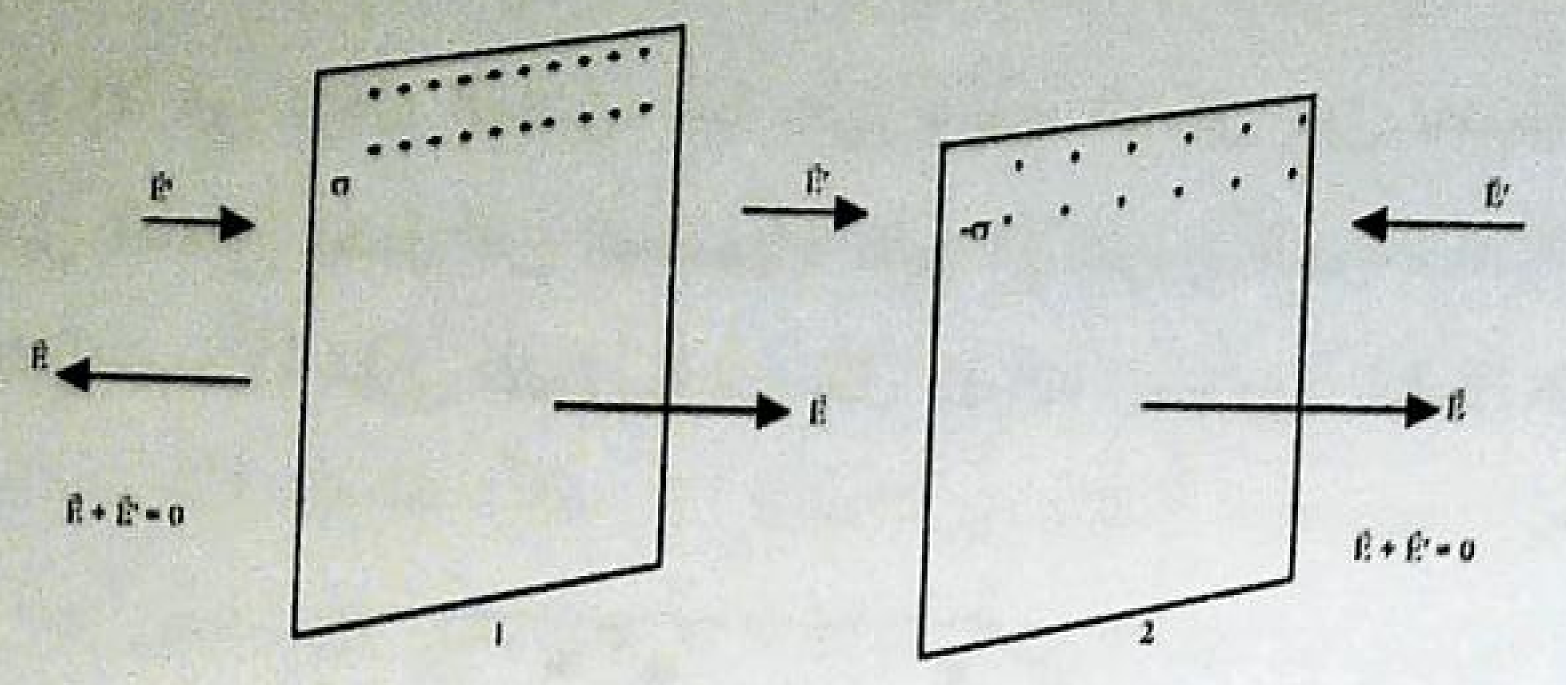
$$E = \frac{R^2}{\varepsilon_0 r^2}\sigma \qquad (3.4)$$

أما في داخل الكرة فالحقل معدوم.

د- الحقل الناتج عن مستويين مشحونين متوازيين شحنة أحدهما موجبة وكثافتها σ والأخرى سالبة وكثافتها $-\sigma$:

رأينا أن شدة الحقل لا تتوقف على البعد عن المستوي، أما اتجاه الحقل على طرفي المستوي المشحون سالباً، رمزنا له بـ E' فمخالف لاتجاه الحقل المشحون موجباً، رمزنا له بـ E، فالأول يتجه نحو المستوي والآخر يبتعد عنه؛ وهكذا فالحقلان يعدمان بعضهما خارج هذين المستويين بالتوضيع – على يسار المستوي 1 ويمين المستوي 2، الشكل.19 – والحقل بين المستويين هو مجموع الحقلين، فهو حسب (3.2)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (3.5)$$



الشكل.19

ويتجه من الشحنة الموجبة نحو الشحنة السالبة.

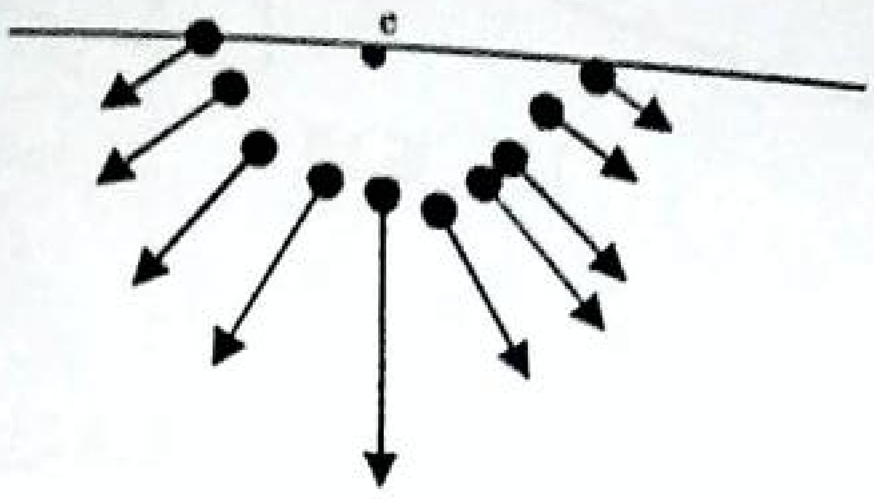
2.3- حقل الموصلات (النواقل)

إن ما يميز الأجسام الصلبة هو تقارب ذرات هذه الأجسام من بعضها تقارباً كبيراً. إن أبعاد الجسيمات المكونة للنواة، البروتونات والنوترونات هي من رتبة 10^{-15} متراً (الفيرمي) وأبعاد الذرة هي بحدود 10^{-10} متراً أي أكبر بمئة ألف من أبعاد مكونات النواة، وهو الأمر الذي حدا بروذرفورد وبور لوضع نموذج للذرة يحاكي نموذج النظمة الشمسية. أما المسافات بين الذرات فتتراوح بين 10^{-7} متراً من أجل الغاز في الشروط الطبيعية للحرارة والضغط و 10^{-10} متراً، أي من رتبة أبعاد الذرة، من أجل الأجسام الصلبة. ولذا تتفاعل الذرات تفاعلاً قوياً فيما بينها يعبر عنه تماسك الجسم الصلب وخواصه الميكانيكية الأخرى. إن لكل الأجسام الصلبة إلكترونات طبعاً ومع ذلك لا يمكن النظر إليها دوماً كإلكترونات حرة تستطيع الحركة في اتجاه الحقل الكهربائي وتوصل الكهرباء. فبعض الأجسام الصلبة (المعادن) موصل جيد للكهرباء والبعض الآخر عازل لا يحتوي على هذا النوع من الإلكترونات ولا يوصل الكهرباء. نقيس قابلية التوصيل بتعيين مقاومة الجسم للحقل الكهربائي، تتراوح هذه المقاومة بين 10^{-8}أوم Ohm/سم في المعادن و 10^{22} في جسم عازل كالألماس. إن النسبة 10^{30} بين مقاومة العازل ومقاومة المعدن هي أعلى نسبة تبلغها خاصة من خواص الجسم الصلب.

يعود وجود الإلكترونات الحرة في المعادن إلى كونها بعيدة بعداً كبيراً عن نواة الذرة التي تنتمي إليها – بحيث لا يختلف تفاعلها مع نواتها عن تفاعلها مع نويات الذرات المجاورة. تعدم هذه الإلكترونات التعادل – التفاعلات بعضها بعضاً وتترك الإلكترون حراً. يتحرك الإلكترون الحر في منحى الحقل عند تطبيق حقل كهربائي على المعدن.

يتراوح الكمون الذي يقع فيه الإلكترون بين $\frac{Z|e|}{4\pi\varepsilon_0 r}$ عندما يكون قريباً من النواة، حيث $Z|e|$ شحنة النواة و $\frac{|e|}{4\pi\varepsilon_0 r}$ عندما يكون بعيداً عنها، إذ يتفاعل مع النواة والإلكترونات الأخرى. لا يصح التناظر بين

مفاعيل الذرات المجاورة إلا في داخل المعدن، أما على سطح المعدن فإن حصيلة القوى المؤثرة على الإلكترون ما عمودية على السطح تجعل من المستحيل على الإلكترون الحر مغادرة السطح ما لم تطبق عليه قوة، قوة القلع، تعادل حصيلة القوى الممارسة من قبل الذرات المجاورة، الشكل.20



الشكل.20

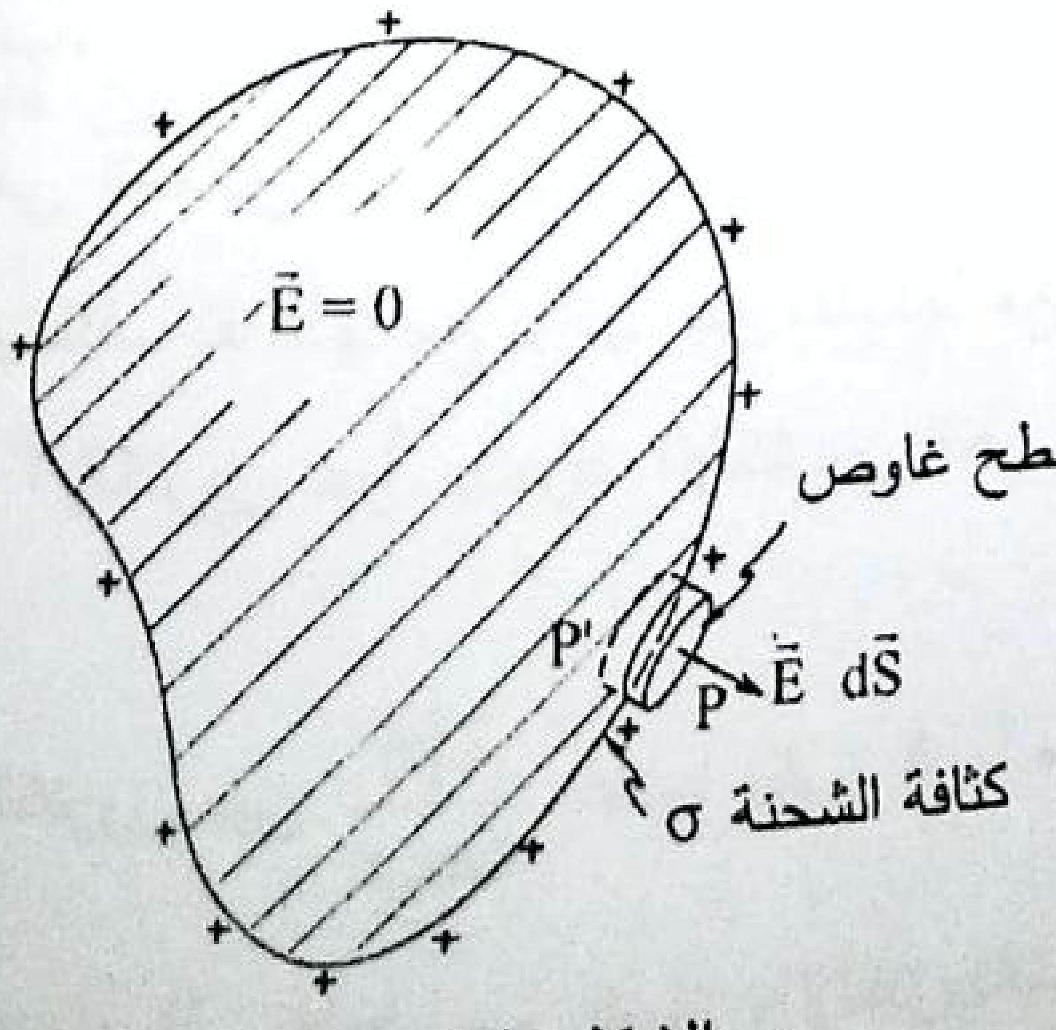
لا توجد حركة جماعية للإلكترونات الحرة عندما لا نطبق الحقل الكهربائي على الجسم الصلب فهي إما ساكنة، أو متحركة في مختلف الاتجاهات بحيث تكون الحركة الوسطية مساوية للصفر. نقول عندئذ إن الموصل في حالة التوازن الكهربائي، وشرط التوازن إذاً هو أن يكون الحقل الكهربائي $\vec{E}=0$ داخل الموصل ومنه

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad (3.6)$$

والكثافة الحجمية للشحنة $\rho = 0$: يتساوى عدد الشحنات الموجبة وعدد الشحنات السالبة في كل عنصر حجمي من الموصل. وهكذا فإن شحنة الموصل (المعدن) المتوازن شحنة سطحية لا غير. إن ثبات $\vec{E}$ داخل المعدن $(\vec{E}=0)$ يعني أن الكمون الكهربائي V ثابت في داخل الجسم الصلب (المعدن) وسطحه سطح متساوي الكمون : الحقل عمودي على السطح في حالة التوازن وإلا لتحركت الإلكترونات على هذا السطح وانكسر التوازن. نرى بسهولة بتطبيق مبرهنة غاوص وملاحظة أن الحقل معدوم داخل الناقل أن

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e} \qquad (3.7)$$

حيث $\vec{e}$ المتجهة الواحدية على سطح الموصل، الشكل.21



الشكل.21

لنلاحظ أنه من الممكن دوماً النظر إلى السطح الكلي لجسم مشحون كمستو لامتناه في الكبر وتطبيق العلاقة (3.2) لحساب الحقل في جوار سطح لامتناه في الصغر؛ لكن الأمر هنا هو أن الحقل في داخل المعدن معدوم. إن ما يعدم هذا الحقل في النقطة P' مثلاً، الشكل.21، هو الحقل الناتج عن كل الشحنات على سطح المعدن ما عدا الشحنة الواقعة على السطح dS. ليكن هذا الحقل $\vec{E}'$، لدينا، في النقطة P' آخذين بعين الاعتبار (3.2)

$$\vec{E}' - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e} = 0$$

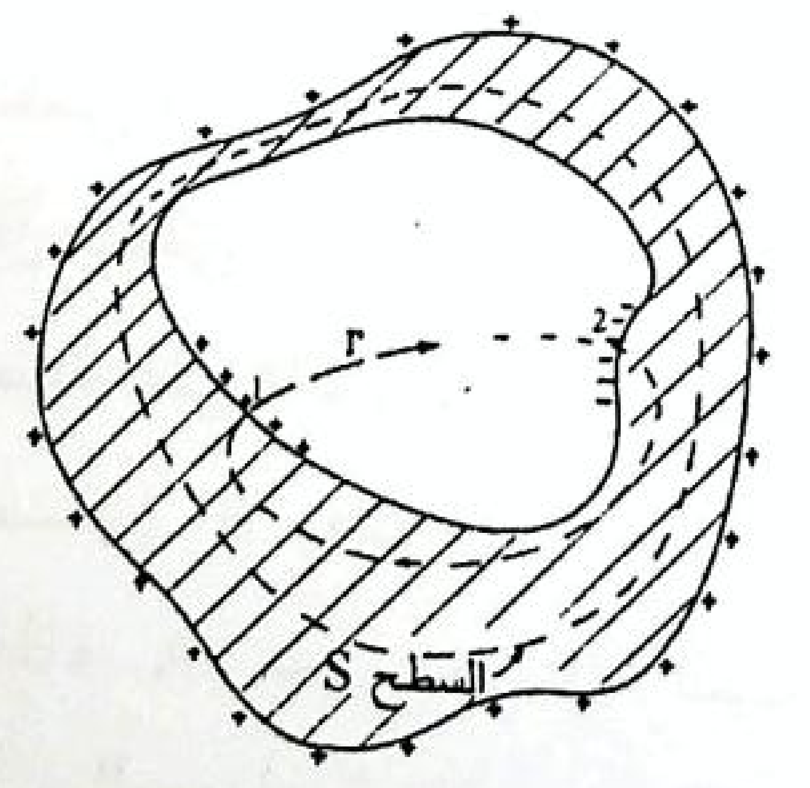
والحقل في النقطة P هو هذا الحقل $\vec{E}'$ مضافاً إلى الحقل الذي حسبناه في (3.2)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}$$

لنجد (3.7).

لنفرض الآن أن المعدن مجوف وأنه لا توجد شحنات داخل التجويف ولكن ماذا عن السطح الداخلي للمعدن، سطح التجويف؟ لنأخذ سطحاً S واقعاً داخل المعدن يحيط إحاطة تامة بالتجويف، الشكل.22، الحقل مساو للصفر داخل المعدن والتدفق عبر S معدوم وبالتالي فإن شحنة سطح التجويف معدومة. لا تستطيع مبرهنة غاوص أن تزيدنا علماً عن وجود شحنات على سطح التجويف قيمتها الجبرية تساوي الصفر؛ لابد لنا من الرجوع إلى مبدأ الكهربائية الراكدة الثاني $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ أو $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ ولنتصور منحنياً مغلقاً Γ يقع قسم منه داخل المعدن والقسم الآخر داخل التجويف. فلو وجدت شحنات موجبة في منطقة ما من السطح وشحنات سالبة في منطقة مقابلة لتعين اتجاه الدوران على Γ من النقطة 1 إلى النقطة 2 على هذا السطح و $\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$. لكن التكامل داخل المعدن يساوي الصفر لانعدام الحقل فيه ويبقى إذاً دوران الحقل في التجويف

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

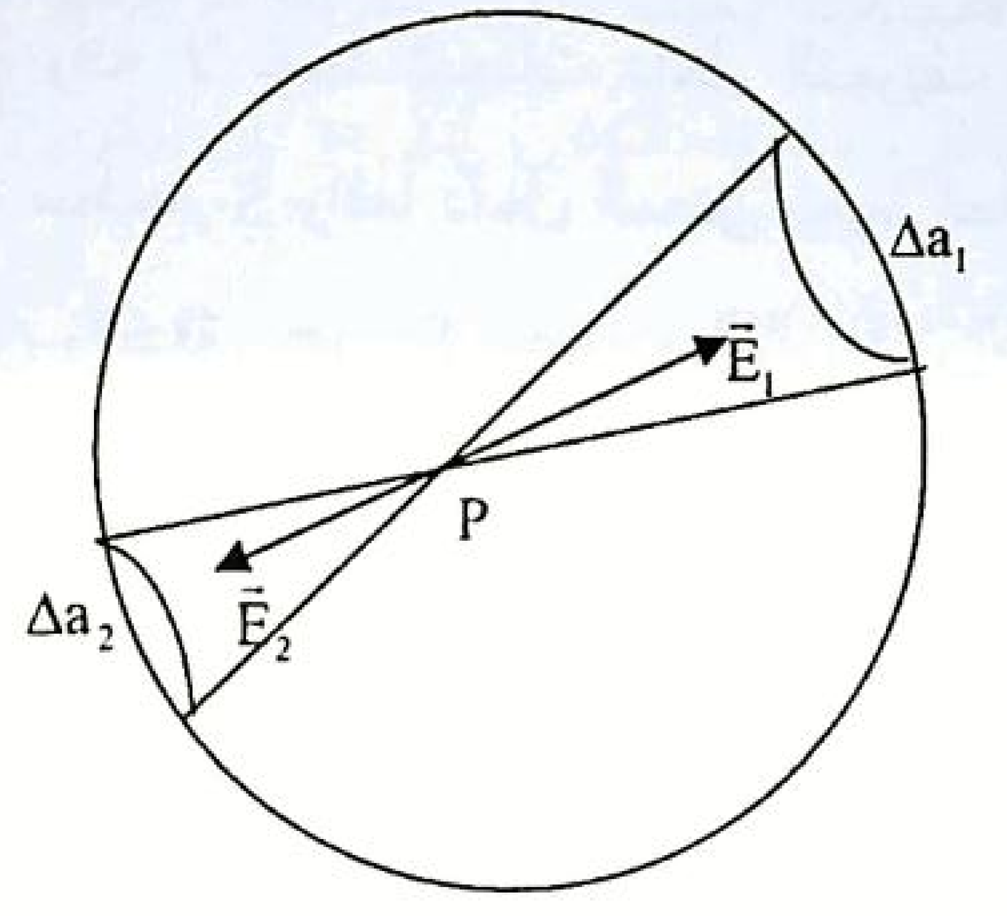


الشكل.22

على سطحه. هذا يعني أن الحقل يساوي الصفر في كل نقطة من نقاط التجويف ولا وجود للشحنات على سطحه. هذا يعني أن الحقل يساوي الصفر في كل نقطة من نقاط التجويف حيث سيبقى الحقل فيه مساوياً للصفر؛ وهذا هو مبدأ توزع الحقل خارج الموصل لا يؤثر على التجويف حيث سيبقى الحقل فيه مساوياً للصفر؛ وهذا هو مبدأ وقاية الأجهزة الكهربائية بوضعها في قفص كهربائي.

وهكذا فإن انعدام الحقل داخل التجويف مثله مثل انعدام الحقل داخل كرة سطحها مشحون ناتج عن مبدأي الكهربائية الراكدة معاً، المكافئين لقانون كولون كما رأينا. يكفي للتحقق من ذلك من جديد تصور مخروطين، رأسهما P داخل الكرة، يحددان السطحين Δa_1 و Δa_2 على الكرة والشحنتين Δq_1 و Δq_2 عليهما المتناسبتين مع السطحين، $\Delta q = \sigma \Delta a$، الشكل.23. وبما أن $\Delta a = r^2 \Delta\Omega$، $\Delta\Omega$ عنصر الزاوية المجسمة فإن نسبة قميتي الحقلين المطلقة الناتجين عن Δa_1 و Δa_2 (متعارضي الاتجاه) هي

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\Delta q_1/r_1^2}{\Delta q_2/r_2^2} = \frac{\dfrac{\sigma r_1^2 \Delta\Omega}{r_1^2}}{\sigma r_2^2 \Delta\Omega / r_2^2} = 1$$

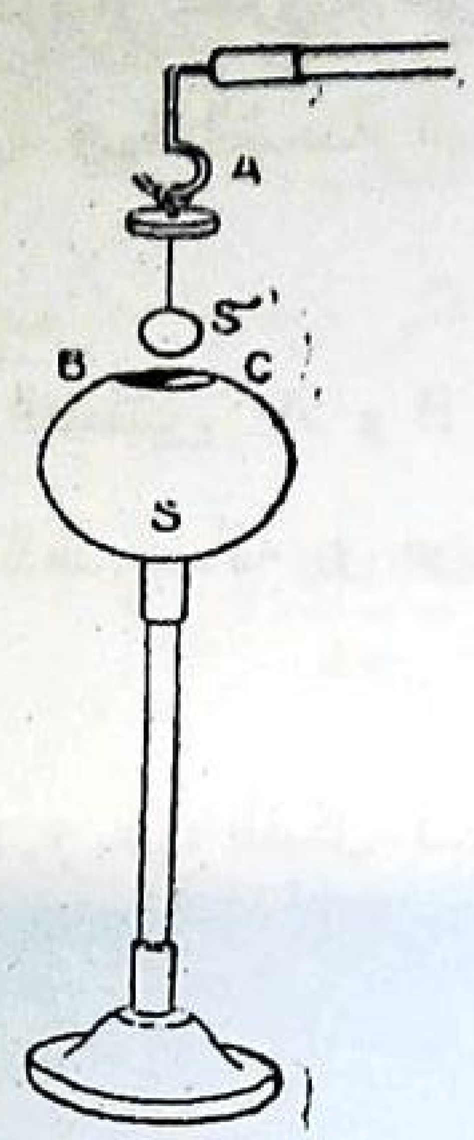


الشكل.23

والحقل الناتج عنهما معاً معدوم. وهو أمر لا يمكن أن يتحقق لو لم يكن الحقل متناسباً عكساً مع مربع المسافة : إن كل تحقق من مبدأي الكهربائية الراكدة – انعدام الحقل داخل الكرة المشحونة مثلاً – هو تحقق من قانون كولون، مع فارق أساسي في الدقة بين هذين التحققين؛ فالخطأ النسبي للتحقق من قانون قوة يقارب الـ 10 بالمئة في حين يمكن التحقق من انعدام الحقل بخطأ لا يتجاوز 10^{-6}.

لتكن لدينا كرة معدنية مجوفة S محمولة على قاعدة عازلة وتحدها فتحة BC، الشكل.24، يمكن إغلاق BC بواسطة غطاء A يحمل كرة صغيرة 'S معلقة إليه بواسطة خيط عازل. نشحن الكرة 'S وندخلها داخل S ونغلق الفتحة بواسطة الغطاء A. نميل بعد ذلك الجهاز إلى أن تتماس الكرتان 'S و S وتصبح 'S جزءاً من السطح الداخلي للموصل المؤلف من الكرتين. تتفرغ 'S وتتوزع شحنتها على السطح الخارجي لـ S. نعيد الجهاز إلى وضعه الشاقولي ونرفع الغطاء A بواسطة قضيب عازل من

الزجاج، ومعه الكرة 'S دون أن تمس هذه الأخيرة جوانب الفتحة BC. نتحقق من كون شحنة 'S تساوي الصفر بجعلها تمس الإلكترومتر.



الشكل.24

إن صلاحية قانون كولون صلاحية كونية، بمعنى أنه محقق لا في الأبعاد الجهرية فحسب بل في الأبعاد اللامتناهية في الكبر والأبعاد اللامتناهية في الصغر، الذرية وتحت الذرية. صحيح أن مفهوم المسار مرفوض على المستوى الذري ومعه مفهوم القوة، ولكن الهاميلتوني الذي يعين حركة الإلكترون حول النواة هو هاميلتوني كولومبي بمعنى أن الطاقة الكامنة متناسبة مع $\frac{1}{r}$ وهو أمر محقق تجريبياً كما سنرى في المجلد القادم (IV.9.§4.4) إذ اعتمد قياس لامب وروذرفورد لرصد فرق طاقة بين مستويي طاقة لذرة الهدروجين على كمون متناسب مع $\frac{1}{r}$ وبدقة تبلغ الواحد إلى مليون. ويبقى الكمون الكولومبي صالحاً في إطار الميكانيك الكمومي لدراسة تفاعل الإلكترونات مع النواة على ألا يتجاوز العدد الذري Z للنواة 137، وهو عدد غير موجود في الطبيعة على كل حال، إذ يستحيل عندئذ النظر إلى النواة كشحنة نقطية. كما يبقى صالحاً في دراسة التفاعلات الكهربائية الراكدة بين مكونات النواة أي على مسافات بحدود الفيرمي، 10^{-15} متراً.

ويصح أيضاً عندما لا ننظر إلى مكونات النواة البروتون والنوترون كشحنات نقطية وإنما كجسيمات مؤلفة من الكواركات، أي على مسافات أقل من 10^{-16} متراً.

3.3- ثنائي القطب الكهربائي

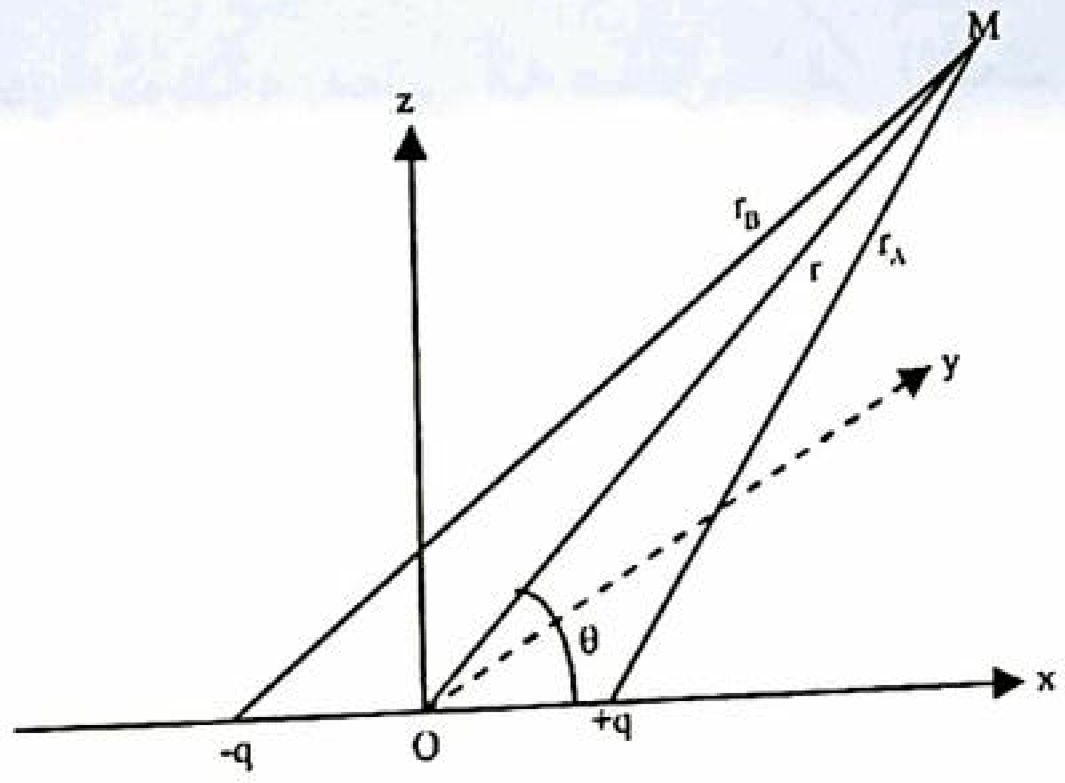
إن نموذج ثنائي القطب هام جداً في كل الفيزياء، إذ يمكننا أن ننظر إلى الذرة الحيادية كهربائياً كثنائي قطب حتى ولو كانت الذرة متناظرة كروياً، أي حتى ولو انطبق مركز كتلة الإلكترونات على النواة. إن

تطبيق حقل كهربائي على الذرة يبعد النواة في اتجاه الحقل ومركز الإلكترونات في الاتجاه الآخر جاعلاً منها ثنائي قطب. أما في الحالة العامة فالذرة أو الجزيء غير متناظرة. يبدو جزيء الماء عن بعد كثنائي قطب، فهو مكون من ذرة أكسجين تغلب فيها الشحنة السالبة وذرتي هدروجين تغلب فيهما الشحنة الموجبة.

لتكن لدينا شحنتان نقطيتان q و $-q$ في النقطتين A و B على الترتيب تفصلهما مسافة d ولنحسب الكمون والحقل الكهربائيين في نقطة M تبعد مسافة r عن النقطة O منتصف الخط الواصل بين q و $-q$ بفرض $d \ll r$.

إن V_M في النقطة M ذات الإحداثيات (x, y, z)، الشكل.25

$$V_M = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left[\left(x-\frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[\left(x+\frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}}\right)$$



الشكل.25

ننشر الطرف الثاني بدليل $r = OM$ مهملين الحدود من الدرجة الثانية بـ d ولدينا بالترتيب

$$r_A, r_B \cong \frac{1}{r\left(1 \mp \frac{xd}{r^2}\right)^{1/2}}$$

ننشر ثنائي الحد $\left(1 \mp \frac{xd}{r^2}\right)^{1/2}$ ونتوقف عند الحد الثاني في النشر لنجد أنه

$$1 \mp \frac{xd}{2r^2}$$

وهكذا فالكمون في النقطة M هو

$$V_M = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \frac{xd}{2r^2} - \left(1 - \frac{xd}{2r^2}\right)\right) = \frac{q\,x\,d}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (3.8)$$

تعريف 1 :

يطلق على المقدار المتجهي $\vec{m} = qd\vec{e}_x$ اسم العزم الكهربائي لثنائي القطب، حيث $\vec{e}_x$ المتجهة الواحدية على المحور Ox، أو اختصاراً عزم ثنائي القطب.

لنلاحظ أن $x = r\cos\theta$ حيث θ الزاوية التي يعملها r مع المحور Ox حيث $\cos\theta = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_x$ حيث $\vec{e}_r$ المتجهة الواحدية على $\overline{OM}$ وبالتالي فإن

$$V_M = \frac{qdr\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{qdr\,\vec{e}_r \cdot \vec{e}_x}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (3.9)$$

لنلاحظ من جهة أخرى أن

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\begin{cases} -\dfrac{x}{r^3} \\ -\dfrac{y}{r^3} \\ -\dfrac{z}{r^3} \end{cases} \qquad (3.10)$$

ومنه

$$V_M = \frac{-\vec{m} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)}{4\pi\varepsilon_0} \qquad (3.9)'$$

يعطينا اشتقاق V_M في (3.8) بالنسبة للإحداثيات x، y، z مساقط الحقل في النقطة M على المحاور الثلاثة

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = \begin{cases} -\dfrac{m}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3x^2}{r^5}\right) \\ \dfrac{m}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3xy}{r^5} \\ \dfrac{m}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3xz}{r^5} \end{cases} \qquad (3.10)$$

لأن مشتق r^{-3} بالنسبة للإحداثيات x_i $(x_i = (x, y, z))$ هو : $-3r^{-4} \times x_i r^{-1} = -\frac{3x_i}{r^5}$ وكل مشتق من هذه المشتقات الثلاثة مضروب بـ x، ولدينا طبعاً الحد الإضافي في الاشتقاق بالنسبة لـ x في المركبة الأولى. نكتب الحقل في النقطة M على شكل مركبتين الأولى موازية لثنائي القطب، المركبة الأولى في (3.10) والثانية عمودية عليه وهي

$$\frac{m3x}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left(y^2 + z^2\right)^{1/2}$$

ولكن $x = r\cos\theta$ و $\left(y^2 + z^2\right)^{1/2} = r\left(1 - \cos^2\theta\right)^{1/2}$ أي أن

$$E_{\perp} = \frac{3m\cos\theta\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (3.11)$$

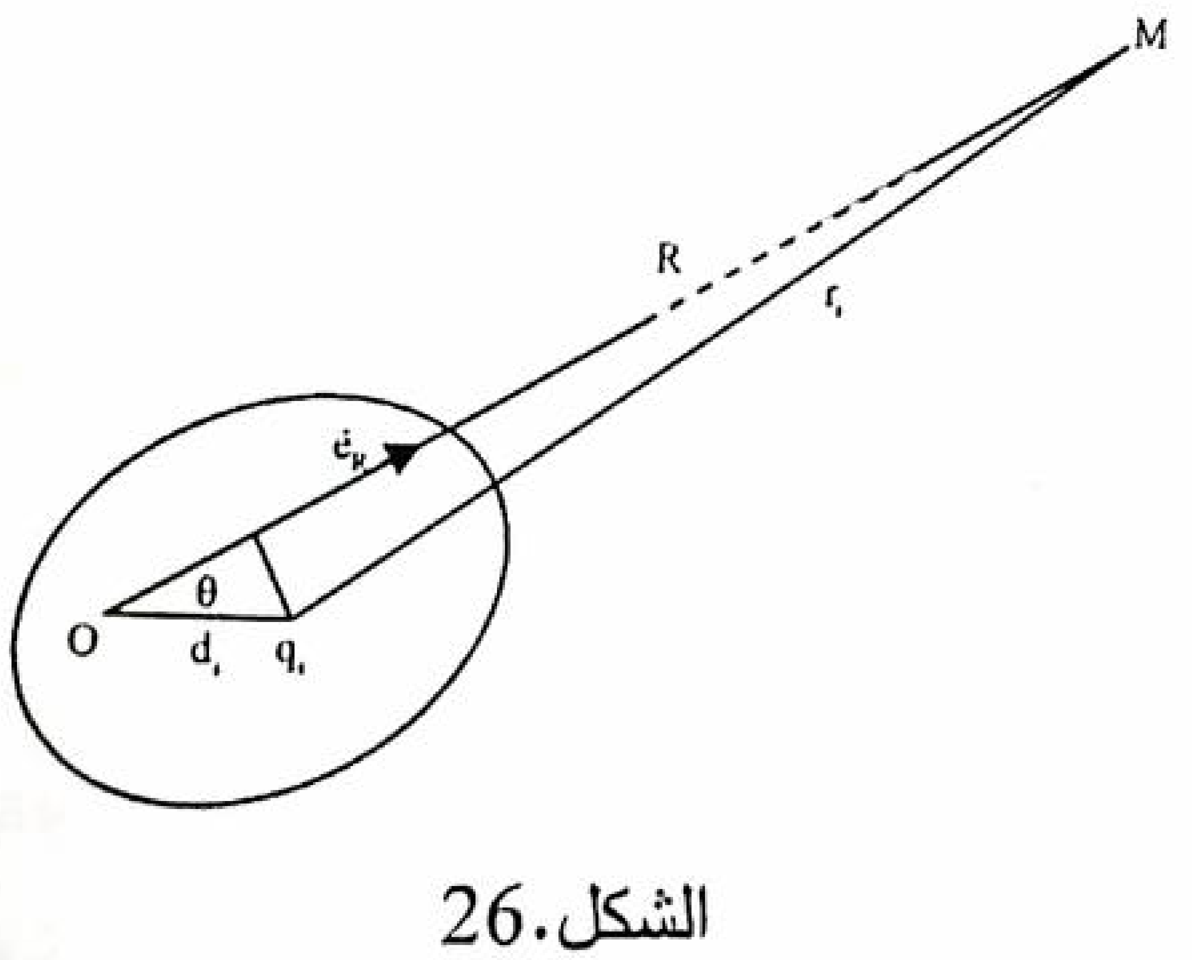
وهكذا فإن المركبة العمودية على ثنائي القطب، حالها حال المركبة الموازية $-\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3r^2\cos^2\theta}{r^5}\right)$ متناسبة مع r^{-3}.

من المفيد أحياناً حساب الحقل في الإحداثيات القطبية أي في اتجاه نصف القطر المتجهي $r = OM$ وفي الاتجاه العمودي عليه، لدينا من علاقة المساواة الأولى في (3.9)

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2m}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{2m}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^3} \end{cases} \qquad (3.12)$$

لنفرض الآن أننا نريد قياس الكمون الكهربائي الراكد الناتج عن حجم مشحون شحنته الكلية Q في نقطة M على بعد مسافة R من نقطة ما في هذا الحجم، النقطة O، كبيرة جداً أمام أبعاد الحجم. نعين أبعاد الحجم بالمسافة d_i بين أحد نقاطه، حيث الشحنة q_i والنقطة O. لا يتغير شيء في المحاكمة إذا نظرنا إلى الأمر من وجهة نظر كثافة الشحنة في المنطقة المعينة بـ d_i والتي نرمز لها بـ $\rho_i dV$، حيث dV عنصر الحجم. لتكن r_i المسافة بين الشحنة q_i والنقطة M التي نقيس الكمون الكهربائي فيها، الشكل.26، لدينا

$$V_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{q_i}{r_i}$$



الشكل.26

إن $r_i = R - d_i\cos\theta$ حيث طابقنا قوس الدائرة التي مركزها M مع الوتر بين نصفي القطر المتجاورين R و r. نكتب $d_i\cos\theta$ على الشكل $\vec{d}_i \cdot \vec{e}_R$ حيث $\vec{e}_R$ المتجهة الواحدية على المستقيم OM والكمون V_M على الشكل

$$V_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{q_i}{R - \vec{d}_i \cdot \vec{e}_R}$$

نكتب كتقريب أولي لكل حد في المخرج

$$\frac{1}{R - \vec{d}_i \cdot \vec{e}_R} = \frac{1}{R\left(1 - \frac{\vec{d}_i \cdot \vec{e}_R}{R}\right)} \cong \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\vec{d}_i \cdot \vec{e}_R}{R}\right)$$

فيأخذ الكمون في النقطة M – عندما نتوقف في نشر $\frac{1}{1 - x}$ حيث x صغيرة عند الحد الثاني – الشكل

$$V_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sum_i \frac{q_i}{R} + \sum_i \frac{q_i \vec{d}_i \cdot \vec{e}_R}{R^2}\right) \qquad (3.13)$$

<u>تعريف 2</u> :

نعمم تعريف عزم ثنائي القطب من أجل شحنتين إلى حالة عدد ما من الشحنات الموجبة أو السالبة ونسمي عزم ثنائي القطب لمجموع الشحنات المقدار

$$\vec{m} = \sum_i q_i \vec{d}_i$$

ونكتب الكمون V_M ، بعد تسمية مجموعة الشحنات $Q = \sum_i q_i$ (الذي قد يساوي الصفر إذا كان الحجم حيادياً)

$$V_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R} + \frac{\vec{m} \cdot \vec{e}_R}{R^2} + \ldots\right)$$

إن الحد الثاني هو الكمون الناتج عن ثنائي قطب كما في (3.9) ولذا نقول عن هذا التقريب إنه تقريب ثنائي القطب. وضعنا الرمز ... + لنبين أنه يمكن متابعة نشر $\frac{1}{1 - x}$ إلى أبعد من $1 + x$ وهو ما سنفعله في المستقبل للحصول على تقريب رباعي القطب، الخ.

<u>4.3– التوازن الكهربائي الراكد للموصلات</u>

يمكن إعادة توازن الموصلات إلى أحد شكلين :

أ– لدينا عدد من الموصلات والمطلوب إيجاد توزع الشحنات الكهربائية الراكدة التي تميز حالة التوازن بين هذه الموصلات ومعرفة الحقل الناتج في مختلف نقاط الفضاء؛

ب– نفرض أن الشحنة الكلية، أو كمون الموصل، معلومة والمطلوب هو إيجاد توزع الشحنة على سطح كل موصل من هذه الموصلات وتعيين قيمة الحقل الناتج في مختلف نقاط الفضاء.

إن مسألة إيجاد الكمون من الناحية الرياضية هي كتابة المعادلة التفاضلية الجزئية التي يخضع لها الكمون الكهربائي وذلك باستبدال معادلتي ماكسويل في الكهربائية الراكدة – وهما معادلتان تفاضليتان

المعادلة (2.4) في (2.1) بأن نستبدل بـ $\vec{E}$ جزئيتان من الرتبة الأولى بمعادلة وحيدة من الرتبة الثانية المكافئة لـ (2.2)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} V\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

أو نظراً لـ (1.13)

$$\nabla^2 V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \qquad (3.14)$$

حيث $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ هو اللابلاسي.

تعرف هذه المعادلة باسم معادلة بواسون Poisson؛ إن حل مسائل الكهربائية الراكدة هو إذاً حل معادلة بواسون وحساب الحقل $\vec{E}$ بأخذ غراديان الحل الذي نحصل عليه.

أعطتنا العلاقة (2.10) الكمون الذي تنتجه شحنة نقطية q في نقطة تبعد عنها مسافة r. نكتب الكثافة الحجمية ρ بالاستعانة بدالة ديراك (انظر الملحق الثاني لهذا الفصل) على الشكل

$$\rho = q\delta(r)$$

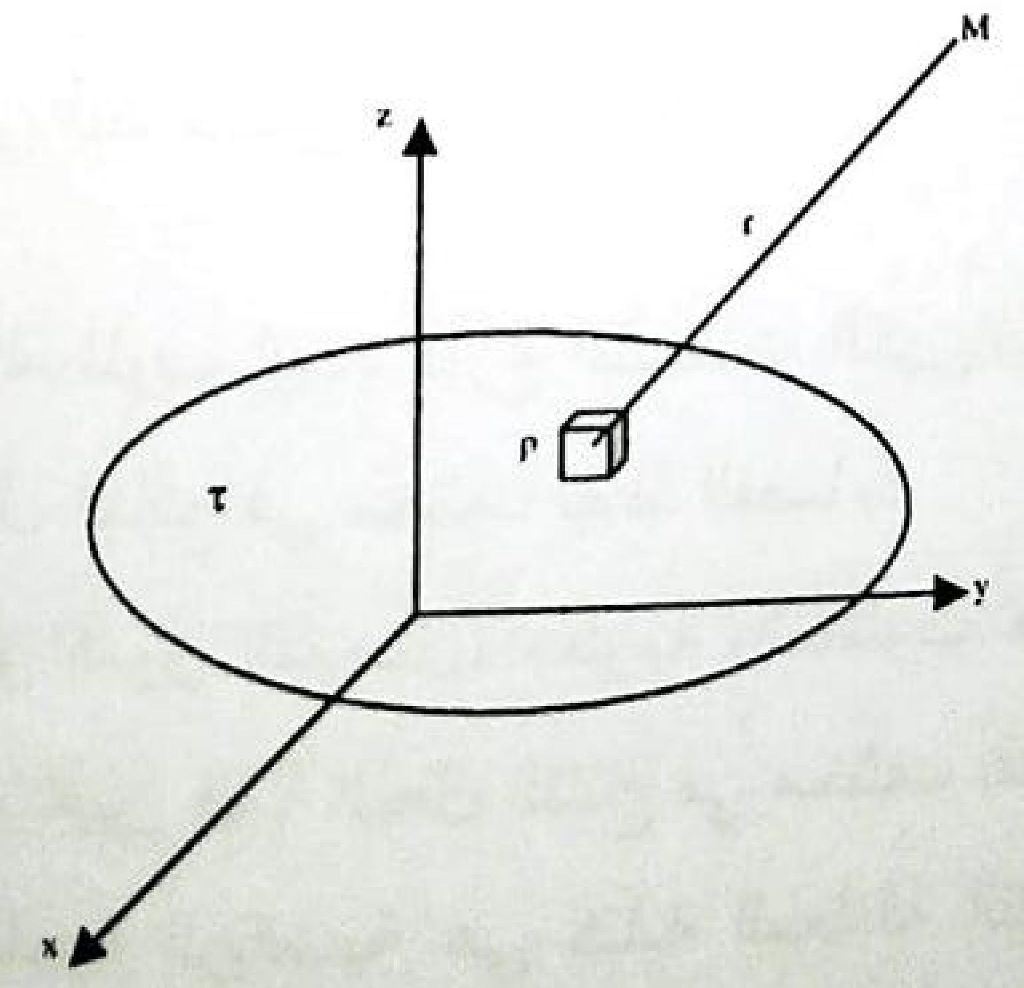
التي تعني أن الكثافة معدومة في كل نقاط الفضاء ماعدا النقطة $r = 0$ حيث تصبح لامتناهية في الكبر. وهكذا تأخذ معادلة بواسون الشكل

$$\nabla^2 \frac{1}{r} + 4\pi\delta(r) = 0 \qquad (3.14)'$$

لنلاحظ أننا لسنا بحاجة إلى حل معادلة بواسون عندما تتوقف كثافة الشحنة الحجمية $\rho(x, y, z)$ بشكل متصل على الوضع إذ إن الكمون في نقطة M تبعد المسافة r عن عنصر الحجم dxdydz هو، الشكل.27a

$$V_M = \iiint \frac{\rho(x, y, z)\,dxdydz}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (3.15)$$

والتكامل على كل حجم الشحنة τ.



الشكل.27a

دالات غرين Green

إن كتابة الصيغة التكاملية (3.15) المكافئة لمعادلة بواسون التفاضلية مفيدة في كثير من الأحيان للقيام بحسابات تقريبية. ننتقل من الصيغة التفاضلية إلى الصيغة التكاملية بفضل دالات غرين التي تعمم الحصول على الحل العام للمعالة التفاضلية العادية ذات الطرف الثاني انطلاقاً من الحل الخاص بدون طرف ثان. نكتب معادلة بواسون على الشكل

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ونكتب المعادلة بدون طرف ثان على الشكل

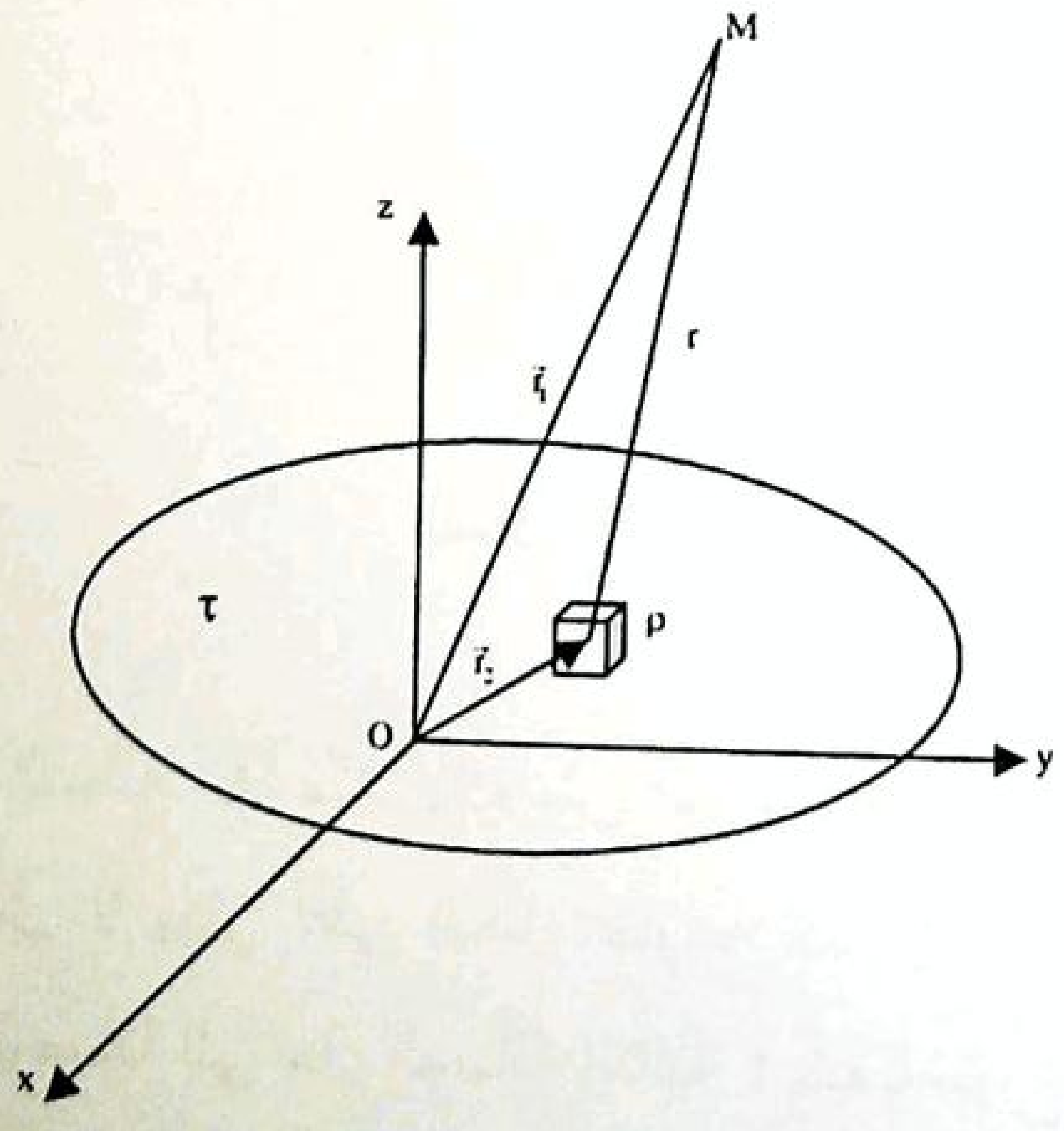
$$\nabla^2 G = \delta$$

حيث δ دالة ديراك ونقول عن الدالة G التي تحقق هذه المعادلة إنها دالة غرين؛ V ، G ، δ تابعة للوضع $r = (x, y, z)$. إن حل معادلة بواسون هو

$$V_{r_1} = \int -\rho(\vec{r}_2)\, G(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\, d\vec{r}_2$$

إنه جداء تلاف Convolution الطرف الثاني بدالة غرين. ويصح الأمر نفسه على كل المعادلات التفاضلية الجزئية، أياً كان شكل المؤثر والحل إذاً بحل المعادلة بدون طرف ثان أي بتعيين دالة غرين لهذا المؤثر. إن دالة غرين للابلاسي هي $G = -\frac{1}{4\pi r}$ حسب '(3.14) ومنه، الشكل.27b

$$V_{r_1} = \int \frac{\rho(r_2)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d\vec{r}_2 \qquad (3.15)'$$



الشكل.27b

لا تختلف هذه الصيغة عن (3.15) إلا بأخذ نقطة O كمبدأ لحساب المسافات.

تصبح معادلة بواسون في الفضاء الخاوي من الشحنات، معادلة بدون طرف ثان، تعرف باسم معادلة لابلاس

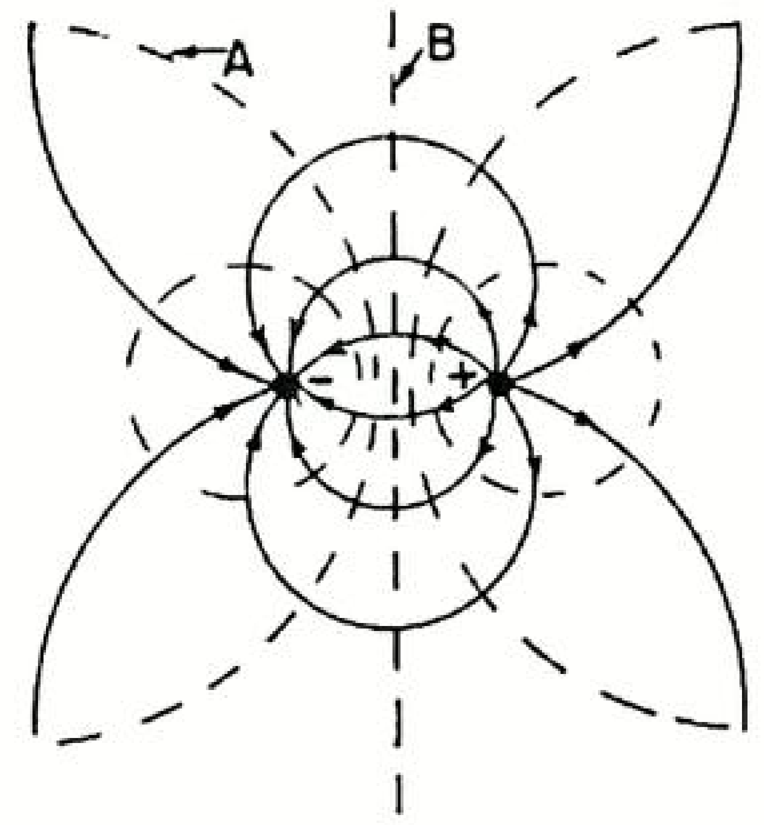
$$\nabla^2 V = 0 \qquad (3.16)$$

وهكذا فإن حل مسائل توازن الموصلات الكهربائي الراكد هو حل معادلة لابلاس على أن نشترط مثلاً أن تكون قيمة V ثابتة على سطح كل واحد من الموصلات – سطوح الموصلات سطوح متساوية الكمون، يطلق على هذه الشروط، التي تقابل الشروط البدائية في حال المعادلات التفاضلية العادية، اسم الشروط على الحدود. أو نشترط أن تكون شحنة كل موصل من هذه الموصلات معطاة وتصبح الشروط على الحدود عندئذ

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\iint \vec{\nabla} V \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

سنعود إلى دراسة حلول معادلتي بواسون ولابلاس في بعض الحالات الخاصة ونكتفي هنا بإعطاء طريقة فيزيائية بحتة لحل مسألة التوازن هي طريقة الخيالات :

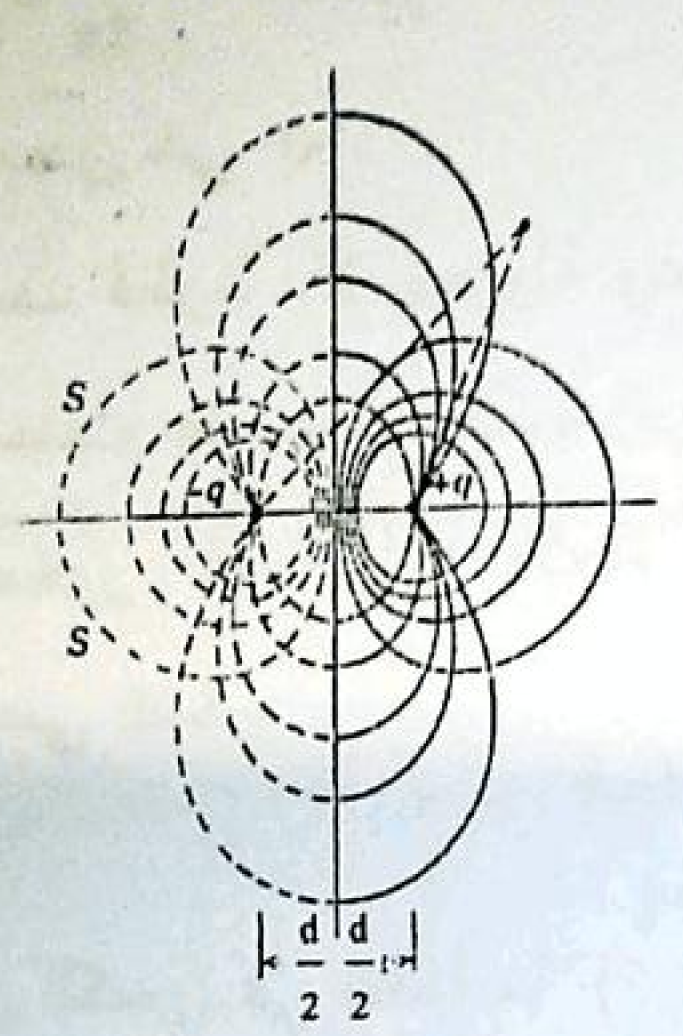
أعطينا في (3.9) على سبيل المثال صيغة الكمون الناتج عن ثنائي قطب في نقطة ما M تبعد مسافة r عن مركز ثنائي القطب، يمكننا بالتالي تعيين الشكل الهندسي لمتساويات الكمون. إن المحل الهندسي لمتساوي الكمون $V = 0$ هو المستوي B العمودي في النقطة O على ثنائي القطب $\vec{m} \cdot \vec{r} = 0$ ويمكن بالتالي انطلاقاً من هذه العلاقة تعيين مختلف السطوح A متساوية الكمون، الشكل.28.



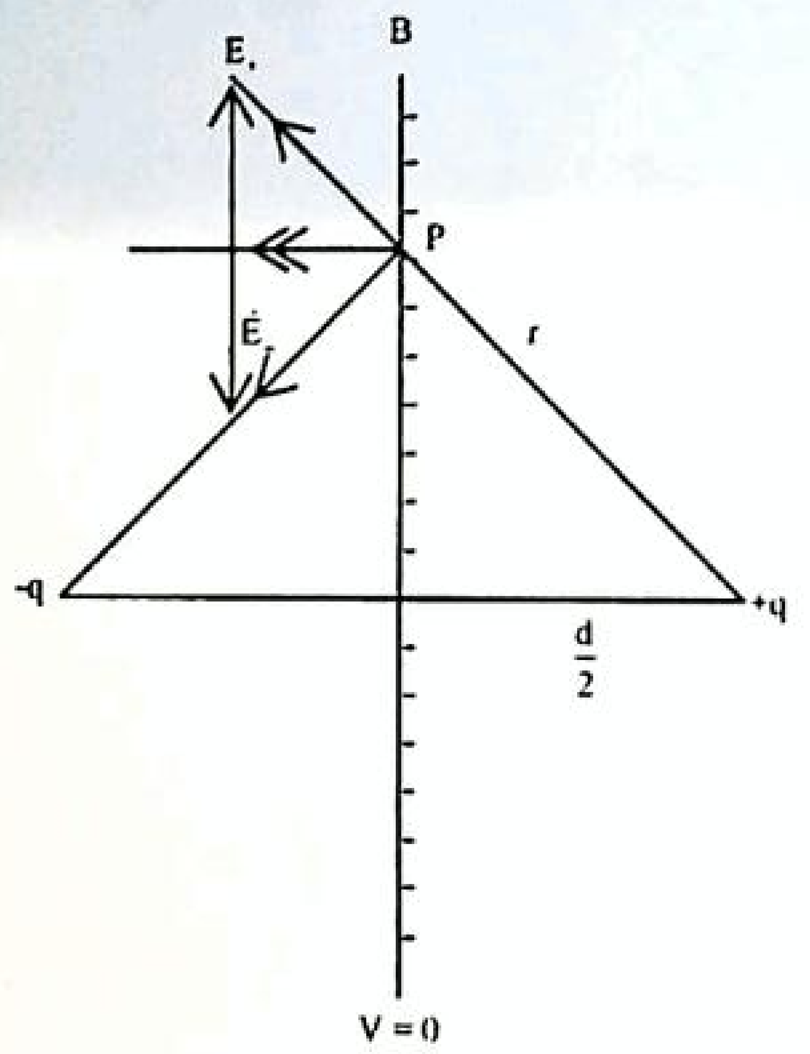
الشكل.28

لننظر إلى أحد هذه السطوح، السطح A مثلاً ولنفرض أننا غطينا هذا السطح بطبقة معدنية. إن توزع الشحنات داخل السطح الموصل لا يؤثر على الحقل خارجه كما رأينا بحيث يمكننا حذف الشحنة -q (خيال الشحنة +q) ونكون قد وصلنا إلى حل المسألة التالية : كيف تتوزع الشحنات على سطح الموصل A تحت تأثير شحنة نقطية +q ؟ أو بعبارة أخرى، كيف تُحرض +q شحنات (شحنات التحريض) على سطح المعدن بحيث ينعدم الحقل الكهربائي داخل السطح. لنأخذ كسطح معدني B المستوي ذي الكمون $V = 0$ ولتكن $d/2$، المسافة الفاصلة بين +q والمستوي، صغيرة أمام أبعاد المستوي بحيث يمكن النظر إلى المستوي كلامتناه في الأبعاد. تظهر على السطح B بالتحريض شحنات سالبة. يتجه الحقل بطبيعة الحال من الشحنة الموجبة +q نحو الشحنات السالبة على B ويجب أن يقع عمودياً على المستوي

متساوي الكمون، الشكل.29، حيث ترمز S إلى السطوح متساوية الكمون الأخرى. فالحقل هو الحقل الناتج عن الشحنة q+ وعن خيالها q-، نظير موقعها بالنسبة للمستوي وتساوي المركبة العمودية في نقطة ما P من السطح تبعد q عن المسافة r، الشكل.30.



الشكل.29



الشكل.30

$$|E| = \frac{2q\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{2q\, d/2}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (3.17)$$

اتجاه هذا الحقل معاكس لاتجاه عزم ثنائي القطب، ونكتب

$$\vec{E} = \frac{-\vec{m}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (3.17)'$$

ثم إن الحقل في جوار الموصل يساوي لـ $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ حسب (3.7) فإن كثافة الشحنة هي

$$\sigma = \frac{-m}{4\pi r^3} = \frac{-qd}{4\pi r^3} \qquad (3.18)$$

يمكن بسهولة حساب شحنة المستوي الكلية بأخذ عنصر سطح $rdr\cos\theta d\theta d\varphi$ ، نكامل r بين $-\infty$ و $+\infty$ أو مرتين بين $d/2$ واللانهاية و θ عندئذ بين الصفر و $\pi/2$ فنحصل في النهاية من (3.18) على

$$Q = \iint \sigma dS = \frac{-qd}{4\pi} 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta \int_{d/2}^{\infty} \frac{rdr}{r^3}$$

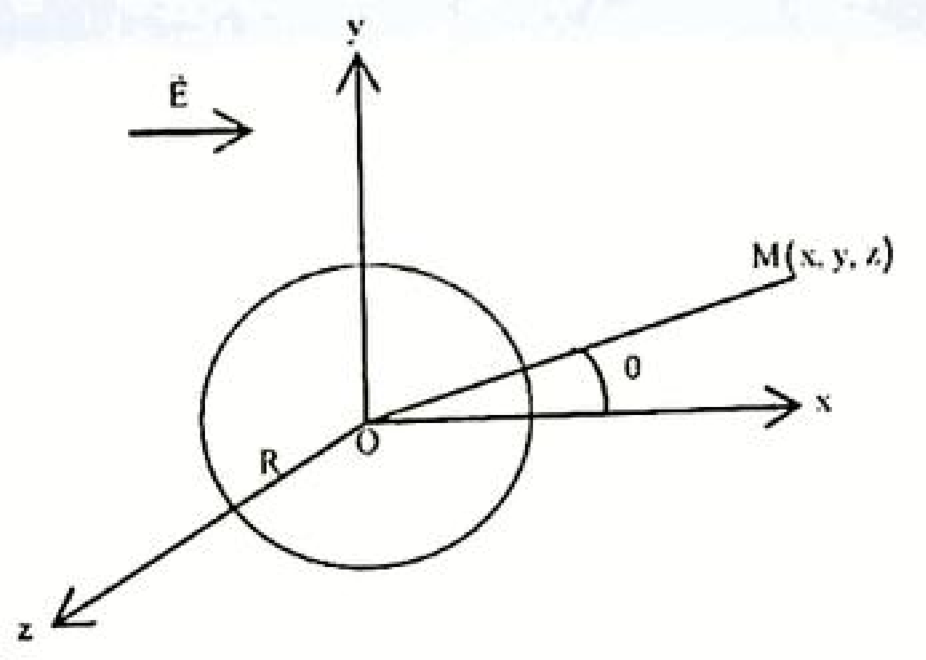
أي أن الشحنة المحرضة على سطح المعدن هي $-q$.

لنأخذ كمثال ثان حالة كرة معدنية نصف قطرها R معزولة وغير مشحونة وضعت في حقل كهربائي متجانس $\vec{E}_0$. سيحرض هذا الحقل الشحنات على سطح الكرة ونريد معرفة كيفية توزعها على سطح الكرة باللجوء إلى طريقة الخيالات. لنأخذ المحور Ox موازياً لاتجاه $\vec{E}_0$ بحيث يمكن كتابة الكمون في أي نقطة من المنطقة التي يوجد فيها $\vec{E}_0$ على الشكل

$$V_I = -E_0 x + C$$

ولنعين مركز الكرة بنقطة المبدأ 0. إن الكمون في نقطة ما $M(x, y, z)$ ، الشكل.31، هو كمون الحقل المتجانس V_I مضافاً إليه الحقل الناتج عن الشحنات المحرضة على سطح الكرة ولنرمز له بـ V_S

$$V_M = V_S + V_I = V_S - E_0 r\cos\theta + C \qquad (3.19)$$



الشكل.31

يجب أن يكون هذا الكمون ثابتاً على سطح الكرة متساوية الكمون في حالة التوازن – وأن يكون مساوياً لـ V_I عندما نبتعد بما فيه الكفاية عن سطح الكرة. يتحقق الشرط الأول إذا كان V_S متناسباً مع $\cos\theta$ وكان مثل التناسب بحيث ينعدم الحدان الأولان في الطرف الأخير من (3.19) من أجل $r = R$. ويتحقق الشرط الثاني إذا كان V_S يتناهى إلى الصفر عندما يتناهى r إلى اللانهاية. إن كمون ثنائي القطب المتمركز في النقطة O (3.9) يحقق هذين الشرطين

$$V_{S(M)} = \frac{mr\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (3.20)$$

يمكننا إذاً استبدال الشحنات المحرضة على سطح الكرة بثنائي قطب في مركزها، يتعين عزمه بأخذ الكمون على سطح الكرة مساوياً للثابتة C

$$V_S = \frac{mR\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = E_0 R\cos\theta$$

يمكن بسهولة حساب شحنة المستوي الكلية بأخذ عنصر سطح $rdr\cos\theta d\theta d\varphi$، نكامل r بين $-\infty$ و $+\infty$ أو مرتين بين $d/2$ واللانهاية و θ عندئذ بين الصفر و $\pi/2$ فنحصل في النهاية من (3.18) على

$$Q = \iint \sigma dS = \frac{-qd}{4\pi} 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta \int_{d/2}^{\infty} \frac{rdr}{r^3}$$

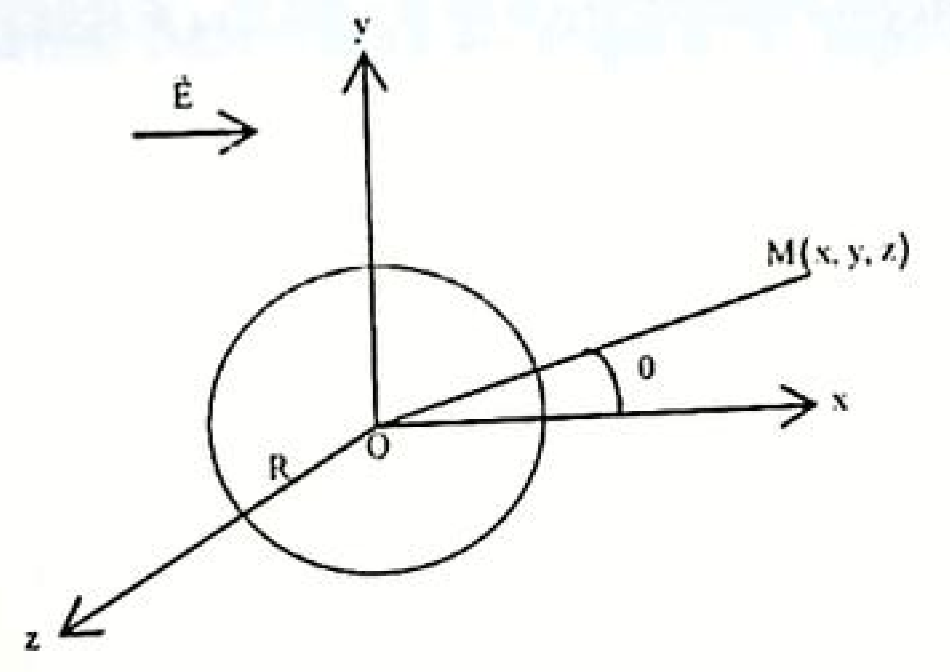
أي أن الشحنة المحرضة على سطح المعدن هي $-q$.

لنأخذ كمثال ثان حالة كرة معدنية نصف قطرها R معزولة وغير مشحونة وضعت في حقل كهربائي متجانس $\vec{E}_0$. سيحرض هذا الحقل الشحنات على سطح الكرة ونريد معرفة كيفية توزعها على سطح الكرة باللجوء إلى طريقة الخيالات. لنأخذ المحور Ox موازياً لاتجاه $\vec{E}_0$ بحيث يمكن كتابة الكمون في أي نقطة من المنطقة التي يوجد فيها $\vec{E}_0$ على الشكل

$$V_1 = -E_0 x + C$$

ولنعين مركز الكرة بنقطة المبدأ 0. إن الكمون في نقطة ما $M(x, y, z)$، الشكل.31، هو كمون الحقل المتجانس V_1 مضافاً إليه الحقل الناتج عن الشحنات المحرضة على سطح الكرة ولنرمز له بـ V_S

$$V_M = V_S + V_1 = V_S - E_0 r\cos\theta + C \qquad (3.19)$$



الشكل.31

يجب أن يكون هذا الكمون ثابتاً على سطح الكرة متساوية الكمون في حالة التوازن – وأن يكون مساوياً لـ V_1 عندما نبتعد بما فيه الكفاية عن سطح الكرة. يتحقق الشرط الأول إذا كان V_S متناسباً مع $\cos\theta$ وكان مثل التناسب بحيث ينعدم الحدان الأولان في الطرف الأخير من (3.19) من أجل $r = R$. ويتحقق الشرط الثاني إذا كان V_S يتناهى إلى الصفر عندما يتناهى r إلى اللانهاية. إن كمون ثنائي القطب المتمركز في النقطة O (3.9) يحقق هذين الشرطين

$$V_{S(M)} = \frac{mr\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

يمكننا إذاً استبدال الشحنات المحرضة على سطح الكرة بثنائي قطب في مركزها، يتعين عزمه بأخذ الكمون على سطح الكرة مساوياً للثابتة C (3.20)

$$V_S = \frac{mR\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = E_0 R\cos\theta$$

$$m = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0 \qquad (3.21)$$

ومنه بالعودة إلى (3.20)

$$V_S = E_0 \frac{R^3}{r^2}\cos\theta \qquad (3.20)'$$

والكمون الكلي من (3.19)

$$V_M = E_0\left(\frac{R^3}{r^2} - r\right)\cos\theta + C \qquad (3.19)'$$

يمكن التخلص من الثابتة C، قيمة الكمون على سطح الكرة، بوصل الكرة بسطح الأرض واعتباره مبدأ لقياس الكمون.

لدينا أخيراً مركبات الحقل بالإحداثيات القطبية

$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = \left(1 + \dfrac{2R^3}{r^3}\right)E_0\cos\theta \\ \text{و} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = -\left(1 - \dfrac{R^3}{r^3}\right)E_0\sin\theta \end{cases} \qquad (3.22)$$

تنعدم هذه المركبة، E_θ من أجل $R = r$ لأن الحقل عمودي على سطح الكرة، يقع في اتجاه r فقط.

وكثافة الشحنة هي حسب (3.7)

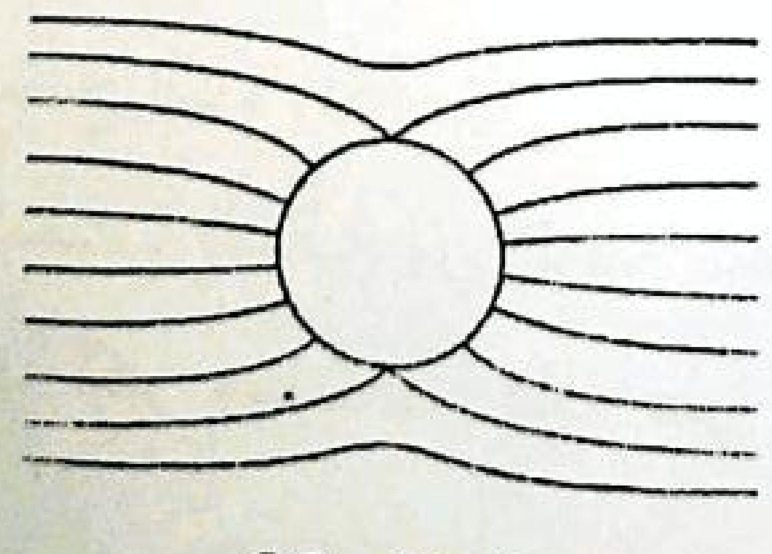
$$E = E_R = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

و

$$\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta \qquad (3.23)$$

إن هذه الكثافة هي أكبر ما تكون وموجبة من أجل $\theta = 0$، تنعدم من أجل $\theta = \pi/2$ لتصبح سالبة بعد ذلك والشحنة الكلية مساوية للصفر.

يرينا، الشكل.32، خطوط الحقل في جوار الكرة



الشكل.32

لنأخذ كمثال ثالث وأخير مسألة لا يتطلب حلها سوى هندسة المرحلة الثانوية.

لتكن لدينا كرة معدنية موصولة بالأرض (كمونها يساوي الصفر) موضوعة في جوار شحنة نقطية $+q$. نعين وضع هذه الشحنة بالنقطة M على مسافة b من مركز الكرة ذات نصف القطر a ونريد تعيين خيال الشحنة $+q$، $-q'$، الواقع في النقطة M' داخل الكرة بحيث يكون الكمون الناتج في نقطة ما P على سطح الكرة، تبعد عن M المسافة γ، مساوياً للصفر أي

$$\frac{-q'}{r'} + \frac{q}{r} = 0$$

أو

$$\frac{q'}{q} = -\frac{r'}{r}$$

نستعمل خاصة قوة نقطة خارج الكرة أو داخلها – خارج دائرة كبرى منها أو داخلها في واقع الأمر – لتعيين هذه النسبة بين الشحنة q وخيالها q'.

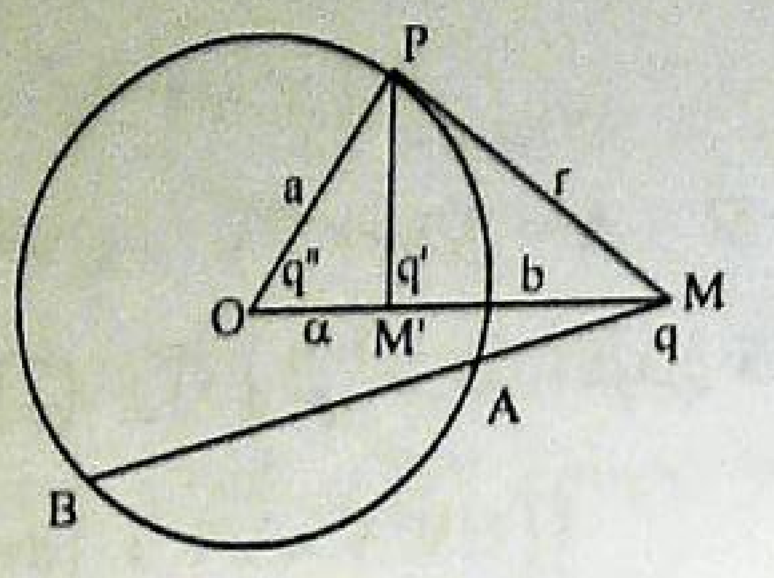
إن $MA \times MB$، قوة M بالنسبة للدائرة، حيث A و B نقطتا قطع المستقيم BM للدائرة، مقدار ثابت ويساوي فيما يخص النقطة M لـ $b^2 - a^2$ ويساوي فيما يخص النقطة M' الواقعة داخل الدائرة لـ $-(\alpha^2 - a^2)$ حيث $\alpha = OM'$. نعين M' بأخذ مسقط النقطة P، نقطة تماس MP مع الدائرة، على MO. نرى بسهولة، الشكل.33، من تشابه المثلثين OMP و OPM'، أن $\alpha = \frac{a^2}{b}$. إن قوة M الثابتة في النقطة P هي r^2 وقوة M' الثابتة أيضاً هي $r'^2 = -\left(\frac{a^4}{b^2} - a^2\right)$ والنسبة $\frac{r'}{r}$ مقدار ثابت هو نسبة جذري القوتين

$$\frac{r'}{r} = \frac{a}{b}$$

وهي علاقة صحيحة من أجل كل نقاط الكرة. وهكذا فإن شحنة الخيال q' التي تحقق توازن الكرة (كمون معدوم) تساوي

$$q' = -\frac{qa}{b}$$

وهي الشحنة التي تنتشر على سطح الكرة محرضة من قبل الشحنة q. إن قولنا إن الشحنة q' محرضة يعني طبعاً أنها كانت موجودة على سطح الكرة ولكن توزع الشحنات على السطح لم يعد كما كان عليه قبل وضع الشحنة q. فقد اقتربت الشحنات السالبة من الوجه المقابل لـ M، حيث الشحنة q مجذوبة نحوها وأصبحت كثافة الشحنات الموجبة أكبر مما كانت عليه على الوجه البعيد عن M.



الشكل.33

لنفرض الآن أن الكرة غير موصولة بالأرض، أن كمونها لا يساوي الصفر، وأن شحنتها الكلية مساوية للصفر، أنها معزولة كهربائياً. إن وضع الشحنة q في النقطة M لن يشحن الكرة ولكنه سيحرض شحنة q' سالبة على الوجه القريب من M لذا لابد من تخيل شحنة جديدة q'' موجبة في مركز الكرة تساوي بالقيمة المطلقة لـ q' بحيث تبقى شحنة الكرة الكلية مساوية للصفر

$$q'' = q\frac{a}{b}$$

يمكننا والحالة هذه حساب القوة الجاذبة التي تمارسها الكرة على الشحنة q. إنها

$$\frac{q|q'|}{4\pi\varepsilon_0\left(b - \frac{a^2}{b}\right)^2} - \frac{qq''}{4\pi\varepsilon_0 b^2} = \frac{q^2 a}{4\pi\varepsilon_0 b}\left(\frac{b^2}{\left(b^2 - a^2\right)^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$

5.3– مبرهنة غرين وحل مسألة الكمون

لتكن لدينا دالتان سلميتان $U(\vec{r})$ و $V(\vec{r})$ ذات مشتقات جزئية متصلة من الرتبتين الأولى والثانية ($\frac{\partial U}{\partial x^i}$، $\frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^j}$ متصلة وكذلك $\frac{\partial V}{\partial x^i}$، $\frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j}$)؛ نقول عندئذ إن الدالتين نظاميتان ولننظر إلى المتجهة

$$\vec{A} = U\vec{\nabla}V - V\vec{\nabla}U \qquad (1)$$

لدينا من مبرهنة غاوص

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, d\tau = \int \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int A_n dS \qquad (2)$$

حيث S السطح المحيط بالحجم الذي نكامل عليه في الطرف الأيسر و A_n مسقط المتجهة $\vec{A}$ على العمودي على السطح في الاتجاه الخارج منه $\vec{n}$

$$A_n = U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n} \qquad (3)$$

نكتب $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ باستعمال المتطابقة

$$\vec{\nabla} \cdot \left(a\vec{b}\right) \equiv \vec{\nabla}a \cdot \vec{b} + a\vec{\nabla} \cdot \vec{b}$$

ومن (1)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \cancel{\vec{\nabla}U \cdot \vec{\nabla}V} + U\nabla^2V - \cancel{\vec{\nabla}V \cdot \vec{\nabla}U} - V\nabla^2U \qquad (4)$$

نضع هذا المقدار في الطرف الأيسر لـ (2)، و(3) في طرفها الأيمن فنحصل على صيغة مبرهنة غرين[1]

$$\int\left(U\nabla^2V - V\nabla^2U\right)d\tau = \int\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS \qquad (3.24)$$

تأخذ هذه الصيغة شكلاً مبسطاً عندما تقتصر $\vec{A}$ على الحد الأول في (1) وبالتالي (4) على الحدين الأولين ونكتب

$$\int\left(\vec{\nabla}U\cdot\vec{\nabla}V + U\nabla^2V\right)d\tau = \int U\frac{\partial V}{\partial n}dS \qquad (3.25)$$

ومن أجل $U = V$

$$\int\left[\left(\vec{\nabla}U\right)^2 + U\nabla^2U\right]d\tau = \int U\frac{\partial U}{\partial n}dS \qquad (3.26)$$

نقول عن الدالة U إنها دالة كمون أو مدروج Harmonic إذا حققت معادلة لابلاس

$$\nabla^2U = 0$$

وإذا أضفنا شروطاً على الحدود بالقول إنها معدومة على السطح المغلق S ونظامية داخل الحجم فإن دالة الكمون تحقق عندئذ، حسب (3.26) العلاقة

$$\int\left(\vec{\nabla}U\right)^2 d\tau = 0$$

وبالتالي فإن $\vec{\nabla}U = 0$ لأن المقدار تحت إشارة التكامل موجب و U ثابتة؛ وبما أنها معدومة على الحدود فإنها معدومة في كل الحجم.

إن دالة الكمون التي تحقق الشروط على الحدود وحيدة، إذ لو وجد حلان لمعادلة لابلاس U_1 و U_2 فإن $U_2 - U_1$ حل أيضاً ومعدوم وبالتالي $U_1 = U_2$.

إن الدالة $U = \frac{1}{r}$ دالة كمون لابلاسيها معدوم في كل مكان ماعدا $r = 0$، حيث طابقناه مع دالة ديراك (والأصح أن نقول توزيعة ديراك). لنأخذ السطح S المحيط بالحجم كبيراً قدر ما نريد $\frac{1}{r} \to 0$ على هذا السطح وكذا مشتقه ويصح الأمر نفسه على أي كمون V متناه إلى الصفر في اللانهاية بسرعة أكبر من تناهي $\frac{1}{r}$ إلى اللانهاية إذا كان من الشكل $\frac{1}{r^n}$ $n = 1, 2, \ldots$. ولنطبق (3.24) على $U = \frac{1}{r}$، $\nabla^2U = -4\pi\delta(r)$ و $\nabla^2V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ لحساب V في النقطة المعرفة بـ $\vec{r}_1$ بدليل كثافة الشحنة المعرفة في r_2، $r = (r_1 - r_2)$

[1] لم يبرهن غرين على هذه الصيغة باستعمال مبرهنة غاوص التي أتت بعد مبرهنة غرين. يطلق على (3.24) اسم الصيغة الثانية وعلى (3.25) اسم الصيغة الأولى وإن لم تكن هذه التسمية متفقاً عليها.

$$\int \left[-\frac{1}{r}\frac{\rho(\vec{r}_2)}{\varepsilon_0} + 4\pi\delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) V(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \right] d\vec{r}_2 = 0 \qquad (3.27)$$

إن تكامل الحد الثاني هو $4\pi V(r_1)$. ونجد من جديد الكمون المعرف في '(3.15).

واضح أن دالة الكمون U المحققة لمعادلة لابلاس ليست سوى دالة غرين لمعادلة بواسون وبالتالي فإن طريقة الخيال التي استعملناها وخاصة في المثال الثالث هي إيجاد دالاتي غرين، $U = \frac{q}{r}$ ، $U' = \frac{q'}{r'}$ ، بحيث تعدما الكمون على سطح الكرة المعدنية في الحالة الأولى أو تعدما الشحنة $\left(q'' = q\frac{a}{b}\right)$ على سطح الكرة في الحالة الثانية.

4. المكثفات

1.4- السعات وأمثال التأثير

تعريف 3 :

ليكن لدينا موصل (ناقل) معزول. نسمي سعة هذا الناقل شحنته عندما يكون كمونه مساوياً لـ 1 فولت ونرمز لهذه السعة، Capacity (Capacitance)، بالرمز C .

تبين خطية معادلات الكهربائية الراكدة أنه إذا كمون الناقل هو V (عوضاً عن 1) فإن شحنته هي CV ، ونكتب تعريفاً

$$Q = CV \qquad (4.1)$$

لتكن Q شحنة كرة معدنية نصف قطرها R ، إن كمونها هو

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

وبالتالي فإن سعة هذه الكرة هي

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R = \frac{R}{9\cdot10^9} \qquad (4.2)$$

تعطينا هذه العلاقة واحدة السعة : إنها سعة كرة نصف قطرها يساوي 9.10^9 متراً (شحنة هذه الكرة عندما يكون كمونها مساوياً لفولت واحد). تسمى هذه الوحدة الفاراد Farad $\frac{\text{كولون}}{\text{فولت}}$ ، وهي وحدة كبيرة جداً لذا تستعمل وحدات جزئية منها بدءاً بالبيكوفاراد المساوي لـ 10^{-12} فاراد تليها النانوفاراد المساوي لـ 10^{-9} فاراد فالميكروفاراد المساوي لـ 10^{-6} فاراد إن البيكوفاراد هو سعة كرة نصف قطرها 9 ميليمتر.

لننظر الآن إلى نظمة مؤلفة من n موصلاً، ... $n = 1, 2,$ ولنضع الموصل رقم 1 في كمون مساو لـ 1 فولت ولنفرض أن الموصلات الأخرى موضوعة في الكمون صفر. ستشحن هذه الموصلات بالتحريض

ونرمز لشحناتها الناتجة عن وجود الموصل 1 في الكمون 1 فولت بـ C_1^2 للموصل رقم 2 و C_1^3 للموصل رقم 3، الخ. ولسعة الموصل 1 في هذه الحالة بـ C_1^1 واضح أن وضع الموصل رقم 1 في الكمون V_1 سيضرب كل قيم هذه الشحنات بـ V_1 نظراً لخطية المعادلات وهكذا فإن شحنة هذه الموصلات هي

$$C_1^1 V_1, C_1^2 V_1, \dots C_1^n V_1 \qquad (1)$$

لنكرر نفس المحاكمة بأن نضع الموصل رقم 2 في الكمون 1 فولت ونحرض الأخرى الموضوعة في الكمون صفر، نرمز لشحناتها الناتجة عن 2 بـ $C_2^1, C_2^3 \dots C_2^n$ ولسعة الموصل 2 بـ C_2^2 تصبح هذه الشحنات عندما نرفع كمون الموصل رقم 2 إلى V_2

$$C_2^1 V_2, C_2^2 V_2, \dots C_2^n V_2 \qquad (2)$$

ونحصل عندما نضع الموصل n في الكمون V_n لتحريض الموصلات الأخرى على

$$C_n^1 V_n, C_n^2 V_n, \dots C_n^n V_n \qquad (n)$$

$$\vdots$$

أما إذا رفعنا كمونات الموصلات كلها وبآن واحد إلى $V_1, V_2, \dots V_n$ فإن الشحنات التي سنحصل عليها هي حسب خطية المعادلات هي كالتالي

$$\begin{cases} Q^1 = C_1^1 V_1 + C_2^1 V_2 + \dots + C_n^1 V_n \\ Q^2 = C_1^2 V_1 + C_2^2 V_2 + \dots + C_n^2 V_n \\ \vdots \\ Q^n = C_1^n V_1 + C_2^n V_2 + \dots + C_n^n V_n \end{cases} \qquad (4.3)$$

وهكذا فإن شحنة كل موصل دالة خطية لكل الكمونات، بما في ذلك طبعاً كمون الموصل بالذات ونرى في هذه النتيجة توضيحاً ساطعاً لمبدأ التوضيع ولخطية المعادلات المكافئة له. لنلاحظ أنه من الممكن حساب كمونات الموصلات بدليل شحناتها شريطة أن تكون مصفوفة الأمثال، ولنرمز لعناصرها بـ C_j^i، قلوبة – معينها مختلف عن الصفر.

<u>تعريف 4</u> :

نعمم تعريف السعة الذي وضعناه لموصل معزول على النحو التالي :

نسمي المقدار C_i^i سعة الموصل i وهي شحنته عندما يكون كمونه مساوياً لواحد فولت في حين يساوي كمون كل من الموصلات الأخرى الصفر ونسمي C_j^i، $i, j = 1, 2, \dots, n$، معامل تأثير الموصل j على الموصل i، إنه شحنة الموصل i عندما يكون كمون الموصل j مساوياً لواحد فولت وكمونات الموصلات الأخرى $k \neq j$ معدومة.

واضح أن معامل تأثير الموصل i على j C_i^j يساوي لـ C_j^i ؛ إنه معامل تفاعل هذين الموصلين. هذا من جهة، لنفرض من جهة أخرى أننا وضعنا أحد الموصلات، وليكن الموصل 1 في الكمون المساوي لـ 1 فولت والموصلات الأخرى في الكمون صفر. تتجه خطوط الحقل من الموصل 1 المشحون بشحنة

ونرمز لشحناتها الناتجة عن وجود الموصل 1 في الكمون 1 فولت بـ C_1^2 للموصل رقم 2 و C_1^3 للموصل رقم 3، الخ. ولسعة الموصل 1 في هذه الحالة بـ C_1^1 واضح أن وضع الموصل رقم 1 في الكمون V_1 سيضرب كل قيم هذه الشحنات بـ V_1 نظراً لخطية المعادلات وهكذا فإن شحنة هذه الموصلات هي

$$C_1^1V_1, C_1^2V_1, \dots C_1^nV_1 \qquad (1)$$

لنكرر نفس المحاكمة بأن نضع الموصل رقم 2 في الكمون 1 فولت ونحرض الأخرى الموضوعة في الكمون صفر، نرمز لشحناتها الناتجة عن 2 بـ $C_2^1, C_2^3 \dots C_2^n$ ولسعة الموصل 2 بـ C_2^2 تصبح هذه الشحنات عندما نرفع كمون الموصل رقم 2 إلى V_2

$$C_2^1V_2, C_2^2V_2, \dots C_2^nV_2 \qquad (2)$$

ونحصل عندما نضع الموصل n في الكمون V_n لتحريض الموصلات الأخرى على

$$C_n^1V_n, C_n^2V_n, \dots C_n^nV_n \qquad (n)$$

$$\vdots$$

أما إذا رفعنا كمونات الموصلات كلها وبآن واحد إلى $V_1, V_2, \dots V_n$ فإن الشحنات التي سنحصل عليها هي حسب خطية المعادلات هي كالتالي

$$\begin{cases} Q^1 = C_1^1V_1 + C_2^1V_2 + \dots + C_n^1V_n \\ Q^2 = C_1^2V_1 + C_2^2V_2 + \dots + C_n^2V_n \\ \vdots \\ Q^n = C_1^nV_1 + C_2^nV_2 + \dots + C_n^nV_n \end{cases} \qquad (4.3)$$

وهكذا فإن شحنة كل موصل دالة خطية لكل الكمونات، بما في ذلك طبعاً كمون الموصل بالذات ونرى في هذه النتيجة توضيحاً ساطعاً لمبدأ التوضيع ولخطية المعادلات المكافئة له. لنلاحظ أنه من الممكن حساب كمونات الموصلات بدليل شحناتها شريطة أن تكون مصفوفة الأمثال، ولنرمز لعناصرها بـ C_i^j، قلوبة – معينها مختلف عن الصفر.

تعريف 4 :

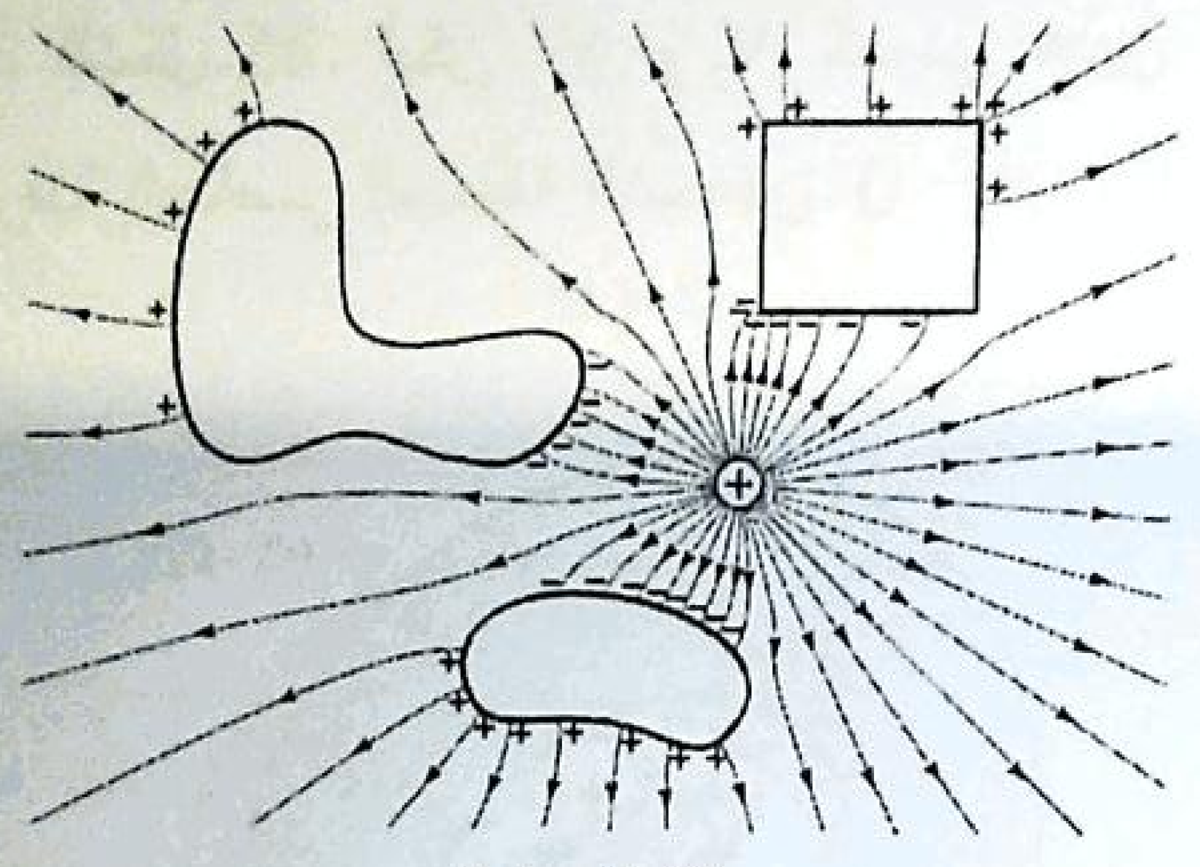
نعمم تعريف السعة الذي وضعناه لموصل معزول على النحو التالي :

نسمي المقدار C_i^i سعة الموصل i وهي شحنته عندما يكون كمونه مساوياً لواحد فولت في حين يساوي كمون كل من الموصلات الأخرى الصفر ونسمي C_j^i، $i, j = 1, 2, \dots, n$، معامل تأثير الموصل j على الموصل i، إنه شحنة الموصل i عندما يكون كمون الموصل j مساوياً لواحد فولت وكمونات الموصلات الأخرى $k \neq j$ معدومة.

واضح أن معامل تأثير الموصل i على j C_i^j يساوي لـ C_j^i؛ إنه معامل تفاعل هذين الموصلين. هذا من جهة، لنفرض من جهة أخرى أننا وضعنا أحد الموصلات، وليكن الموصل 1 في الكمون المساوي لـ 1 فولت والموصلات الأخرى في الكمون صفر. تتجه خطوط الحقل من الموصل 1 المشحون بشحنة

موجبة، $1 = V_1 \sim Q^1$، إلى الموصلات الأخرى، وإلى اللانهاية إن لم تكن هذه الموصلات محيطة إحاطة تامة بالموصل 1. وهكذا فشحنة الموصلات الأخرى سالبة ولدينا، الشكل.34، من أجل أي عنصري سطح بين الموصل 1 وأحد الموصلات الأخرى، الموصل 2 مثلاً بتطبيق مبرهنة غاوص

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \sigma_1 \cdot dS_1 + \sigma_2 \cdot dS_2 \qquad (4.4)$$



الشكل.34

حيث Σ سطح مواز لخطوط الحقل بين 1 و 2 يحدد عنصري السطحين dS_1 و dS_2 على الموصلين 1 و 2، و σ_1 و σ_2 كثافة الشحنة على هذين السطحين

$$\sigma_1 dS_1 = -\sigma_2 dS_2 \qquad (4.4)'$$

تعرف هذه العلاقة باسم مبرهنة العناصر المتقابلة. فإذا كان الموصل 1 محاطاً إحاطة تامة بالموصلات الأخرى، أي إذا كانت كل خطوط الحقل المبنثقة من 1 تصل إلى الموصلات الأخرى وتحدد على سطحها عناصر متقابلة فإن تعميم '(4.4) هو

$$\int_{S_1} \sigma_1 dS_1 = -\left(\int_{S_2} \sigma_2 dS_2 + \ldots + \int_{S_n} \sigma_n dS_n\right) \qquad (4.5)$$

هذه العلاقة هي تعريفاً

$$C_1^1 = -\left(C_1^2 + C_1^3 + \ldots + C_1^n\right) \qquad (4.6)$$

وكل حد من حدود الطرف الثاني سالب. أما إذا لم تكن الإحاطة تامة فإن بعض خطوط الحقل المنبثقة من 1 ستتابع تمددها إلى اللانهاية وشحنة 1 الموجبة C_1^1 أكبر من مجموع الشحنات التي حرضها على الموصلات الأخرى وتصبح (4.6) متراجحة

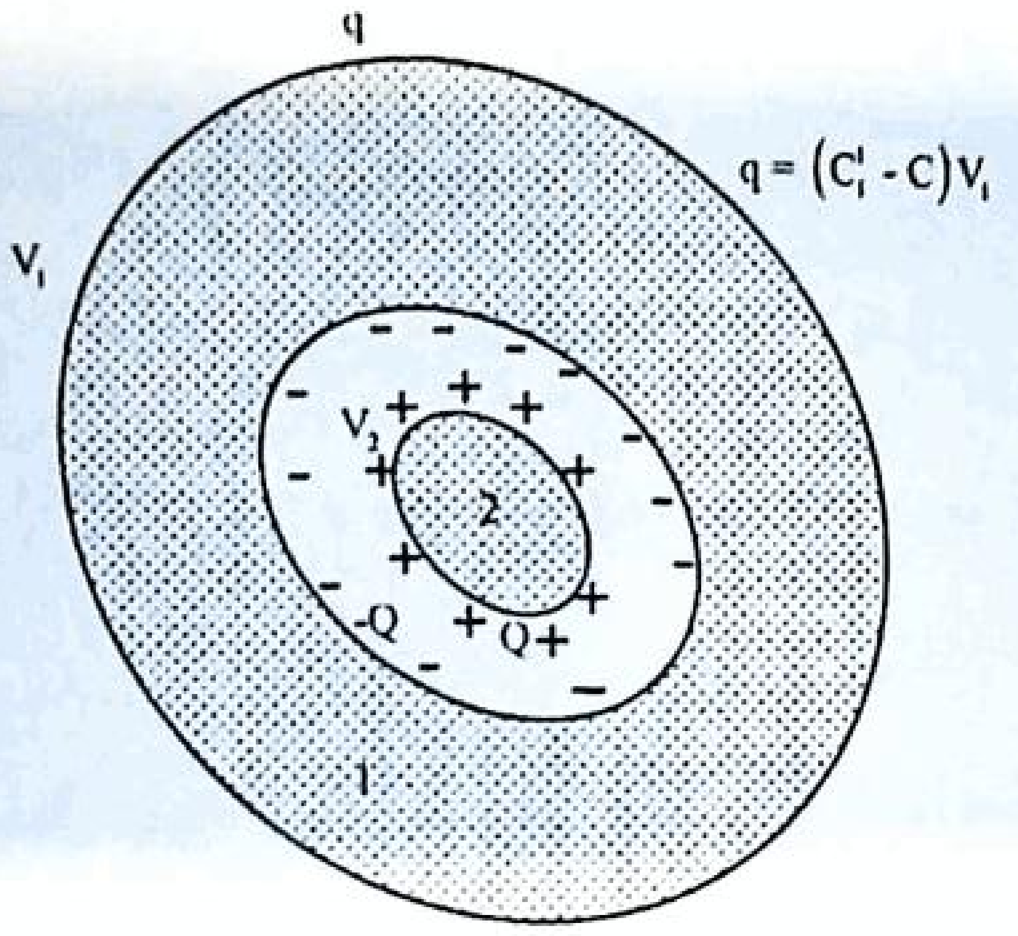
$$C_1^1 \rangle -\left(C_1^1 + C_1^2 + \ldots + C_1^n\right) \qquad (4.7)$$

والخلاصة : إن السعات C_i^i موجبة ومعاملات التأثير سالبة

$$C_i^j = C_j^i \langle 0$$

2.4- سعة المكثفة Condenser, Condendsor (Capacitor)

نسمي مكثفة مجموعة مكونة من موصلين 1 و 2 يحيط أحدهما بالآخر إحاطة تامة أي أن الآخر واقع في تجويف الموصل الأول، الشكل.35. ليكن V_1 و V_2 كموني هذين الموصلين و $V_1 \langle V_2$. يحمل الوجهان المتقابلان حسب مبرهنة العناصر المتقابلة الشحنتين $Q^2 = Q$ و $Q^1 = -Q$.



الشكل.35

لدينا حسب (4.3)

$$\begin{cases} Q^1 = C_1^1 V_1 + C_2^1 V_2 \\ Q^2 = C_1^2 V_1 + C_2^2 V_2 \end{cases} \qquad (4.8)$$

لدينا من كون $C_1^2 = C_2^1$ و $C_2^2 = -C_2^1$ حسب (4.6)

$$Q^2 = Q = C_2^2 (V_2 - V_1)$$

نسمي فرق الكمون $V_2 - V_1 = V$ كمون المكثفة و Q الموجبة شحنة المكثفة و C_2^2 سعة المكثفة ونكتب إذاً

$$Q = CV \qquad (4.9)$$

نكتب شحنة الموصل 1 على الشكل

$$Q^1 = C_1^1 V_1 - CV_2 = -CV + (C_1^1 - C)V_1$$

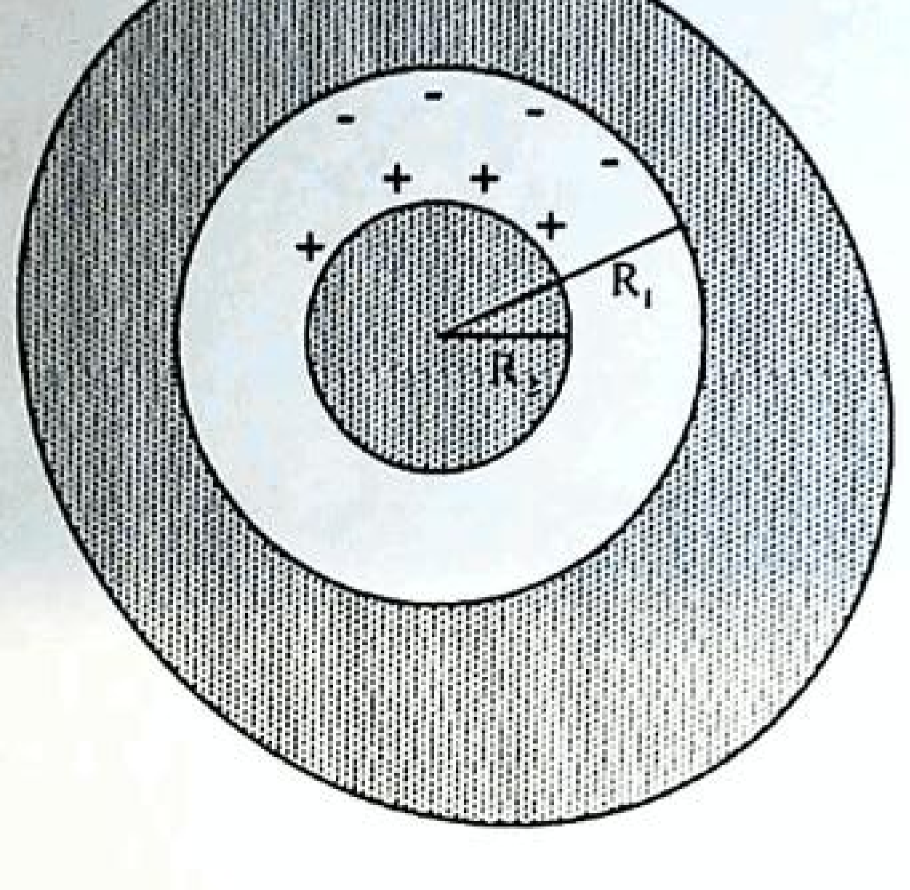
تتكون هذه الشحنة من حدين، أولهما الشحنة الداخلية Q – المقابلة لشحنة الموصل 2 الموجبة $+Q$، والحد الثاني الذي لا يتوقف إلا على كمون الموصل، $(C_1^1 - C)V_1$ هو شحنة السطح الخارجي لهذا الموصل التي لن نعيرها اهتماماً لأن ما يهمنا هو شحنة سطحه الداخلي.

لنحسب سعة بعض المكثفات :

1- المكثفة الكروية : إن كمون الكرة الداخلية ذات نصف القطر R_2 هو $V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$ وكمون التجويف الكري ذي نفس المركز ونصف القطر R_1 للموصل الأول هو $V_1 = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$ ، الشكل.36،

ومنه

$$V = V_2 - V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{Q}{C}$$

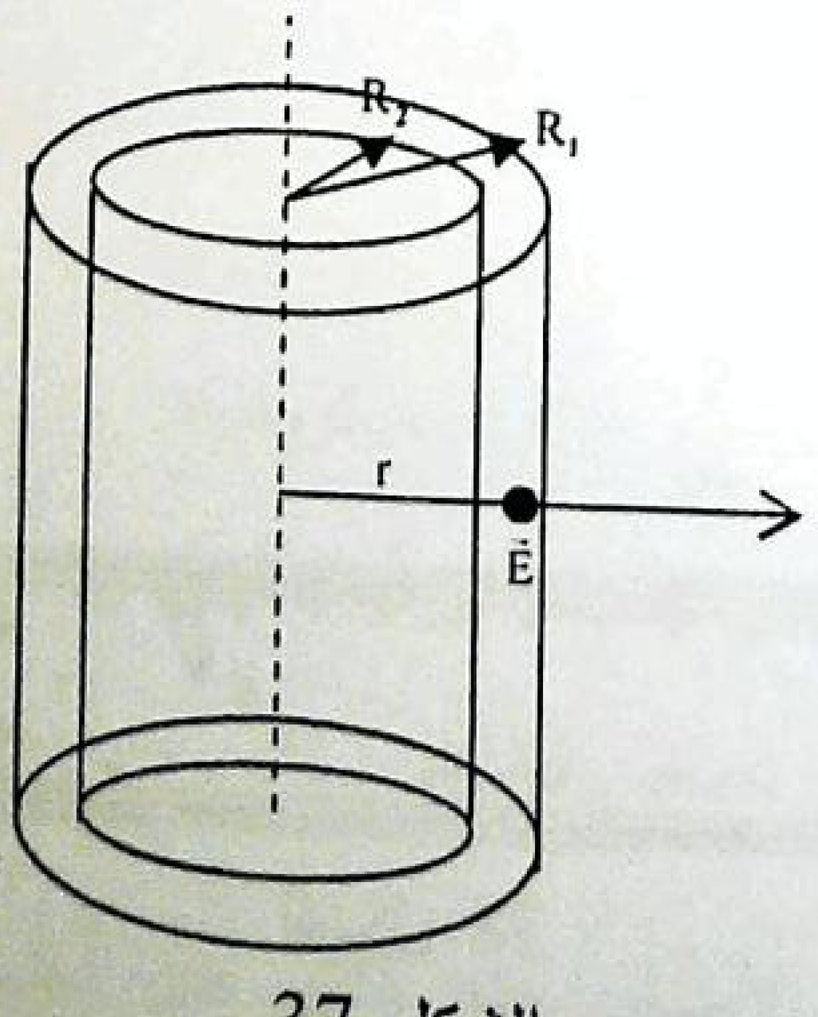


الشكل.36

وسعة هذه المكثفة

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_1 - R_2} \qquad (4.10)$$

2- المكثفة الأسطوانية : يتألف وجها المكثفة من أسطوانتين دورانيتين ذات محور واحد، الشكل.37.



الشكل.37

نحسب سعة المكثفة من أجل جذع محصور بين مقطعين عرضانيين عمودين على المحور تفصلهما المسافة ℓ. نفرض المقطعين بعيدين عن طرفي المكثفة كي نستطيع اعتبار الحقل الكهربائي متناظراً، أي كأنه ناتج عن أسطوانة لامتناهية في الطول وبالتالي عمودي على مولد الإسطوانة. لتكن Q شحنة هذا الجذع وليكن R_1 و R_2 نصفي قطر الإسطوانة الداخلية والخارجية على الترتيب لدينا من أجل أي نقطة r بين هاتين الأسطوانتين، بتطبيق مبرهنة غاوص

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 2\pi r \ell$$

ومنه

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r\ell}$$

و

$$V = V_2 - V_1 = \int_{R_2}^{R_1} E dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \mathrm{Ln}\frac{R_1}{R_2}$$

و

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \ell}{\mathrm{Ln}\frac{R_1}{R_2}} \qquad (4.11)$$

3- المكثفة المستوية : يتألف وجها المكثفة من مستويين معدنيين متوازيين، يطلق عليهما اسم لبوسي المكثفة، تفصلهما مسافة d ولتكن σ كثافة الشحنة الموجبة على اللبوس ذي الكمون الأعلى، نفرض أن d صغيرة أمام أبعاد المستويين بحيث يمكن افتراض الحقل متجانساً لدينا حسب (3.5)، الشكل.38

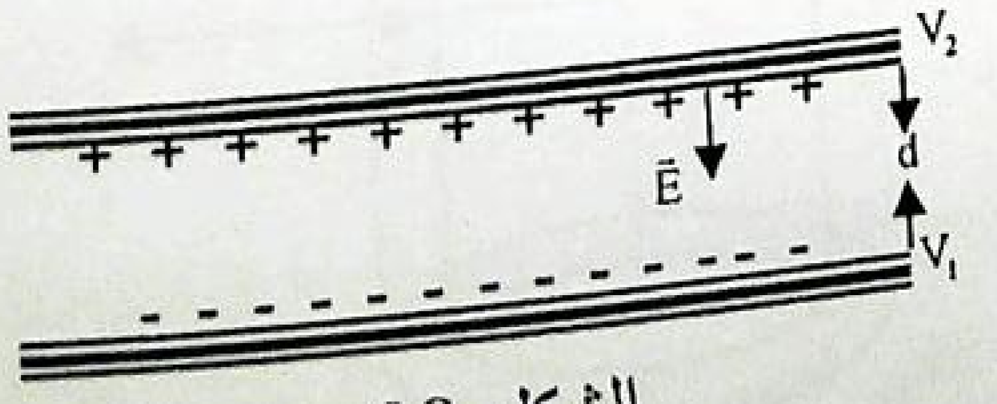
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

و

$$V_2 - V_1 = V = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

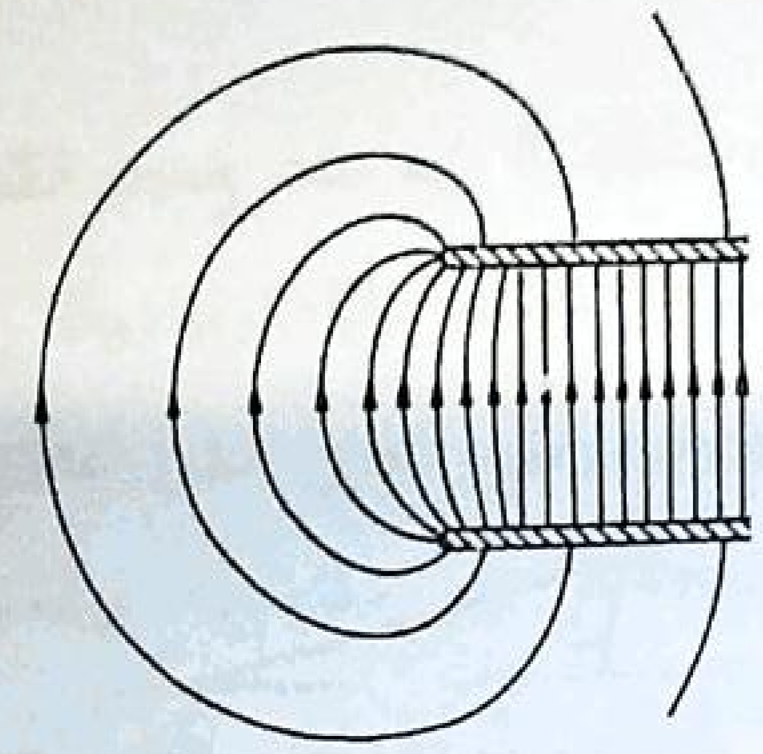
وسعة المكثفة بالتالي هي

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad (4.12)$$



الشكل.38

حيث S سطح المستوي و $Q = \sigma S$. لا تنطبق هذه القيمة لسعة المكثفة على الواقع، فهي تعطي للمستوي سطحاً منتهياً يتناقض مع وجود الحقل المتجانس الناتج عن الأبعاد اللامتناهية للسطح. لنقل إنها لا تنطبق على الواقع لأنها لا تأخذ بعين الاعتبار مفعول حواف المكثفة، تغير الحقل عندما نقترب من حافة السطح المنتهي كما يبين، الشكل.39.



الشكل.39

ترتفع كثافة الشحنة عندما نقترب من حافة اللبوس وبالتالي فإن سعة المكثفة أكبر من المقدار المعطى في (4.12). لن نحسب هنا تغير الكثافة عند الحدود مكتفين بإعطاء المظهر العام لخطوط الحقل في جوار الحد.

إن الغرض من المكثفات هو تخزين الشحنات الكهربائية والتخزين أكبر ما يكون من أجل فرق كمون معين V بين اللبوسين عندما تكون سعة المكثفة أكبر ما تكون. تزداد قيمة السعة (4.12) مثلاً مع ارتفاع سطح اللبوس، وانخفاض المسافة d الفاصلة بين اللبوسين واستبدال السماحية المطلقة للخواء ε_0 بسماحية مادة عازلة تملأ الحجم الفاصل بين اللبوسين ε، أكبر بكثير من ε_0 تسمى السماحية النسبية : إنها النسبة بين السعة بوجود عازل والسعة بدون وجوده، سعة الخواء.

لنعط كمثل عددي مكثفة سطحها 20×20 سم^2، d يساوي مليمتر واحد ويملأ الوسط بين اللبوسين عازل سماحيته $\varepsilon = 2\varepsilon_0$. لدينا بالفاراد في الجملة MKSQ

$$C = \frac{4 \cdot 10^{-2} \times 2}{4\pi 9 \cdot 10^{9}} \frac{1}{10^{-3}} = \frac{2}{9\pi} \cdot 10^{-8}$$

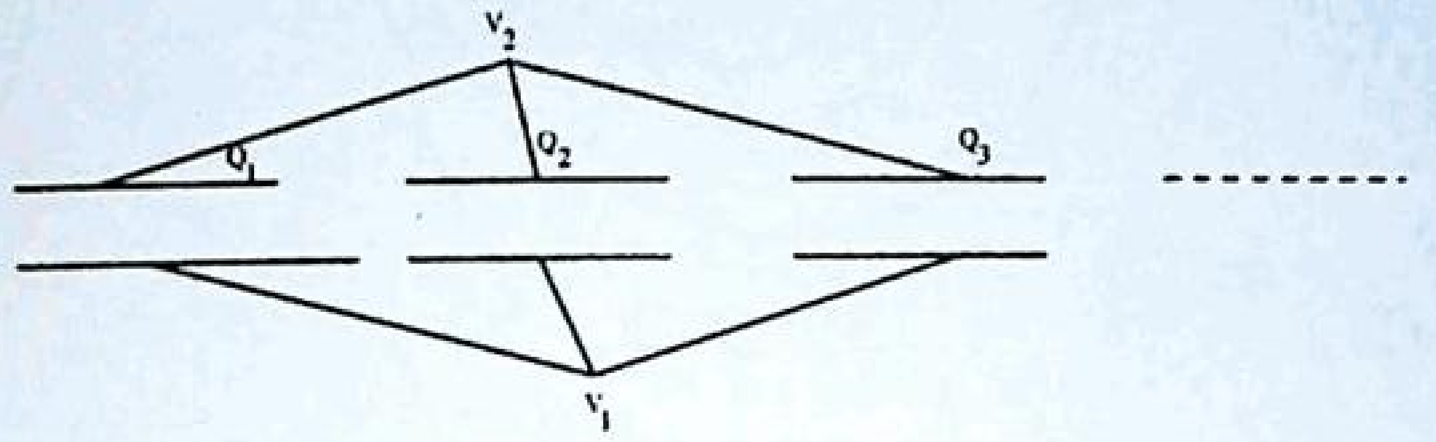
$$C = \frac{2}{9\pi} 10^{-2} \quad \text{ميكروفاراد}$$

يلعب فرق الكمون بين المعدنين المكونين للمكثفة دوراً هاماً في زيادة كمية الشحنة المخزونة. يكفي لرؤية ذلك المقارنة بين كمون كرة معدنية نصف قطرها R_2، $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$، وفرق كمون مكثفة كروية $V = V_2 - V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$ الأصغر منه بكثير من أجل نفس الشحنة؛ إن الكمون الكبير

وبالتالي الحقل الكبير الناتج عنه يؤدي إلى نزع الشحنات عن سطح المعدن، إلى تفريغ السطح المعدني بسهولة أكبر بكثير من تفريغ المكثفة ذات السعة الأكبر : $R_1R_2 \rangle R_1R_2 - R_2^2$.

3.4- ربط المكثفات

يمكن الحصول على سعة كبيرة للمكثفة بجمع عدد من المكثفات، n مكثفة، سعاتها C_1، C_2، C_n... تحت نفس فرق الكمون (الفولتيج) بين اللبوسين، يقال عن هذا التجميع إنه ربط على التوازي، الشكل.40a



الشكل.40a

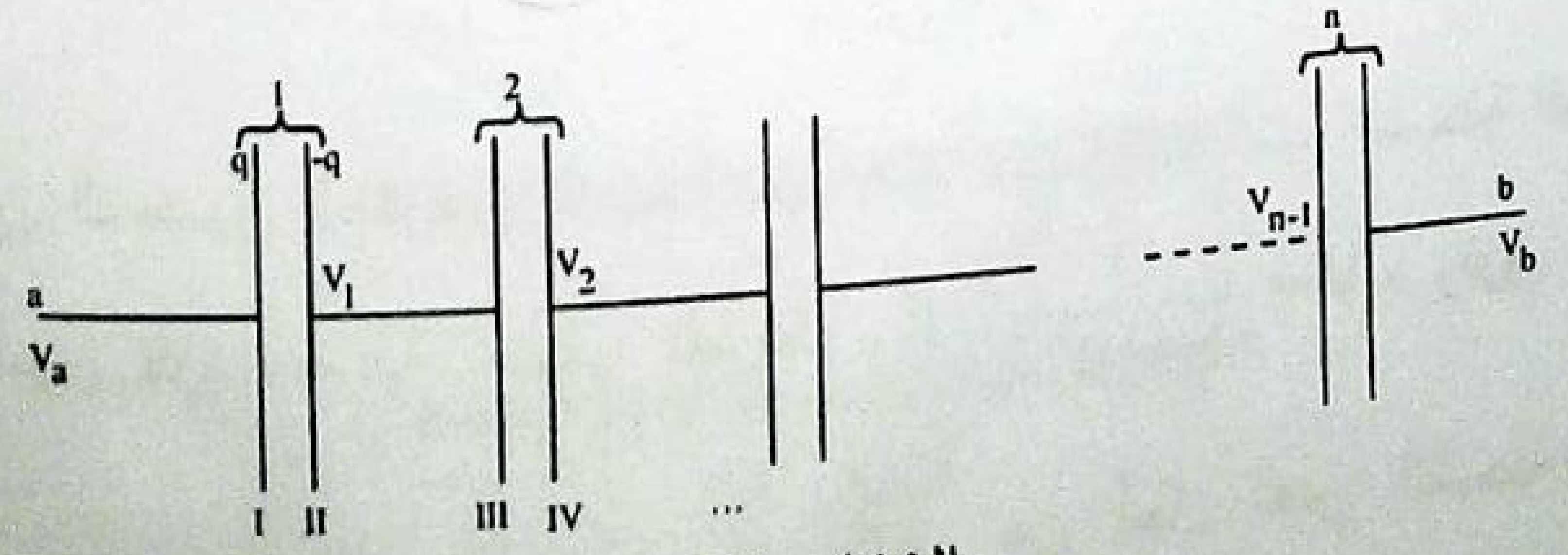
لدينا $Q = Q_1 + Q_2 + ... + Q_n$

نرمز لـ $V_2 - V_1$ بـ V ونكتب سعة المجموعة على الشكل

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1 + Q_2 + ... + Q_3}{V} = C_1 + C_2 + ... + C_n \qquad (4.13)$$

أما إذا كان الحصول على فرق كمون كبير وتجنب تفريغ المكثفة هو المراد، فتجمع المكثفات،وليكن عددها n، على التسلسل بين نقطتين a و b فرق الكمون بينهما $V_a - V_b$ كبير، يشحن لبوس المكثفة الأول المتصل بـ a ونرمز له بـ I بشحنة +q ولبوسها الثاني، II، بالتحريض بشحنة -q. ليكن V_1 كمون اللبوس الثاني للمكثفة الأولى، الشكل.40b، سيحصل الأمر نفسه بالنسبة للمكثفة الثانية حيث فرق الكمون هو $V_1 - V_2$، شحنة اللبوس الأول، ونرمز له بـ III هي +q بالتحريض واللبوس الثاني ونرمز له بـ IV هي -q وهكذا تشحن كل المكثفات بذات الشحنة ولدينا

$$V_a - V_b = (V_a - V_1) + (V_1 - V_2) + ... + (V_{n-1} - V_b) \qquad (4.14)$$



الشكل.40b

يساوي كل فرق كمون $V_i - V_{i+1} = \frac{q}{C_i}$ حيث q هي الشحنة المشتركة و C_i سعة المكثفة i، وبعبارة أخرى، نكتب (4.14) على الشكل

$$V = V_a - V_b = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}\right) \equiv \frac{q}{C} \quad (4.14)'$$

حيث C سعة المكثفة الكلية الواصلة بين a و b

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} \quad (4.15)$$

يتراوح فرق الكمون في المكثفات بين عدة آلاف من الفولتات في المكثفات الكبيرة وبين بضعة فولتات فقط؛ هذه هي حالات الرقاقات الإلكترونية التي تحوي على عدد ملايين من المكثفات تمثل كل واحدة منها العدد 1 أو 0 حسبما تكون مشحونة أو غير مشحونة، ويفصل الموصلين في هذه المكثفات أكسيد السيليكون العازل ذو السماحية النسبية العالية $\varepsilon = 11,8$. إنها أعلى من سماحية الميكا المساوية لـ 7 أو الهواء المساوية لـ 5,4، الخ.

5. الطاقة الكهربائية الراكدة

1.5- طاقة مجموعة من الشحنات

لا تختلف دراسة طاقة مجموعة من الشحنات عن دراسة طاقة مجموعة من الكتل التي قمنا بها في الميكانيك التقليدي، فقوة التفاعل بين الشحنات (قانون كولون) كقوة التفاعل بين الكتل (قانون نيوتن في الجاذبية الكونية) متناسبة مع r^{-2} ومشتقة بالتالي من كمون متناسب مع r^{-1} ومحافظة : الطاقة الكلية لنظمة معزولة ثابتة. وجدنا كذلك أن عمل القوة $\vec{F}$ بين وضعين 1 و 2 مساو لتناقص الطاقة الكامنة وبالتالي فإن العمل الواجب بذله ضد قوى التثاقل (ضد قوى الجاذبية) لجلب الكتلة من الوضع 1 إلى الوضع 2 مساو لارتفاع الطاقة الكامنة. وهكذا فإن ما نقيسه هو فرق الطاقة مما يجعلنا أحراراً في اختيار مبدأ الطاقة الكامنة. وقد اخترنا بالفعل مبدأ الطاقة الكامنة في دراسة حركة الأجسام تحت تأثير الجاذبية الأرضية سطح الأرض وعرفنا الطاقة الكامنة بالمقدار mgz المتناسبة مع الارتفاع عن سطح الأرض واخترنا اللانهاية في الحالة العامة مبدأ لقياس الطاقة الكامنة لأن قوة التفاعل بين كتلتين ما يتناهى إلى الصفر عندما يتناهى البعد بينهما إلى اللانهاية فكتبنا بصورة عامة (((4.3).4).I)

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} \quad (5.1)$$

لنلاحظ عابرين أن حرية الاختيار تعني أن تعريف الطاقة الكامنة بـ mgz مكافئ للتعريف (5.1) ليكن r بعد الكتلة m عن مركز الأرض و r_0 نصف قطر الأرض و M كتلتها التي يمكن تصورها مجتمعة في مركز الأرض، لدينا $r = r_0 + z$

$$mgz = U_2 - U_1 = GmM\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0 + z}\right)$$

$$\simeq \frac{GmMz}{r_0^2} = mgz$$

سنحاكي هنا ما فعناه في الميكانيك فنعتبر سطح الأرض في الحالات الخاصة مبدأ لحساب الكمون : $V = 0$ على سطح الأرض مذكرين أن شحنة سطح الأرض سالبة نتيجة مئات الصواعق ذات الشحنة السالبة التي تسقط عليها يومياً، ونعتبر اللانهاية مبدأ لحساب الكمون في الحالة العامة ونعرف الطاقة الكامنة بقولنا

تعريف 5 :

إن الطاقة الكامنة لشحنتين q_1 و q_2 هي العمل الواجب بذله، ضد القوى الكهربائية الراكدة الناتجة عن q_1، لجلب الشحنة q_2 من اللانهاية إلى مسافة تبعد r_{12} عن q_1 أي أنها

$$-\int_{1(\infty)}^{2(r_{12})} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

وهكذا فالطاقة هي، كما وجدنا في (2.9)

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} \qquad (5.2)$$

إنها نظيرة (5.1) وإشارتها سالبة عندما تتجاذب الشحنتان من إشارتين مختلفتين كالكتل ولكنها موجبة عندما تتنابذ الشحنتان ذات الإشارة الواحدة.

يتيح مبدأ التوضيع تعميم (5.2) إلى حالة عدد من الشحنات q_i، $i = 1, 2, \ldots, n$، فالقوة المؤثرة على الشحنة q_i هي مجموع القوى الناتجة عن الشحنات q_j، $j = 1, 2, \ldots, n$ و $i \neq j$ والطاقة الكامنة الكلية هي مجموع طاقات التفاعل بين الشحنات زوجاً زوجاً، نكتب كل طاقة منها على الشكل (5.2)

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \qquad (5.2)'$$

و

$$U = \sum_{\text{كل الأزواج}} U_{ij} \qquad (5.3)$$

نعلم أن الجمع على الأزواج هو نصف الجمع على كل الحدود :

$$\sum_{i,j} = \sum_i \sum_{j \neq i} = \sum_i \left(\sum_{j \rangle i} + \sum_{j \langle i} \right) = 2 \sum_{\text{كل الأزواج}}$$

ذلك أننا لا نهتم في الجمع على كل الأزواج، على الزوج 3، 5 مثلاً على ترتيب هذين الرقمين و

$$\sum_{\text{كل الأزواج}} = \sum_i \sum_{j \rangle i} = \sum_i \sum_{j \langle i}$$

نكتب الطاقة الكامنة إذاً على الشكل

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \qquad (5.3)'$$

لنلاحظ أن طاقة التفاعل (5.2) هي جداء الكمون الناتج عن q_1 في النقطة r_{12} حيث الشحنة q_2، ولنرمز له بـ V_2، بالشحنة q_2 فنكتب

$$U = V_2 q_2 \qquad (5.4)$$

وهي طبعاً جداء الكمون الناتج عن q_2 في النقطة، حيث الشحنة q_1، ولنرمز له بـ V_1، بالشحنة q_1

$$U = V_1 q_1 \qquad (5.4)'$$

نكتب '(5.3) على الشكل

$$U = \frac{1}{2} \sum_i V_i \cdot q_i \qquad (5.3)''$$

لنفرض الآن أن لدينا توزعاً متصلاً للشحنات كثافته ρ وأنه ينتج في نقطة ما، M، من الفضاء الذي يحتله التوزع كموناً نرمز له بـ V. إن الطاقة في النقطة M حيث الشحنة هي $dq = \rho d\tau$، $d\tau$ عنصر الحجم في هذه النقطة، هي حسب (5.4)

$$dU = V\rho d\tau \qquad (5.5)$$

يمكننا نظراً لمبدأ التوضيع اعتبار هذه الحالة ناتجة عن سلسلة من الحالات المعينة بالكثافة ρx، حيث x متغير في المجال $[0, 1]$، وبالكمون Vx والطاقة الكامنة في هذه الحالة هي عوضاً عن (5.5)

$$\rho x d\tau \cdot Vx = x dq \cdot Vx$$

عندما ينتقل المتغير المتصل x من x إلى $x + dx$ فإننا نكون قد أضفنا إلى عنصر الحجم الشحنة الإضافية

$$\left[\rho \cdot (x + dx) - \rho \cdot x\right] d\tau = \rho dx d\tau = dq dx$$

حيث أصبح الكمون $V \cdot (x + dx)$ والطاقة الكامنة لهذه الشحنة الإضافية هي، بإهمال ما هو من الدرجة الثانية بالعنصر التفاضلي dx :

$$V \cdot (x + dx) dq dx = V dq x dx = V\rho d\tau x dx$$

نحصل على الطاقة الكامنة الكلية لهذا التوزع المتصل بمكاملة هذه العلاقة من أجل كل الحجم τ الذي تحتله نظمة الشحنات المتصلة ومن أجل المتغير x على المجال $[0, 1]$

$$U = \int_0^1 x dx \cdot \iiint_\tau V\rho d\tau = \frac{1}{2} \iiint_\tau V dq \qquad (5.6)$$

ذلك أننا لا نهتم في الجمع على كل الأزواج، على الزوج 3، 5 مثلاً على ترتيب هذين الرقمين و

$$\sum_{\text{كل الأزواج}} = \sum_{i}\sum_{j\rangle i} = \sum_{i}\sum_{j\langle i}$$

نكتب الطاقة الكامنة إذاً على الشكل

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \qquad (5.3)'$$

لنلاحظ أن طاقة التفاعل (5.2) هي جداء الكمون الناتج عن q_1 في النقطة r_{12} حيث الشحنة q_2، ولنرمز له بـ V_2، بالشحنة q_2 فنكتب

$$U = V_2 q_2 \qquad (5.4)$$

وهي طبعاً جداء الكمون الناتج عن q_2 في النقطة، حيث الشحنة q_1، ولنرمز له بـ V_1، بالشحنة q_1

$$U = V_1 q_1 \qquad (5.4)'$$

نكتب '(5.3) على الشكل

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i} V_i \cdot q_i \qquad (5.3)''$$

لنفرض الآن أن لدينا توزعاً متصلاً للشحنات كثافته ρ وأنه ينتج في نقطة ما، M، من الفضاء الذي يحتله التوزع كموناً نرمز له بـ V. إن الطاقة في النقطة M حيث الشحنة هي $\rho d\tau = dq$، $d\tau$ عنصر الحجم في هذه النقطة، هي حسب (5.4)

$$dU = V\rho d\tau \qquad (5.5)$$

يمكننا نظراً لمبدأ التوضيع اعتبار هذه الحالة ناتجة عن سلسلة من الحالات المعينة بالكثافة ρx، حيث x متغير في المجال $[0, 1]$، وبالكمون Vx والطاقة الكامنة في هذه الحالة هي عوضاً عن (5.5)

$$\rho x d\tau \cdot Vx = x dq \cdot Vx$$

عندما ينتقل المتغير المتصل x من x إلى $x + dx$ فإننا نكون قد أضفنا إلى عنصر الحجم الشحنة الإضافية

$$\left[\rho \cdot (x + dx) - \rho \cdot x\right] d\tau = \rho dx d\tau = dq dx$$

حيث أصبح الكمون $V \cdot (x + dx)$ والطاقة الكامنة لهذه الشحنة الإضافية هي، بإهمال ما هو من الدرجة الثانية بالعنصر التفاضلي dx :

$$V \cdot (x + dx) dq dx = V dq x dx = V\rho d\tau x dx$$

نحصل على الطاقة الكامنة الكلية لهذا التوزع المتصل بمكاملة هذه العلاقة من أجل كل الحجم τ الذي تحتله نظمة الشحنات المتصلة ومن أجل المتغير x على المجال $[0, 1]$

$$U = \int_0^1 x dx \cdot \iiint_\tau V\rho d\tau = \frac{1}{2}\iiint_\tau V dq \qquad (5.6)$$

لا تختلف هذه العلاقة في شيء عن العلاقة "(5.3)، استبدلنا الجمع على كل الشحنات بالتكامل على الحجم الموجودة فيه ويظهر المعامل $\frac{1}{2}$ هنا بشكل طبيعي لأننا نكامل على الشحنات زوجاً زوجاً.

2.5- كثافة الطاقة الكهربائية الراكدة

تحدثنا في دراستنا للترموديناميك عن غراديان درجة الحرارة – وهي طاقة كما نعلم –، أي عن تغير الطاقة بين نقطة وأخرى في الفضاء. هذا يعني أن للطاقة كثافة معينة في مختلف نقاط الفضاء وأن انخفاظها هو التعادل بين تغير هذه الكثافة في واحدة الزمن وبين تدفق الطاقة في حجم معين؛ وسنعود بالتفصيل إلى معادلة الانحفاظ، المعروفة بمعادلة الاستمرارية عندما ندرس الظواهر المتغيرة مع الزمن. تحدثنا أيضاً عن كثافة الإشعاع، أي عن عدد الفوتونات ذات التواتر المحدد في واحدة الحجوم. ثم إن معرفة الموضع الذي توجد فيه الطاقة أمر لا غنى عنه عند دراسة نظرية التثاقل، النسبية العامة، لأن الطاقة مكافئة للكتلة حسب العلاقة $E = mC^2$ ولأن موضع الكتل هو الذي يعين حقل التثاقل وتحدب الزمان–المكان في هذا الموضع. وهكذا يلزم معرفة كثافة الطاقة الكهرطيسية أيضاً إذا ما أردنا توحيد كل التفاعلات في نظرية واحدة. سنبدأ إذاً بإعطاء كثافة الطاقة الكهربائية، لدينا

قضية 4 :

إن طاقة نظمة شحنات متصلة U المعطاة بالعلاقة (5.6) هي

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint \left(\bar{E} \cdot \bar{E}\right) dxdydz \qquad (5.7)$$

والتكامل هو على الحجم، أياً كان حيث يوجد الحقل الكهربائي وبالتالي فإن كثافة الطاقة، ونرمز لها بـ u، هي

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \qquad (5.8)$$

لنكتب (5.6) انطلاقاً من معادلة الكهربائية الراكدة الأولى (2.1) ومن (2.4) : $\rho = -\varepsilon_0 \nabla^2 V$ ولنحول المقدار تحت إشارة التكامل في (5.6) $V\nabla^2 V$ معتمدين على المتطابقة الصحيحة من أجل أي مقدارين سلميين $a(x, y, z)$ و $b(x, y, z)$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(a\vec{\nabla}b\right) \equiv \vec{\nabla}a \cdot \vec{\nabla}b + a\nabla^2 b \qquad (5.9)$$

التي نتحقق منها بسهولة.

لدينا تعريفاً $a\vec{\nabla}b = \begin{pmatrix} a\frac{\partial b}{\partial x} \\ a\frac{\partial b}{\partial y} \\ a\frac{\partial b}{\partial z} \end{pmatrix}$ ومركبات التباعد $\vec{\nabla}\cdot$ هي

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial b}{\partial x}\right) = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial x} + a\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$$
$$\vdots$$

ومنه المتطابقة؛ نكتبها من أجل $a = b = V$

$$V\nabla^2 V = \vec{\nabla}\cdot\left(V\vec{\nabla}V\right) - \left(\vec{\nabla}V\right)\cdot\left(\vec{\nabla}V\right) \tag{5.9'}$$

ما من شيء يمنع من كتابة التكامل (5.6) من أجل حجم يمتد على كل الفضاء ($\rho = 0$ خارج الحجم τ) واستعمال مبرهنة غاوص من أجل الحد الأول في الطرف الثاني من '(5.9)

$$U = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int\left(V\vec{\nabla}V\right)\cdot d\vec{S} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int\left(\vec{\nabla}V\right)\cdot\left(\vec{\nabla}V\right)dxdydz$$

إن التكامل على السطح الممتد إلى اللانهاية يساوي الصفر لأن الكمون، المتناسب مع $\frac{1}{r}$، وغراديانه، المتناسب مع $\frac{1}{r^2}$ وجداءهما بعنصر السطح المتناسب مع r^2 يتناهى إلى $\frac{1}{r}$ أي إلى الصفر في كل نقطة من هذا السطح ويبقى إذاً

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int\left(\vec{E}\cdot\vec{E}\right)dxdydz$$

والتكامل على حجم لامنته في الأبعاد ونكون قد برهنا القضية.

لنحسب انطلاقاً من هذه القضية طاقة شحنة نقطية q. إن الحقل الناتج عنها في أي نقطة من الفضاء هو $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ وكثافة الطاقة في هذه النقطة هي

$$\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$$

وطاقتها الكلية بأخذ عنصر حجم $4\pi r^2 dr$ (سطح كرة مضروباً بـ dr) هي

$$U = \int_0^\infty \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \left[-\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r}\right]_0^\infty \tag{5.10}$$

إنها طاقة لامتناهية وبالتالي فهي غير مقبولة. لنلاحظ أولاً أن الحديث عن طاقة شحنة نقطية يناقض التعريف 5 الذي أعطيناه للطاقة كطاقة تفاعل بين شحنتين. لنحاول تجنب هذا التناقض بأن نتصور العمل المبذول لتجميع شحنة Q في كرة نصف قطرها R بجلب شحنات لامتناهية في الصغر من اللانهاية وتجميعها بشكل متجانس، بكثافة ثابتة ρ. لنفرض أننا بنينا كرة نصف قطرها r، شحنتها

وأننا جئنا بشحنة إضافية dQ تملأ الحجم الإضافي $4\pi r^2dr$، $dQ=\rho 4\pi r^2dr$، طاقة $Q_r=\frac{4\pi r^3}{3}\rho$ التفاعل بين Q_r و dQ هي

$$dU=\frac{Q_r dQ}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{4\pi\rho^2r^4}{3\varepsilon_0}dr$$

والطاقة الكلية هي العمل الواجب بذله لتجميع الطبقات من $r=0$ إلى R

$$U=\int_0^R\frac{4\pi\rho^2r^4dr}{3\varepsilon_0}=\frac{4\pi\rho^2R^5}{15\varepsilon_0}$$

نعبر عنها بدليل الشحنة الكلية $\rho=\frac{Q}{\frac{4\pi}{3}R^3}$ لنجد

$$U=\frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad (5.11)$$

نسمي هذه الطاقة الطاقة الكهربائية الراكدة الذاتية على نسق ما فعلناه في الميكانيك حيث سمينا المقدار (I.(4.(4.12)'))

$$U=-\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

طاقة التثاقل الذاتية – G حلت محل $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ – والطاقة سالبة لأن جلب الكتل من اللانهاية لم يتطلب أي عمل ضد قوى الجاذبية. لنلاحظ أن هذه الطاقة الذاتية سواء كانت طاقة تثاقل أو طاقة كهربائية راكدة تتناهى إلى اللانهاية عندما يتناهى نصف القطر R إلى الصفر. تخلصنا إذاً من التناقض مع التعريف 5 بإدخال مفهوم الطاقة الذاتية Self energy، ولكن المشكل يبقى قائماً ما لم ننبذ مفهوم النقطة ذات الشحنة (أو الكتلة) المنتهية وننبذ معها مفهوم الشحنة اللامتناهية في الصغر، خاصة وأننا نعلم أن أصغر شحنة – في الفيزياء النووية والذرية على الأقل – هي شحنة الإلكترون المنتهية $1,6\cdot10^{-19}$ كولون وإنها في فيزياء الجسيمات تحت النووية الكواركات هي ثلث أو ثلثي هذه الشحنة. لم يحل الميكانيك الكمومي مسألة الطاقة الذاتية – مسألة تفاعل الإلكترون مثلاً مع الحقل الكهربائي $\vec{E}$ الذي ينتجه، ولم تحل هذه المسألة إلا في إطار نظرية الحقول المكممة وبشكل لم يرض بعض أشهر الفيزيائيين وعلى رأسهم ديراك.

3.5- طاقة المكثفات

لنكتب العلاقة "(5.3) من أجل مجموعة من الموصلات ذات الشحنة Q_i والكمون V_i

$$U=\frac{1}{2}\sum_i Q_iV_i$$

ولنطبقها على مكثفة مستوية شحنتها Q وكمون لبوسيها V_1 و V_2

$$U = \frac{1}{2}(QV_2 - QV_1) = \frac{1}{2}QV \qquad (5.12)_1$$

وبأخذ سعة المكثفة بعين الاعتبار $C = \frac{Q}{V}$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad (5.12)_2$$

لنلاحظ أن هذه الطاقة هي الطاقة اللازمة لشحن المكثفة، أي لنقل الشحنة من اللبوس 1 إلى اللبوس 2، لدينا

$$dU = VdQ = \frac{QdQ}{C}$$

ومنه $(5.12)_2$. تذكر صيغ الطاقة الثلاث المعطاة في $(5.12)_{1,2}$ بمثيلاتها في الميكانيك التقليدي

$$U = \frac{1}{2}vp = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

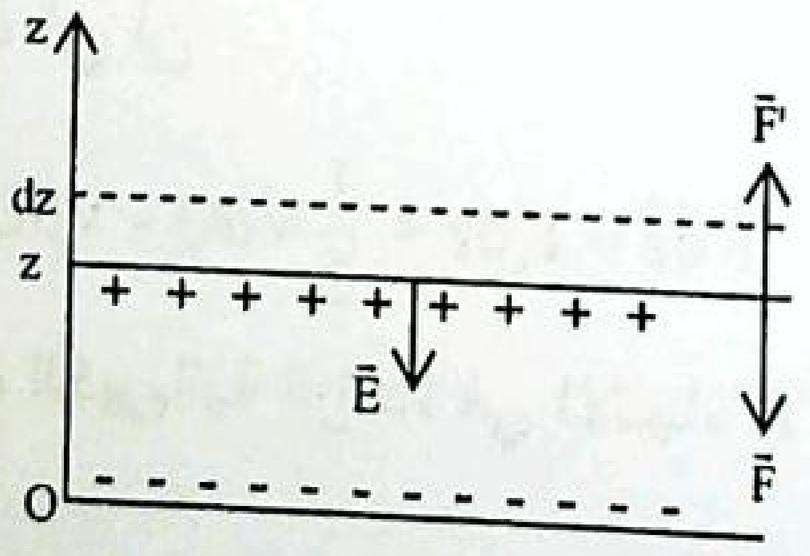
تلعب الشحنة دور السرعة v والكمون دور الاندفاع والسعة دور مقلوب الكتلة $\frac{1}{m}$، وفي كلتا الحالتين فالطاقة هي جداء مقدار جمعي (امتدادي) السرعة–الشحنة، السعة–الكتلة بمقدار شدي الاندفاع–الكمون، مربع السرعة–مربع الشحنة، مربع الاندفاع–مربع الكمون.

إن الطاقة اللازمة لشحن كرة معدنية، سعتها (4.2) $C = 4\pi\varepsilon_0 R$، هي

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

إنها طاقة شحنة سطحية، على خلاف الطاقة الذاتية (5.11) التي هي طاقة كرة ممتلئة، ولكنها تساوي خمس أسداس هذه الطاقة.

لنحسب عمل القوة المطبقة $\vec{F}'$ ضد القوى الكهربائية الجاذبة $\vec{F}$ لإبعاد أحد لبوسي المكثفة عن الآخر وليكن اللبوس ذا الشحنة الموجبة، الشكل.41



الشكل.41

إن عمل هذه القوة هو تعريفاً ارتفاع الطاقة الكامنة

$$\vec{F}' \cdot \overline{dz} = F'dz = \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

ومن (5.12)

$$F'dz = \frac{Q^2}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{C}\right)dz = -\frac{Q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial z}dz \qquad (5.14)$$

إن $\frac{1}{C} = \frac{z}{\varepsilon_0 S}$ حسب (4.12)، مشتقة $\frac{1}{\varepsilon_0 S}$، وبالتالي فإن القيمة المطلقة للقوة الكهربائية الراكدة $\vec{F}'$- بين لبوسي المكثفة هي

$$|F| = -\frac{Q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial z} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \qquad (5.15)$$

هذه القوة متناسبة مع الحقل الكهربائي المساوي بالقيمة المطلقة لـ $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$، حيث σ هي الكثافة السطحية و $Q = \sigma S$ ولدينا، بأخذ $\vec{e}_z$ كمتجهة واحدية على Oz

$$\vec{F} = -\frac{Q\sigma \cancel{S}}{2\varepsilon_0 \cancel{S}}\vec{e}_z = \frac{1}{2}Q\vec{E} \qquad (5.16)$$

ولدينا بطبيعة الحال $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$: $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{Q^2}{2C^2}$.

ملاحظة هامة :

لم نستعمل العلاقة الأولى في (5.12) $U = \frac{1}{2}CV^2$ لحساب $\vec{F}'$ أو $\vec{F}$ لأن هذه العلاقة تفرض فرق الكمون ثابتاً عند اشتقاق C على الرغم من إبعاد اللبوسين عن بعضهما. يجب لإبقاء هذا الفرق ثابتاً ربط المكثفة بمنبع كهربائي، ولم يعد من الممكن القول إن النظمة معزولة وإن عمل القوة الكهربائية الجاذبة بين اللبوسين مشتق من الطاقة الكامنة : $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$. لتكن VdQ الطاقة التي قدمها المنبع بإعطائه الشحنة dQ التي أبقت فرق الكمون مساوياً لـ V وهكذا فإن تغير U ، dU ناتج عن هذه الطاقة وعن عمل القوة المطبقة $\vec{F}'$ كما أعلاه ولدينا

$$VdQ + \vec{F}' \cdot \overline{dz} = dU$$

ولكن $U = \frac{1}{2}QV$ و $dU = \frac{1}{2}VdQ$، أي أن

$$\vec{F}'\overline{dz} = F'_z dz = \frac{1}{2}VdQ - VdQ = -\frac{1}{2}VdQ = \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

لكن عمل هذه القوة يساوي لعمل القوة الكهربائية الراكدة في الاتجاه الآخر $F'_z dz = F_z - dz$

ومنه

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

كما أعلاه ونكتبه بدليل $\frac{1}{2}CV^2$ على الشكل

$$F_z = \frac{1}{2}V\frac{\partial C}{\partial z} \equiv \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{\partial C}{\partial z}$$

لنلاحظ أخيراً أن كثافة الطاقة في الحجم بين اللبوسين هي $\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ لأن

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{z}z^2E^2$$

$$= \frac{1}{2}\tau\varepsilon_0 E^2$$

حيث $Sz = \tau$ هو الحجم الكلي بين اللبوسين.

ملحق 1

مبرهنة ستوكس

يكتب الشكل العام لمبرهنة ستوكس Stokes على النحو التالي : لتكن ω n-1 صيغة تفاضلية : $\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \omega_i dx^1 \dots \times d\check{x}^i \dots \times dx^n$ حيث v تعني عدم وجود هذا الحد.

إن $d\omega = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \times \dots dx^i \times dx^n$ هي n صيغة تفاضلية، إن $\int_\Gamma d\omega = \int_{\partial\Gamma} \omega$ ($\partial\Gamma$ هو كل ما يحدد الحجم Γ) ونبرهنها على النحو التالي :

ليكن لدينا في المستوي (x^1, x^2) صيغة تفاضلية خطية

$$\omega = \omega_1(x^1, x^2)dx^1 + \omega_2(x^1, x^2)dx^2 \quad (1)$$

إن

$$d\omega = \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \times dx^2 \quad (2)$$

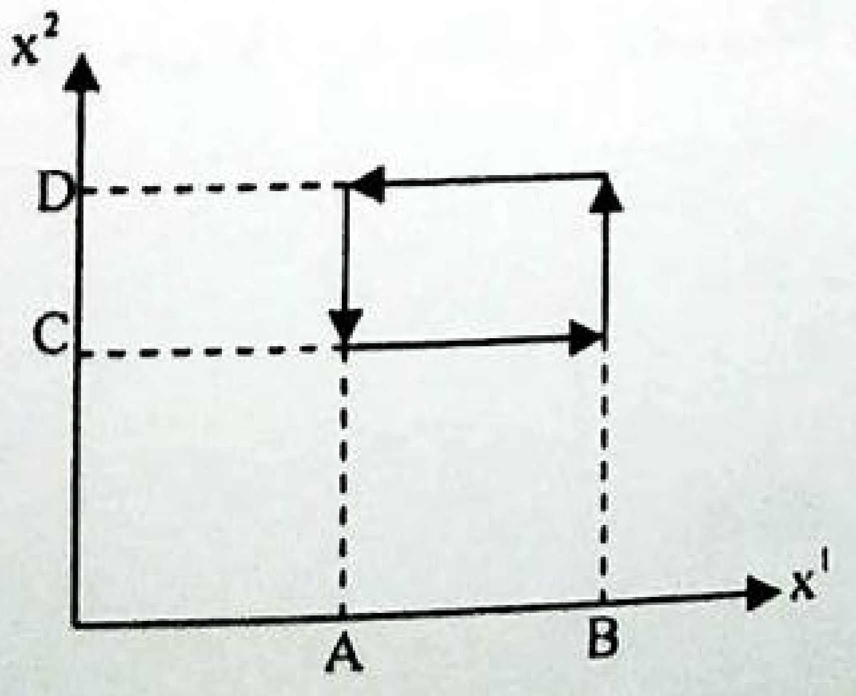
و $dx^1 \times dx^2$ هو عنصر السطح dx^1dx^2.

نكامل هذه الـ 2– صيغة على مستطيل، نرمز له بـ S، أضلاعه موازية للمحورين المتعامدين لدينا بمكاملة الحد الأول من أجل x^2 ثابتة

$$\iint \frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} dx^1dx^2 = \int_C^D \left[\omega_2(B, x^2) - \omega_2(A, x^2)\right] dx^2$$

وبمكاملة الحد الثاني من أجل x^1 ثابتة

$$\iint \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} dx^1dx^2 = \int_A^B \left[\omega_1(x^1, D) - \omega_1(x^1, C)\right] dx^1$$



والفرق بين هذين التكاملين هو

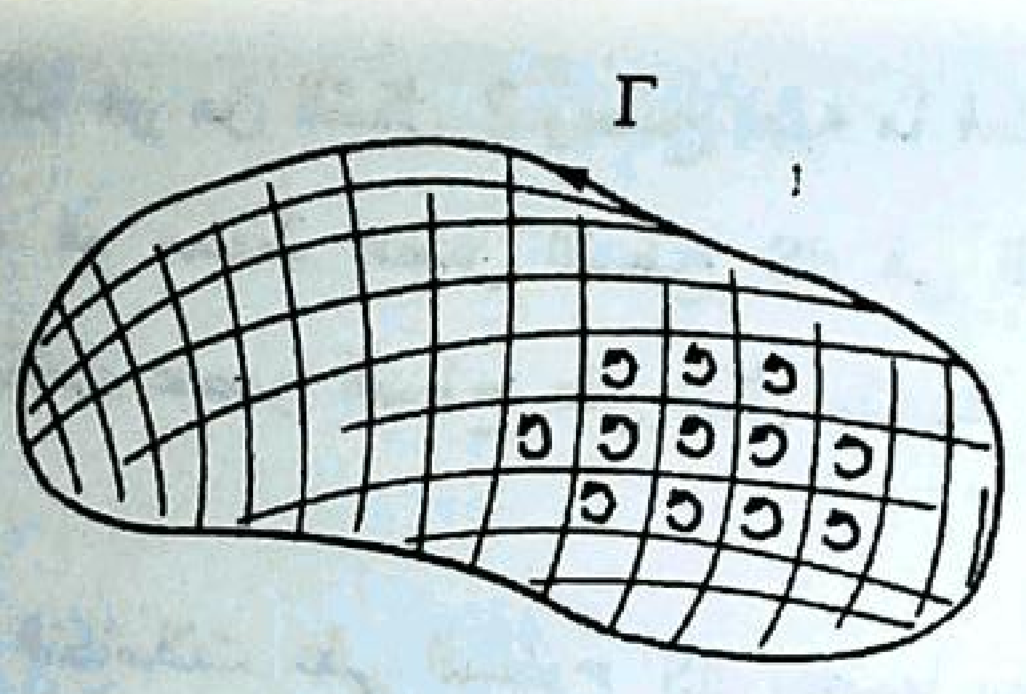
$$\int_A^B \omega_1(x^1, C)dx^1 + \int_C^D \omega_2(B, x^2)dx^2 + \int_B^A \omega_1(x^1, D)dx^1 + \int_D^C \omega_2(A, x^2)dx^2$$

وهكذا فإن

$$\iint_S d\omega = \iint_S \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2}\right) dx^1 dx^2 = \oint \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 \qquad (3)$$

ونكون قد أثبتنا مبرهنة ستوكس في هذه الحالة الخاصة، ملاحظين أنه لا فرق بين وضع $(-1)^{i-1}$ في تعريف ω أو وضعه في تعريف $d\omega$.

يمكن تعميم هذه النتيجة من أجل أي سطح في المستوي (x^1, x^2) نقسمه إلى مستطيلات، تعدم التكاملات عليها بعضها بعضاً في داخل السطح – على أن نأخذ اتجاه دوران مشترك بينها – ولا يبقى إلا التكامل على المحيط Γ.



أما عندما تكون الصيغة الخطية في فضاء بثلاثة أبعاد :

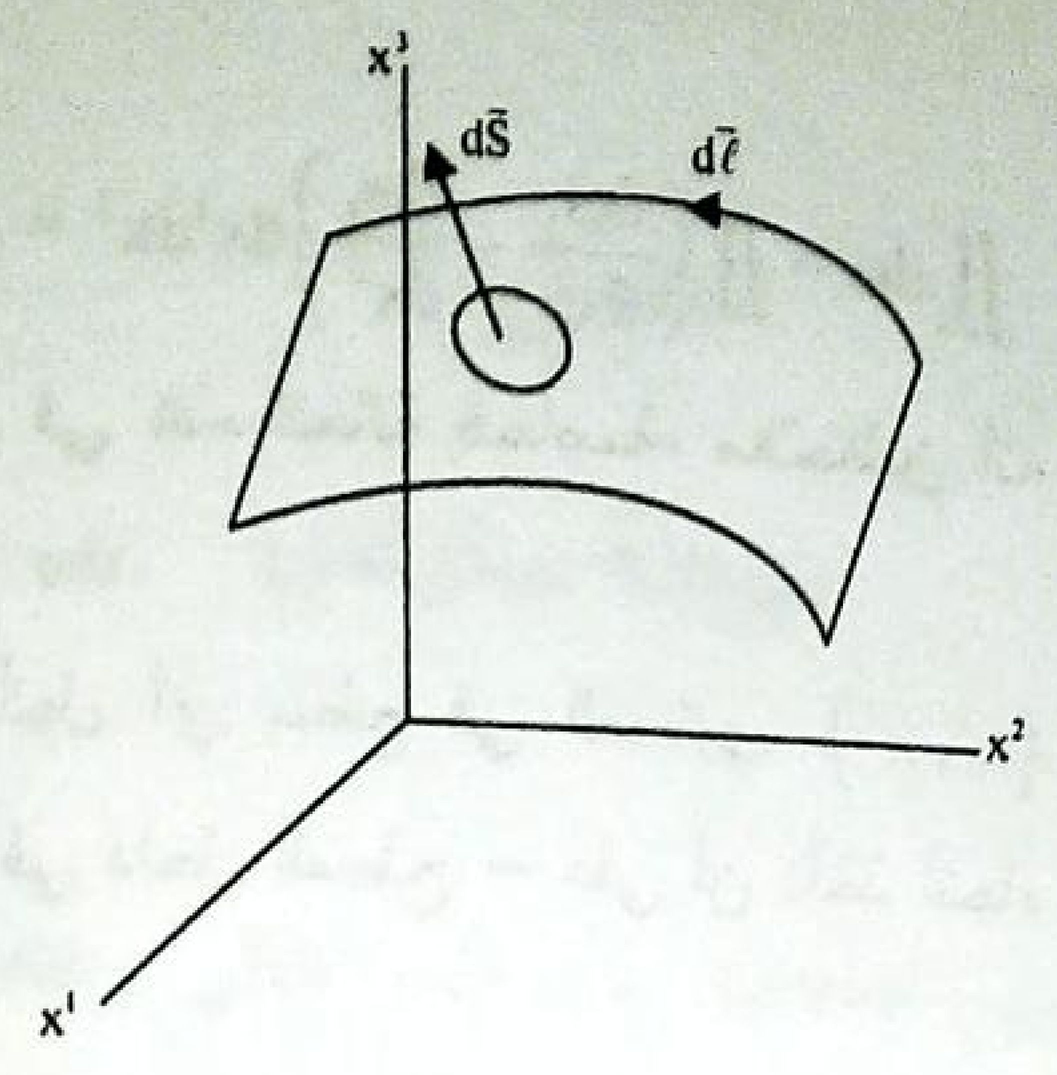
$$\omega = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \left(x^1, x^2, x^3\right) dx^i \qquad (4)$$
$$= \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \omega_3 dx^3$$

فإن الـ 2– صيغة هي

$$d\omega = \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} dx^2 \times dx^1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x^3} dx^3 \times dx^1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} dx^1 \times dx^2$$
$$+ \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3} dx^3 \times dx^2 + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^1} dx^1 \times dx^3 + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^2} dx^2 \times dx^3$$

لنلاحظ أن $dx^1 \times dx^2$، المستطيل في المستوي (x^1, x^2)، هو المتجهة dx^3؛ $dx^2 \times dx^1$ المتجهة $-dx^3$ ولدينا نفس الملاحظة بالنسبة للمستطيلين الآخرين. نرتب $d\omega$ على النحو التالي

$$d\omega = \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3}\right) dx^2 \times dx^3 + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x^1}\right) dx^3 \times dx^1 \qquad (5)$$
$$+ \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \times dx^2$$



إن كل حد من هذه الحدود الثلاثة هو من الشكل 2 ويصح عليه ما فعلناه في 3، ومن جهة أخرى فإن كل عنصر تفاضلي $dx^i \times dx^j$ هو مسقط عنصر السطح dS في الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة على المحور x^k (i, j, k) دواري. نكتب عنصر السطح على شكل متجهة عمودية عليه (مركباتها عمودية على مساقطه).

$dS^k = dx^i \times dx^j$: dS. تعدم التكاملات على السطوح dS بعضها بعضاً ولا يبقى إلا التكامل على محيط السطح S. نكتب $d\omega$ على الشكل

$$d\omega = \left(\vec{\nabla} \times \vec{\omega}\right) \cdot d\vec{S} \qquad (5)'$$

ولدينا

$$\iint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{\omega}\right) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{\omega} \cdot d\vec{\ell} \qquad (6)$$

لنلاحظ أن أبعاد الفضاء لا تلعب أي دور في وضع $d\omega$ على شكل مجموع حدود من الشكل 2. إنها ثلاث هنا و n في فضاء ذي n بعداً ونكون قد أثبتنا مبرهنة ستوكس في الانتقال من 1 – صيغة إلى 2– صيغة ونقبل تعميمها.

ليكن لدينا 2– صيغة، عناصرها التفاضلية في الفضاء ذي الثلاثة أبعاد هي $dS^k = dx^i \times dx^j$. نكتب هذه الصيغة حسب التعريف على الشكل

$$\omega = \omega_1 dx^2 \times dx^3 - \omega_2 dx^1 \times dx^3 + \omega_3 dx^1 \times dx^2 \qquad (7)$$

ولدينا بملاحظة أن جداء $\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}$ بالعنصر التفاضلي dx^i، $i \neq j$ يعطي الصفر

$$d\omega = \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} dx^1 \times dx^2 \times dx^3 - \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} dx^2 \times dx^1 \times dx^3 + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} dx^3 \times dx^1 \times dx^2$$

نرتبها آخذين خواص الجداء المتجهي الثلاثي التبادلية بعين الاعتبار ونكتب

$$d\omega = \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3}\right) dx^1 \times dx^2 \times dx^3$$

ولدينا بتطبيق مبرهنة ستوكس أي بكتابة الـ 2- صيغة على شكل 1- صيغة : $\omega = \sum_i \Omega_i dx^i$

$\Omega_i = \omega_j dx^k$ وبتعريف التفرق $\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega}$

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{\omega}\,dV = \iint_S \vec{\omega}\cdot d\vec{S} \qquad (7)'$$

وهنا أيضاً لم تلعب أبعاد الفضاء أي دور في الانتقال من الحجم (حجم بـ n بعداً) على فوق السطح المحيط به (بـ n - 1 بعداً).

ملحق 2

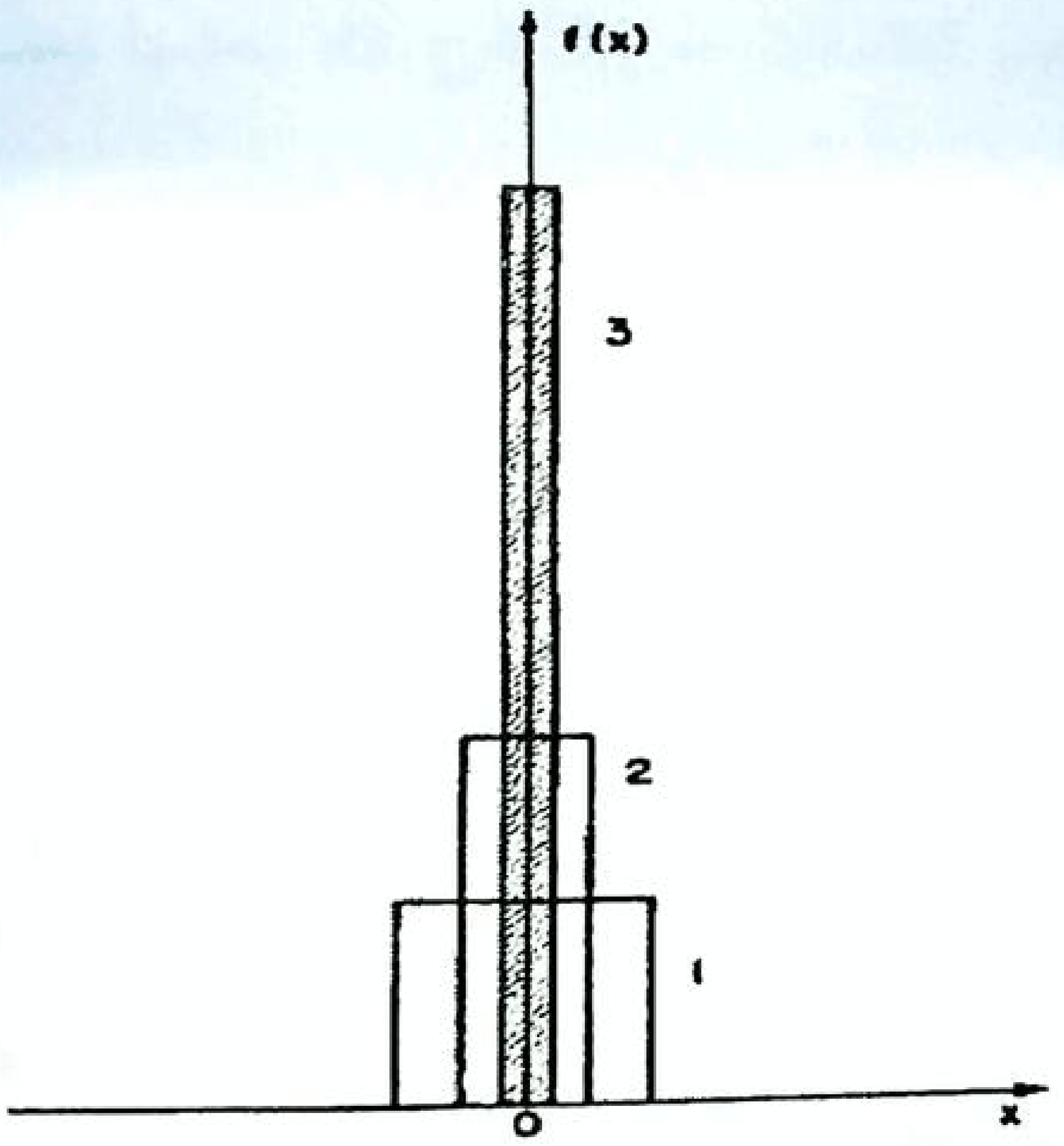
خواص "الدالة" δ

على الرغم من قولنا إنه لا معنى لـ δ إلا بمفعولها، بتكاملها مع دالة منتظمة إلى أقصى حد ممكن لأنه لا يمكن في نظرية التكامل لـ "لوبيغ" أن يكون لدالة مساوية للصفر في كل مكان تقريباً (p.p) تكامل مختلف عن الصفر، فإننا سنسير على التقليد المتبع ونعطي الخواص الصورية لهذه الدالة، التي نمثلها في المخطط التالي حيث يتناهى x نحو الصفر مع بقاء السطح مساوياً للواحد

$\delta(x) = 0$ من أجل $x \neq 0$ و $\delta(0) = \infty$

سنكتب إذاً

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1 \qquad (1)$$



ونعطي لهذا التعريف الصوري معنى بأن نكتب من أجل الدالة $f(x)$ القابلة للاشتقاق قدر ما نريد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, f(x)\, dx = f(0) \qquad (2)$$

أو على الشكل

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\, f(x)\, dx = f(a) \qquad (2)'$$

مع ملاحظة أن δ دالة زوجية

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

لأن هذا لا يغير علاقة التعريف (1).

لدينا أيضاً بأخذ $\alpha x = y$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\alpha x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(y)\frac{dy}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|}$$

أي أن

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x) \qquad (3)$$

لتكن الدالة $y = \varphi(x)$ ولنحسب $\delta(y - y')$ من أجل قيمتين متجاورتين لهذه الدالة. نكتب هذا الفرق على الشكل

$$y - y' = \varphi(x) - \varphi(x') = (x - x')\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{x=x'}$$

وبالتالي فإن

$$\delta(y - y') = \delta\left[(x - x')\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{x=x'}\right]$$

وبتطبيق (3)

$$\delta(y - y') = \frac{1}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=x'}}\delta(x - x') \qquad (4)$$

لدينا أخيراً

$$\delta(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\alpha\xi}d\xi \qquad (5)$$

أي أن محول فوريي لـ δ هو $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$: نتحقق من هذه الصيغة بكتابة محول فوريي لـ f وليكن φ : لدينا

$$f(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{i\xi a}\varphi(\xi)d\xi$$

و

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-i\xi x}f(x)dx$$

وبكتابة φ بدليل محولها العكسي f في تعريف $f(a)$ نحصل على

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\iint e^{i\xi(a-x)}f(x)\,dx\,d\xi$$

يجب، حتى تتحقق العلاقة $(2)'$، أن يكون التكامل على $d\xi$ مساوياً لـ $\delta(a - x)$

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{i\xi(a-x)}dx = \delta(a - x) \qquad (6)$$

إن $(\delta(a - x) = \delta(x - a))$.

توجد دالات عديدة مولدة "للدالة" δ، بمعنى أن تكاملها يتناهى إلى الواحد على غرار دالة الشكل التي نرمز إليها بـ $\delta^{(\varepsilon)}(x)$ المساوية لـ $\frac{1}{\varepsilon}$ في المجال $\left[-\frac{\varepsilon}{2}, +\frac{\varepsilon}{2}\right]$ وللصفر خارجه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(x)\,dx = 1 \quad (7)$$

يبرهن بسهولة أن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\varepsilon} e^{-|x|/\varepsilon} dx = 1 \quad (8)$$

والدالة $\frac{1}{2\varepsilon} e^{-|x|/\varepsilon}$ مولدة لـ δ.

هنا ايضاً الدالات المولدة التالية :

$$\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \quad (9)$$

$$\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\varepsilon^2} \quad (10)$$

$$\frac{\varepsilon}{\pi}\frac{\sin^2 x/\varepsilon}{x^2} \quad (11)$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{\sin x/\varepsilon}{x} \quad (12)$$

نبرهن على سبيل المثال أن الدالة (12) مولدة لـ δ كما يلي :

إن

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{x}{\varepsilon}}{x} dx = 1$$

هذا ما يبرهن عليه في كتب الرياضيات من أجل قيمة معينة لـ ε (انظر مثلاً كتاب سميرنوف المترجم إلى العربية الجزء الأول §3.6 من الفصل السادس والجزء الثاني §3.4 من الفصل الثالث).

نكتب المقدار المكامل كدالة بـ ε، $f_\varepsilon(x)$ ونحسب التكامل بين الحدين الموجبين $0 < a < b$

$$\int_a^b f_\varepsilon(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\sin \frac{x}{\varepsilon}}{x} dx = \frac{1}{\pi}\int_{a/\varepsilon}^{b/\varepsilon} \frac{\sin y}{y} dy \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$$

لأن حدي التكامل يتناهيان إلى $+\infty$. نجري نفس المحاكمة من أجل $a < b < 0$ لنصل إلى القول إن المقدار

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\sin \frac{x}{\varepsilon}}{x} dx\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{a/\varepsilon}^{b/\varepsilon} \frac{\sin y}{y} dy\right|$$

محدود بانتظام، أياً كانت قيمة ε، بالنسبة لـ a و b؛ وهكذا فإن متتالية الدالات $f_\varepsilon(x)$ تتناهى إلى الواحد عندما $\varepsilon \to 0$ و

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\frac{\sin x/\varepsilon}{x} = \delta(x) \quad (12)'$$

يقودنا النظر إلى الدالة $\frac{1}{\pi}\frac{\sin x/\varepsilon}{x}$ كتكامل للدالة $\frac{1}{2\pi}e^{i\xi x}$ على المجال $\left[-\frac{1}{\varepsilon}, +\frac{1}{\varepsilon}\right]$ إلى العلاقة (5) التي تعطينا تمثيل فوريي للدالة δ :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{+\frac{1}{\varepsilon}} e^{i\xi x}d\xi = \frac{1}{\pi}\frac{\sin\frac{x}{\varepsilon}}{x}$$

ومن $(12)'$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{+\frac{1}{\varepsilon}} e^{i\xi x}d\xi = \delta(x)$$

يقودنا النظر إلى الدالة $\frac{1}{\pi}\frac{\sin x/\varepsilon}{x}$ كتكامل للدالة $\frac{1}{2\pi}e^{i\xi x}$ على المجال $\left[-\frac{1}{\varepsilon}, +\frac{1}{\varepsilon}\right]$ إلى العلاقة (5) التي تعطينا تمثيل فوريي للدالة δ :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{+\frac{1}{\varepsilon}} e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\pi}\frac{\sin\frac{x}{\varepsilon}}{x}$$

ومن '(12)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{+\frac{1}{\varepsilon}} e^{i\xi x} d\xi = \delta(x)$$

الفصل الثاني

المغنطيسية الراكدة والظواهر المستقرة

1- التيار الكهربائي.................... 73
2- المغنطيسية الراكدة.................... 82
3- حساب الحقول المغنطيسية من الكمون المتجهي 92
4- الطاقة المغنطيسية الراكدة.................... 104
5- مصادر التيار المستمر.................... 110

الفصل الثاني: المغنطيسية الراكدة والظواهر المستقرة

1. التيار الكهربائي

1.1- معادلة الاتصالية

لنبدأ بالتعبير عن انحفاظ الشحنة الكهربائية بمعادلة هي ذاتها بالنسبة لكل المقادير المنحفظة. نقصد بانحفاظ الشحنة الكهربائية القول إن الشحنات الكهربائية تنتقل في المادة وفي الفضاء ولكنها لا تُحدث ولا تفنى، إن هذه الشحنات، كمية الكهرباء، في نظمة معزولة مقدار ثابت. وكمية الكهرباء في الكون كله، عندما ننظر إليه كنظمة معزولة، ثابتة. إن انحفاظ الشحنة الكهربائية ككل المقادير المنحفظة ناتج عن وجود تناظر من نوع ما. رأينا أن التناظر بين نقاط الزمان–المكان، أن تجانس الزمان–المكان ينتج انحفاظ الطاقة–الاندفاع الخطي؛ وأن تناحي الزمان–المكان ينتج انحفاظ العزم الزاوي الصميمي (السبين) والعزم الزاوي المداري. وقوانين الانحفاظ هذه ذات منشأ هندسي، تجانس وتناحي الفضاء وتجانس الزمان، تعبر عنه زمر تناظر كما ذكرنا في المجلد الأول هي الزمرة التآلفية في الفضاء الإقليدي مضافاً إليها التجانس الزماني في الميكانيك التقليدي وزمرة بوانكاريه في الميكانيك النسبوي : الانسحابات والدورانات (زمرة لورانتس) في فضاء مينكوفسكي ذي الأربعة أبعاد. أما انحفاظ الشحنة الكهربائية فمستقل عن خواص الفضاء وخواص الزمان، ولذا نقول عنه إنه تناظر داخلي مثله مثل التناظر بين البروتون والنوترون في التفاعلات النووية التي لا تفرق بينهما. إن منشأ انحفاظ الشحنة الكهربائية هو كون الاحتمال في الميكانيك الكمومي مقيس بالقيمة المطلقة لدالة الموجة ψ ذات القيم العقدية وأن هذه القيمة التي تعين حالة الجسم، $|\psi\bar{\psi}|^{1/2}$ حيث $\bar{\psi}$ هو المرافق العقدي لـ ψ، لا تتغير بضرب ψ بعدد عقدي من الشكل $e^{i\alpha}$ قيمته المطلقة تساوي 1. تشكل التحولات $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$ زمرة نرمز لها بـ $U(1)$. ويمكن القول إن إقامة الصلة بين وجود تناظر – زمرة تناظر – هندسي أو داخلي وقوانين الانحفاظ هي إحدى أهم مبرهنات الرياضيات الفيزيائية؛ إنها مبرهنة نوتر Noether التي نكتفي بالإلماح إليها هنا.

لتكن $\rho = ne$ كثافة الشحنة الكهربائية الحجمية، n عدد الشحنات e في واحدة الحجوم. ولتكن $\vec{J}$ كثافة التيار الكهربائي

$$\vec{J} = \rho\vec{V} = ne\vec{V} \qquad (1.1)$$

تتحرك الشحنات فيه. إن $\bar{v}$ هي السرعة الوسطية لهذه الشحنات. ليكن S السطح الذي يحد حجماً V تدفق التيار عبر هذا السطح، أي الفرق بين كمية الكهرباء التي غادرت الحجم وتلك التي دخلت إليه في واحدة الزمن يساوي لتناقص شحنة الحجم التي نرمز لها بـ Q، مادامت الشحنة الكهربائية لا تحدث ولا تفنى. لدينا إذاً

$$\int_S \bar{J} \cdot \overline{dS} = -\frac{dQ}{dt} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \qquad (1.2)$$

لن نضع من الآن فصاعداً إلا إشارة تكامل واحدة للتكاملات المضاعفة، S و V تشيران إلى تكامل على السطح أو الحجم؛ كتبنا تفاضل كثافة الشحنة على شكل تفاضل جزئي لأن ρ تابعة لـ (x, y, z, t)، لوضعها في الحجم وللزمن. نستعمل مبرهنة غاوص لتحويل التكامل الثنائي إلى تكامل ثلاثي

$$\int_S \bar{J} \cdot \overline{dS} = \int_V \left(\bar{\nabla} \cdot \bar{J}\right) dV = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \qquad (1.3)$$

ومنه معادلة الاتصالية

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (1.4)$$

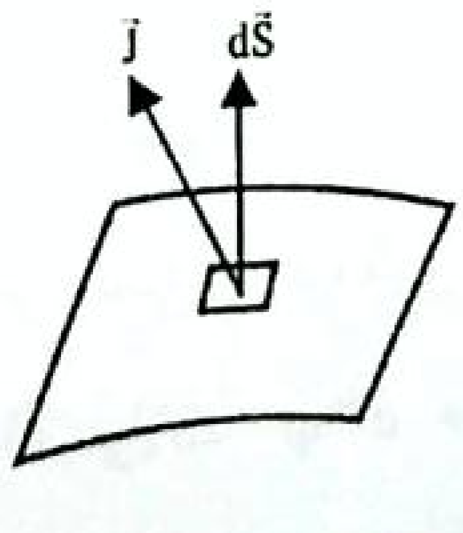
2.1– التيار الكهربائي وقانون لابلاس

تعريف 1 :

نسمي تياراً كهربائياً كمية الشحنات الكهربائية التي تمر عبر سطح ما، مغلق أو غير مغلق، في واحدة الزمن.

فهو يساوي في حالة السطح غير المغلق، الشكل.1a

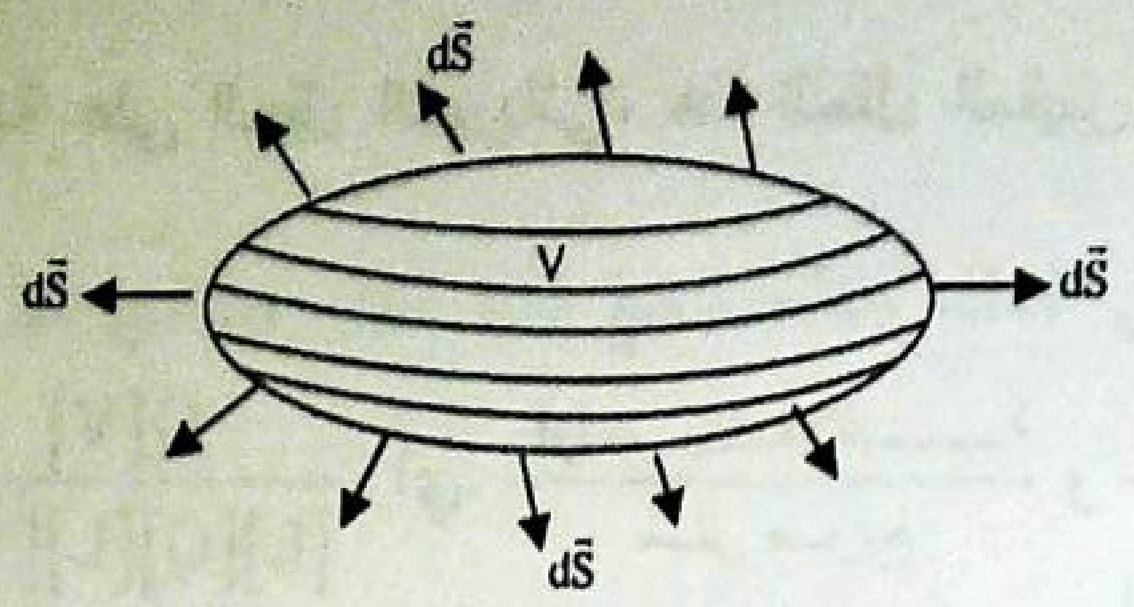
$$I = \int_S \bar{J} \cdot \overline{dS} \qquad (1.5)$$



الشكل.1a

وفي حالة السطح المحيط بحجم، الشكل.1b

$$I = \int_S \bar{J} \cdot \overline{dS} = -\frac{dQ}{dt} \qquad (1.6)$$



الشكل.1b

إن وحدة التيار، ونسميها شدة التيار، هي $[Q][T]^{-1}$ وتسمى الأمبير

$$[I] = [J][S] = [Q][L]^{-3}[L][T]^{-1}[L]^{2} = [Q][T]^{-1}$$

لنكتب قوة لورانتس المتوقفة على الحقل المغنطيسي، $F = q(\vec{V} \times \vec{B})$، بدليل التيار الكهربائي الذي يجري في موصل أسطواني الشكل، في سلك مقطعه S، ولنفرض تجانس التيار في السلك : لكل الشحنات متجهات سرعة موازية لمولد الأسطوانة. إن كمية الكهرباء التي يحويها حجم ما $\Delta\tau = S\Delta\ell$ حيث $\Delta\ell$ طول منته من السلك هي

$$q = neS\Delta\ell$$

وقوة لورانتس هي

$$\vec{F} = neS\Delta\ell\vec{V} \times \vec{B} = (\vec{J} \times \vec{B})\Delta\tau \qquad (1.7)$$

لكن $ne\vec{V}$ هي كثافة التيار التي يمكن وضعها خارج إشارة التكامل في (1.5) وكتابة شدة التيار كجداء لكثافة التيار بسطح السلك

$$I = \int \vec{J} \cdot \vec{dS} = J\int dS = JS$$

وتعيين اتجاه حركة الشحنات بإعطاء اتجاه للتيار – اتجاه مولد الأسطوانة، أي كتابة المقدار $ne\vec{V}S\Delta\ell$ على الشكل

$$ne\vec{V}S\Delta\ell = \vec{J}S\Delta\ell = \vec{I}\Delta\ell = I\overline{\Delta\ell}$$

لتأخذ قوة لورانتس الشكل

$$\vec{F} = (\vec{J} \times \vec{B})\Delta\tau = I\overline{\Delta\ell} \times \vec{B} = (\vec{I} \times \vec{B})\Delta\ell \qquad (1.8)$$

إن $\vec{J} \times \vec{B}$ هي القوة المطبقة على واحدة الحجم و $\vec{I} \times \vec{B}$ تلك المطبقة على واحدة الطول. ينعطف التيار تحت تأثير $\vec{B}$ بحيث تكون الثلاثية $(\vec{I}, \vec{B}, \vec{F})$ ثلاثية مباشرة. وتعرف العلاقة (1.8) باسم قانون لابلاس. أعطينا في الفصل السابق أبعاد الحقل المغنطيسي، قوة مقسومة على شحنة مضروبة بسرعة ووحدتها هي $\frac{\text{نيوتن}}{\text{كولون متر/ثانية}}$ إلا أن الوحدة المستعملة هي بالتعبير عن القوة بالوحدات الكهربائية، هذه الوحدة

هي حسب قوة لورانتس المتوقفة على الحقل الكهربائي، هذا الحقل المقيس بـ $\frac{[V]}{[L]}$ مضروباً بـ Q.

وبهذا فإن أبعاد B هي

$$\frac{[V][T]}{[L]^2} = \frac{Q[V]}{[L][Q][L][T]^{-1}}$$

، أي $\frac{\text{فولت} \times \text{ثانية}}{\text{متر مربع}}$ و $\frac{\text{تسمى الفيبر Weber}}{\text{متر مربع}}$

لنلاحظ أن هذه الوحدة كبيرة جداً من الناحية العملية، ذلك أن أضخم مغنطيس حديدي ذو حقل مغنطيسي يساوي 1,5 فيبر/متر مربع وأضخم مغنطيس كهربائي لفاته أسلاك فائقة التوصيل ينتج حقلاً بحدود 10 فيبر/متر مربع. لذا يستعمل الغاوص المساوي لـ 10^{-4} هذه الوحدة عوضاً عنها.

3.1- قانون أوم وقانون جول

يلزم لكي تمر الشحنات في الموصل تطبيق حقل كهربائي عليه يحرك الشحنات (السالبة) في اتجاه معاكس لاتجاه الحقل ويحدث التيار؛ وإلا فإن الإلكترونات الحرة في الموصل تبقى ساكنة أو تتحرك حركة عشوائية في مختلف الاتجاهات حصيلتها انعدام الحركة. يقع منحى كثافة التيار في أغلب الموصلات – المعادن – في منحى الحقل الكهربائي المطبق؛ ذلك أن أغلب بنية المعادن متناحية لا يوجد فيها اتجاه متميز عن الاتجاهات الأخرى. تتكون البلورات في النحاس على سبيل المثال من شبيكات (Lattices)، بلورات أولية مكعبة تحتل الذرات رؤوسها ومراكز سطوحها وتضمن تناظر البلورة الدوراني. يبقى التناحي قائماً في أغلب المعادن عندما تتوزع البلورات فيها بشكل عشوائي، وهكذا فإن

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \tag{1.9}$$

في الحالة العامة. تسمى الثابتة σ الناقلية الكهربائية وقد حسبناها في تقريب خشن في دروس الترموديناميك ووجدنا أنها تساوي (((II.(5.(1.25

$$\sigma = \frac{ne^2}{m}\tau \tag{1.10}$$

حيث m كتلة الجسيم الحامل للشحنة e و τ زمن الارتخاء، الزمن الفاصل بين اصطدامين متتاليين للشحنة بأيونات المعدن، فهو المسار الحر الوسطي ℓ مقسوماً على السرعة الوسطية التي رمزنا لها بـ $\langle V \rangle$: $\tau = \frac{\ell}{\langle V \rangle}$. نسمي مقلوب الناقلية $r = \frac{1}{\sigma}$ المقاومة النوعية، ونحصل من أجل سلك معدني أسطواني الشكل طوله $\Delta\ell$ ومقطعه S يمر فيه تيار متجانس

$$I = \vec{J} \cdot \vec{S} = \sigma\vec{E} \cdot \vec{S} = \sigma\frac{V}{\Delta\ell}S$$

ومنه الكمون

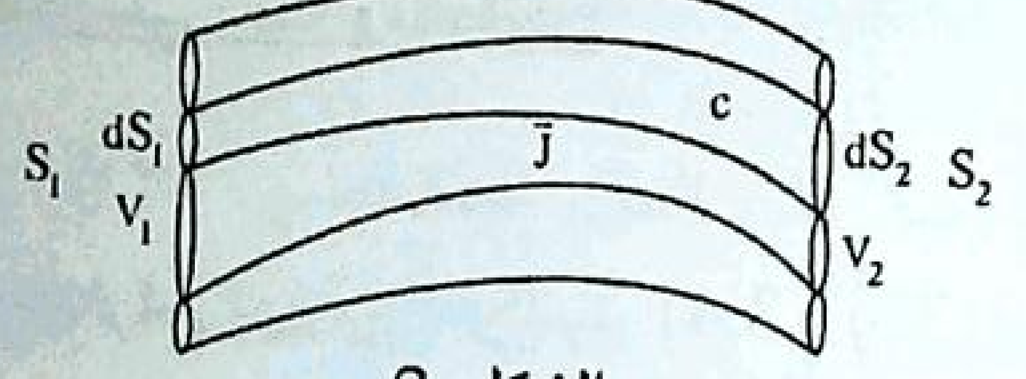
$$V = \frac{\Delta \ell}{S} rI = RI \qquad (1.11)$$

أي أن فرق الكمون بين طرفي السلك يتناسب مع شدة التيار ونسمي مثل التناسب R مقاومة السلك الكهربائية

$$R = \frac{\Delta L}{S} r = \frac{\Delta \ell}{S\sigma} \qquad (1.12)$$

تعرف العلاقة (1.11) باسم قانون أوم Ohm وتسمى وحدة المقاومة الأوم. إنها الفولت مقسوماً على الأمبير.

يمكن تعميم (1.11) من أجل تيارات غير متجانسة بأن نقسم حجم الموصل إلى أنابيب تيار بدائية، أسطوانات متناهية في الصغر مولداتها كثافة التيار $\bar{J}$، الشكل.2



الشكل.2

إن الغرض من تطبيق الحقل $\bar{E}$ هو الإبقاء على فرق كمون بين طرفي السلك يتيح تحرك الجسيمات الحرة الحاملة للشحنة (الإلكترونات) في اتجاه واحد، وهو ما يحققه منبع الطاقة الكهربائي، المولد الكهربائي على سبيل المثال الذي يرفع الكمون من V_2 كمون الطرف ذي الكمون الأصغر إلى V_1 كمون الطرف الثاني ذي الكمون الأكبر $V = V_1 - V_2$، على غرار الطاقة المبذولة لرفع ثقل عن سطح الأرض، حيث الطاقة الكامنة التثاقلية هي الأصغر، إلى مستوى أعلى منها. وإلا فإن تصادم الإلكترونات مع أيونات المعدن الثابتة سيوقف بعد زمن يطول أو يقصر حركتها الجماعية المكونة للتيار محولاً طاقتها الحركية إلى طاقة حرارية ($\frac{mV^2}{2} = \frac{3}{2}T$ حيث V سرعة الإلكترون الوسطية). وهكذا فالغرض من وضع منبع الطاقة الكهربائي هو تعويض الطاقة الضائعة. إن الطاقة dw التي يزود المولد الكهربائي الشحنة dq بها هي Vdq وهي التي تحولت كلها إلى طاقة حرارية ولكن $dq = Idt$ و$V = RI$ حسب قانون أوم، ولذا فإن

$$dw = Vdq = RI^2dt$$

وبتقسيم هذه الطاقة على المعادل الميكانيكي للحريرة – قبل أن يكتشف أن درجة الحرارة T هي طاقة – الذي يرمز له بـ J، من جول مكتشف هذا التكافؤ بتجربته الشهيرة، نجد كمية الحرارة مقيسة بالحريرات التي انتشرت في الناقل والتي نرمز لها بـ dQ (يرجى عدم اللبس بين كمية الحرارة وكمية الكهرباء (الشحنة))

$$dQ = \frac{RI^2dt}{J} \qquad (1.13)$$

يستخلص مما سبق أن انعدام المقاومة الكهربائية يغني عن إبقاء المولد الكهربائي وقد اكتشف هذا المفعول في مطلع القرن العشرين (1911) ولكنه لم يجد تفسيره النظري إلا بعد خمسين سنة من اكتشافه. إنه فائقية التوصيل الذي تتمتع به المعادن عند انخفاض درجة حرارتها إلى جوار الصفر المطلق فتنعدم المقاومة الكهربائية وتنعدم معها الحاجة إلى تغذية الدارة التي أطلق فيها التيار الكهربائي. وقد أظهرت التجارب أنه يمكن للتيار أن يستمر لسنوات عديدة. كما اكتشف نوع جديد من الخلائط الخزفية فائقة التوصيل في درجات حرارة مرتفعة تفوق $90°K$ (1986) وقد خصصنا (V.3§4) لدراسة هذا المفعول في إطار الفيزياء الإحصائية القائمة على ميكانيك الكم.

4.1- قوة لورانتس في حقل مغنطيسي ثابت ومتجانس

نستعيد هنا باختصار ما حصلنا عليه في دروس الميكانيك (I.3.§3.3,4).

لنفرض أننا أعطينا للشحنة الكهربائية q ذات الكتلة m سرعة معينة $\vec{V}_0$ باستعمال الحقول الكهربائية الراكدة للمكثفات ولنفرض أن الحقل المغنطيسي عمودي على اتجاه $\vec{V}_0$. إن القوة والتسارع عموديان على $\vec{V}_0$:

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\left(\vec{V}_0 \times \vec{B}\right)$$

ومنه التسارع المماسي

$$a_{\parallel} = \frac{dV}{dt} = 0$$

والقيمة الجبرية للتسارع العمودي وتساوي $\frac{qVB}{m}$ ومنه

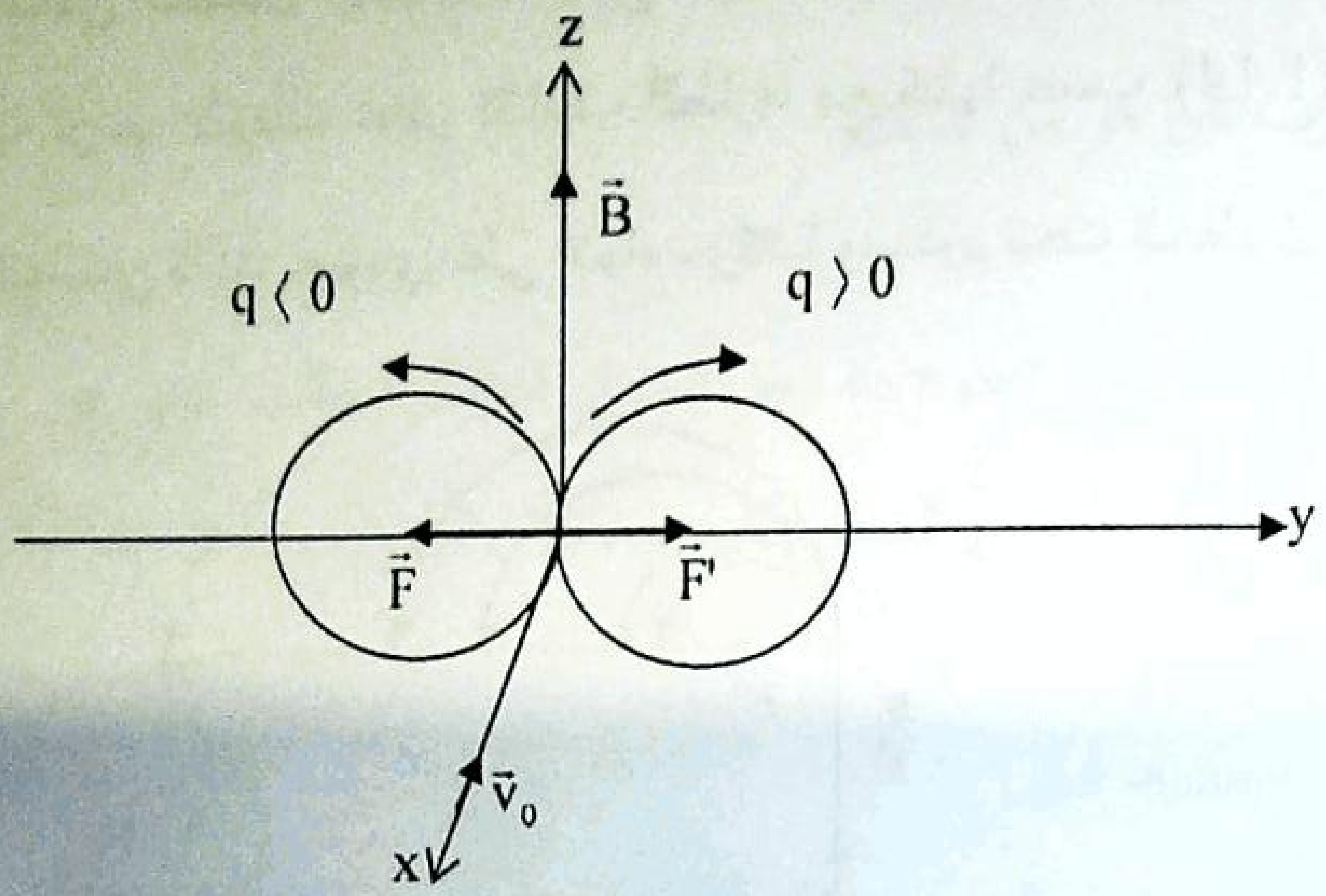
$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{qVB}{m} \qquad (1.14)$$

أي أن نصف قطر الانحناء ثابت ولما كان التسارع عمودياً دوماً على الاتجاه (الثابت) للحقل $\vec{B}$ فالحركة حركة مستوية دائرية سرعتها الزاوية

$$|\omega| = \frac{V}{R} = \frac{|q|B}{m}$$

واتجاه الحركة هو بحيث تكون الثلاثية $(q\vec{V}, \vec{B}, \vec{F})$ ثلاثية مباشرة. إن كل ما فعله الحقل المغنطيسي هو تحويل الحركة المستقيمة إلى حركة دائرية، نحو اليمين إذا كانت q موجبة ونحو اليسار إذا كانت سالبة؛ واتجاه الدوران من اليسار نحو اليمين في الحالة الأولى، ω سالبة ومن اليمين نحو اليسار (الاتجاه المباشر) في الحالة الثانية و ω موجبة، الشكل.3

$$\omega = -\frac{qB}{m} \qquad (1.15)$$



الشكل.3

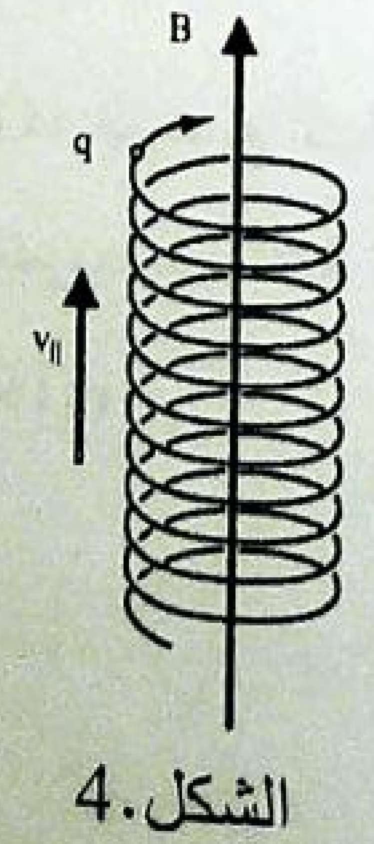
هذا إذا كانت سرعة الشحنة عمودية على الحقل المغنطيسي. أما إذا لم يكن الأمر كذلك، وكان لها مركبتان $V_{0_\parallel}$ موازية لاتجاه الحقل Oz و $V_{0_\perp}$ عمودية عليه، فالحركة مركبة عندئذ من حركتين، مستقيمة منتظمة في اتجاه الحقل وحركة دائرية عمودية على الحقل وتركيب هاتين الحركتين هو الحركة اللولبية (الحلزية)، الشكل.4، وخطوة اللولب (المسافة المقطوعة في الحركة المستقيمة المنتظمة خلال دورة كاملة) هي، نظراً لأن $V_{0_\perp} = \omega R$

$$\Delta z = V_{0_\parallel} T = \frac{V_{0_\parallel}}{V_{0_\perp}} 2\pi R = 2\pi R k$$

حيث رمزنا بـ k للمقدار الثابت $tg\varphi = \frac{V_{0_\parallel}}{V_{0_\perp}}$ ، φ هي الزاوية التي يعملها المماس على اللولب مع المحور Oz

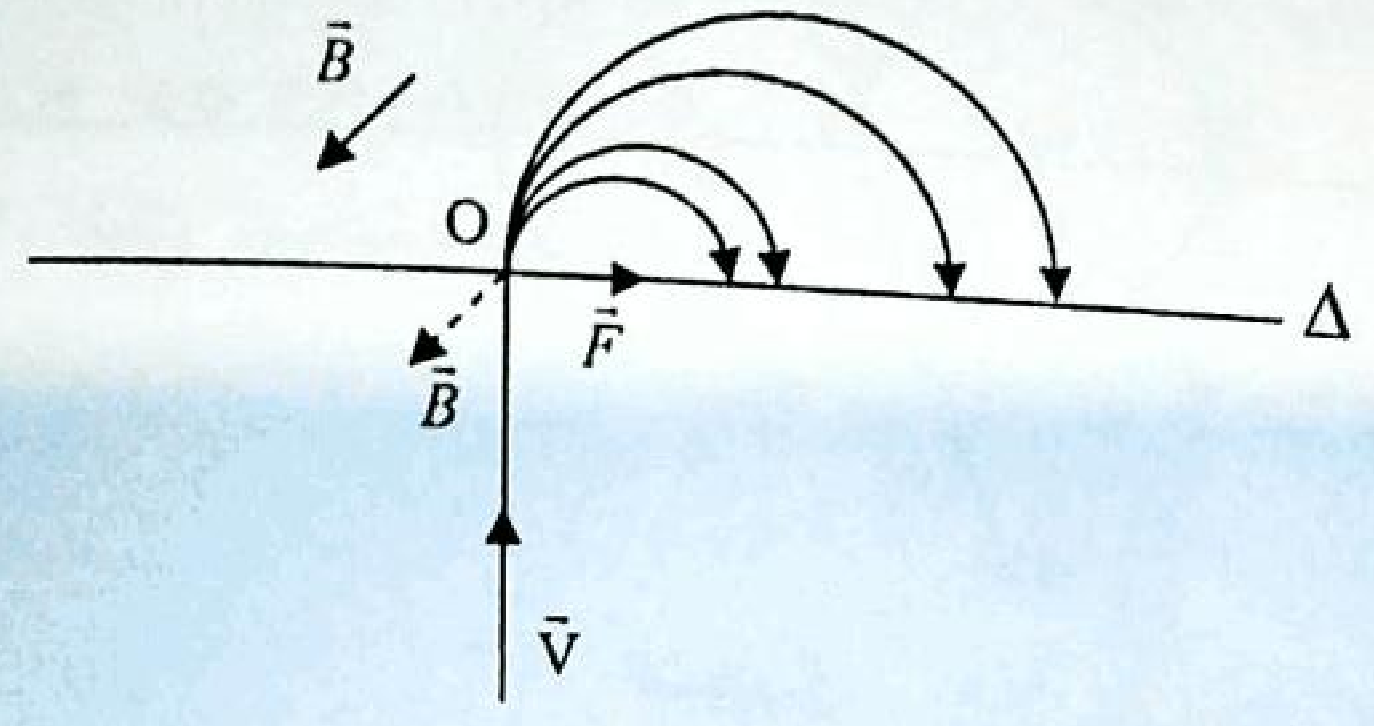
<u>ملاحظة</u> :

لا تتوقف الحركة اللولبية على سرعة الشحنة، فهي إذاً صحيحة في النسبية الخاصة لأن قوة لورانتس نسبوية كما أشرنا منذ البداية.



الشكل.4

رأينا كذلك أنه من الممكن استعمال الانعطاف الناتج عن الحقل المغنطيسي الثابت لقياس كتل الأيونات في راسم الطيف حيث ترسم الأيونات دوائر تتناسب أقطارها مع كتلها حسب (1.14) $R = \frac{Vm}{qB}$. ندخل الأيونات في حقل مغنطيسي ثابت عمودي على اتجاه حركتها ومعدوم تحت الخط Δ، الشكل.5.



الشكل.5

5.1– حركة الشحنة في حقلين، كهربائي، مغنطيسي، ثابتين ومتجانسين

نكتب معادلة الحركة لشحنة q كتلتها m بفعل قوة لورانتس على الشكل

$$m\dot{\vec{V}} = q\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right) \qquad (1.16)$$

ترمز النقطة للاشتقاق بالنسبة للزمن.

نختار لحل هذه المعادلة المحور Oz في اتجاه $\vec{B}$ ونعين المستوى Ozy بالمتجهتين $\vec{B}$ و $\vec{E}$. نسقط معادلة الحركة على المحاور الثلاثة :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}B \\ m\ddot{y} = qE_y - q\dot{x}B \\ m\ddot{z} = qE_z \end{cases} \qquad (1.17)$$

إن الحركة في اتجاه Oz حركة متسارعة بانتظام ($qE_z =$ ثابت) نحصل على z بمكاملة المعادلة الثالثة مرتين

$$z = \frac{qE_z t^2}{2m} + v_{oz}t \qquad (1.18)$$

حيث v_{oz} هي مركبة السرعة البدائية على Oz؛ الوضع البدائي هو مبدأ المحاور.

نجمع المعادلتين الأولتين بمعادلة واحدة بعد ضرب المعادلة الثانية بـ i :

$$m\left(\ddot{x} + i\ddot{y}\right) + iqB\left(\dot{x} + i\dot{y}\right) = iqE_y \qquad (1.19)$$

نضع كما في المثال السابق

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

ونفتش عن حل لـ $X = \dot{x} + i\dot{y}$ في المعادلة من الرتبة الأولى

$$\dot{X} + i\omega X = i\frac{q}{m}E_y \qquad (1.19)'$$

الحل العام بدون طرف ثان هو من الشكل

$$X = ae^{-i\omega t}$$

حيث a سعة عقدية، نكتبها $a = \rho e^{i\alpha}$؛ أحد الحلول الخاصة بطرف ثان هو $X = \frac{q}{\omega m}E_y = \frac{E_y}{B}$؛ وهكذا فالحل العام للمعادلة (1.19) عندما نختار α بحيث تكون السعة a عدداً حقيقياً هو

$$\dot{x} = a\cos\omega t + \frac{E_y}{B}$$
$$\dot{y} = -a\sin\omega t \qquad (1.19)''$$

والسرعة البدائية $\frac{E_y}{B}$ في اتجاه المحور Ox. إنها السرعة الوسطية في هذا الاتجاه $\langle\dot{x}\rangle = \frac{E_y}{B}$ والسرعة الوسطية في اتجاه Oy معدومة $\langle\dot{y}\rangle = 0$ (القيم الوسطية للدالات المثلثاتية معدومة) نكامل السرعتين مرة ثانية لنحصل على المسار

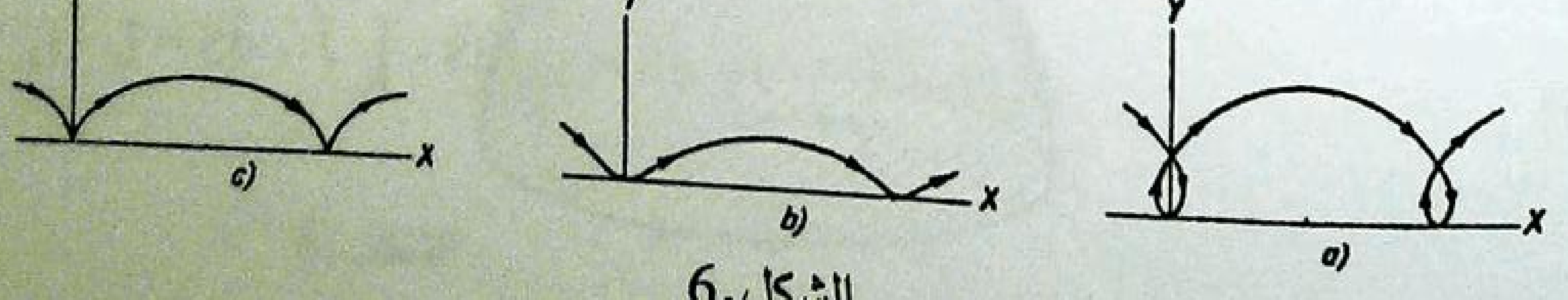
$$x = \frac{a}{\omega}\sin\omega t + \frac{E_y}{B}t$$
$$y = \frac{a}{\omega}(\cos\omega t - 1) \qquad (1.20)$$

(الثابتة 1 هي للحصول على $y_0 = 0$).

لنلاحظ في الحالة الخاصة التي تتساوى فيها السعة a مع $-\frac{E_y}{B}$، أن المسار هو

$$x = \frac{E_y}{\omega B}(\omega t - \sin\omega t)$$
$$y = \frac{E_y}{\omega B}(1 - \cos\omega t)$$

والمسار هو السيكلوئيد الذي صادفناه في دوروس الميكانيك (البراكيستوكرون والنواس السيكلوئيدي في الفصل السادس). ينحرف المسار عن الشكل السيكلوئيدي عندما تكون $|a| \gtrless \frac{E_y}{B}$. يطلق على المسار في الحالة العامة اسم تروكوئيد Trochoïde. يظهر، الشكل.6a, b, c، على الترتيب حالة $|a| \rangle \frac{E_y}{B}$، $|a| \langle \frac{E_y}{B}$ وحالة السيكلوئيد التي نعرفها



الشكل.6

ملاحظة : لا تنطبق هذه المسارات على حالة السرعة العالية (النسبوية) خلافاً للمثال السابق لأن القوة في الطرف الأيسر لـ (1.16) تقليدية صرفة وبالتالي لا تصح محاكمتنا إلا إذا كانت السرعة البدائية صغيرة أي عندما تكون النسبة $1 \gg \frac{E_y}{B}$.

2. المغنطيسية الراكدة

1.2- قانون آمبير

لننظر كما فعلنا في الفصل الأول إلى معادلتي ماكسويل الثالثة والرابعة في حال استقلال $\vec{B}$ عن الزمن. لن يتغير شيء في أولى هاتين المعادلتين المعبرة عن عدم وجود الكتل المغنطيسية (وحيدات القطب) في الطبيعة

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (2.1)$$

وخطوط الحقل مغلقة. تأخذ المعادلة الثانية عندما نهمل الاشتقاق بالنسبة للزمن، أي الحد $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$، الشكل

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad (2.2)$$

حيث $\mu_0 = \frac{1}{C^2 \varepsilon_0}$.

يتطلب استقلال $\vec{B}$ عن الزمن أن يكون الطرف الثاني في هذه المعادلة مستقلاً عن الزمن أيضاً؛ ولا يتحقق استقلال J عن الزمن إلا إذا أخذت معادلة الاتصالية (1.4)؛ الشكل التالي

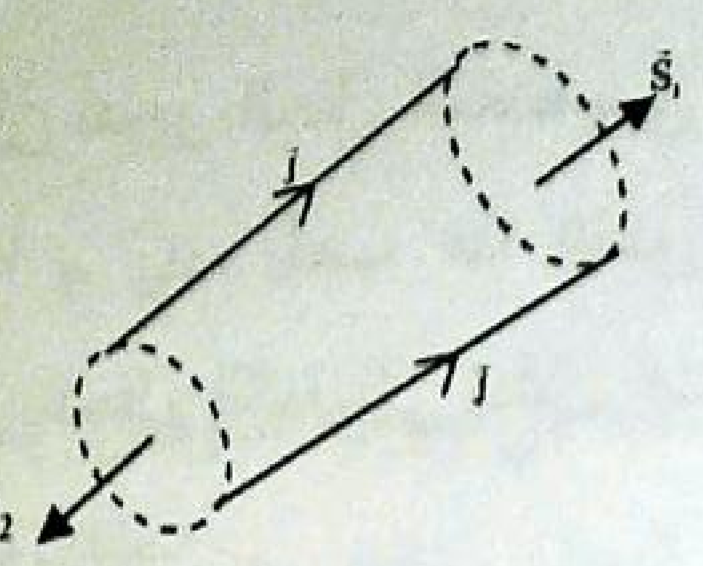
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \qquad (2.3)$$

وبتعبير آخر لا يتحقق هذا الاستقلال إلا إذا كان تغير كثافة الشحنة مع الزمن معدوماً $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$: لا تتجمع الشحنات في أي عنصر حجمي من الموصل، ويتساوى عدد الشحنات التي تدخل حجماً ما مع عدد تلك التي تغادره والتيار عبر السطح المغلق المحيط بالحجم يساوي الصفر حسب (1.6)

$$I = \int_{S_{\text{مغلق}}} \vec{J} \cdot \vec{dS} = 0 \qquad (2.4)$$

لنأخذ لتوضيح هذه العلاقة سطحاً مغلقاً مولداته المتجهات $\vec{J}$، أنبوب تيار يحده السطحان S_1 و S_2. لدينا من (2.4) ومن تعريف التيار (1.5)، الشكل 7.

$$0 = \int_{S_{\text{مغلق}}} \vec{J} \cdot \vec{dS} = \int_{S_1} \vec{J} \vec{dS} - \int_{S_2} \vec{J} \cdot \vec{dS} = I_1 - I_2 \qquad (2.5)$$



الشكل.7

أي أن للتيار الكهربائي نفس القيمة عبر مختلف مقاطع أنبوب التيار.

تعريف 2 :

نسمي تياراً مستمراً التيار المحقق لـ (2.4). إنه التيار المستقل عن الزمن، كثافته مستقلة عن الزمن $\vec{J} = ne\vec{V}$ والسرعة الوسطية للشحنات مستقلة عن الزمن كذلك ونقول عن الظواهر التي لا تتغير فيها خواص المقادير الفيزيائية، الديناميكية خاصة، مع الزمن الظواهر المستقرة : حركتها غير تابعة للزمن.
لنلاحظ أن انعدام تفرق كثافة التيار (2.3) يتواءم مع معادلة ماكسويل (2.2) وإن لم نشتقه منها لأن تفرق تدوير متجهة ما $\vec{X}$ معدوم دوماً

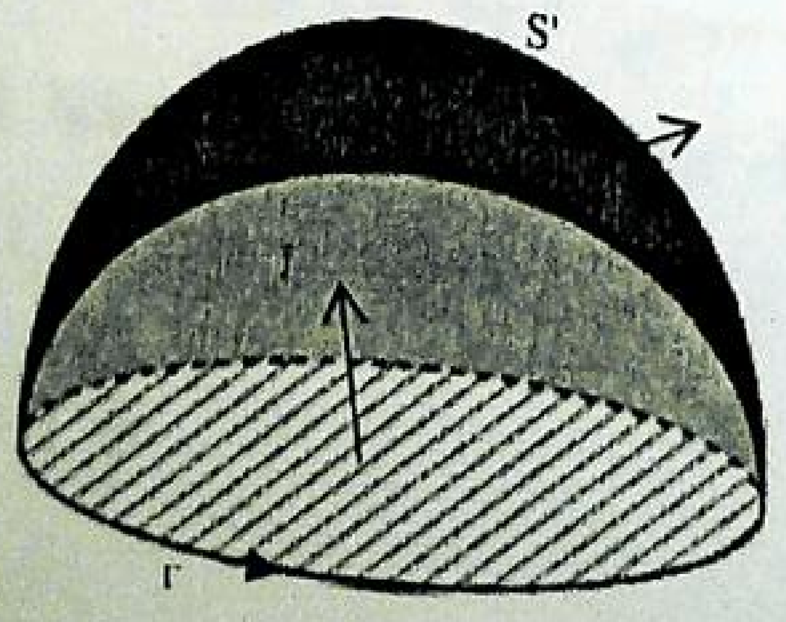
$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{X}\right) = 0 \qquad (2.6)$$

لنلاحظ كذلك أن خطوط كثافة التيار خطوط مغلقة (كخطوط الحقل المغنطيسي). هذا يعني أن الشحنات تتحرك في مسارات مغلقة، مسارات لا تبدأ من نقطة حيث الشحنة الموجبة لتنتهي في نقطة أخرى حيث الشحنة السالبة كمسارات الحقل الكهربائي بين الموصلات في حالة التوازن على سبيل المثال. تتحرك الشحنات في أسلاك تشكل منحنياً مغلقاً نسميه دارة. تحتوي الدارة بطبيعة الحال على مولد كهربائي، على جهاز ينتج حقلاً كهربائياً $\vec{E}$ يجعل الإلكترونات التي كانت حرة في الموصل تتحرك في اتجاه واحد ويعوض الطاقة الضائعة بمفعول جول.
لنحسب الآن تدوير الحقل المغنطيسي مطبقين مبرهنة ستوكس

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \cdot \overrightarrow{dS} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \overrightarrow{dS} \qquad (2.7)$$

حيث S كما نعلم سطح لا على التعيين يستند على المحيط Γ ويمر عبره التيار ذو الكثافة $\vec{J}$. أو بتعبير آخر يتعين التيار تماماً بالمنحني Γ ولذا نقول إنه التيار الذي يمر عبر المنحني المغلق Γ وهو المعبر عنه بالطرف الأخير في (2.7) ونكتب إذاً، الشكل.8

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \mu_0 I \qquad (2.8)$$



الشكل.8

إن تدوير الحقل المغنطيسي حول أي منحن مغلق، حول أي دارة، تعرف هذه العلاقة باسم قانون آمبير : يساوي للتيار الذي يمر عبرها مضروباً بـ μ_0. يلعب هذا القانون في المغنطيسية الراكدة دور قانون غاوص في الكهربائية الراكدة الذي يعين الحقل الكهربائي بدليل الشحنة التي تنتجه في حين يعين قانون آمبير الحقل المغنطيسي بدليل التيار الذي ينتجه.

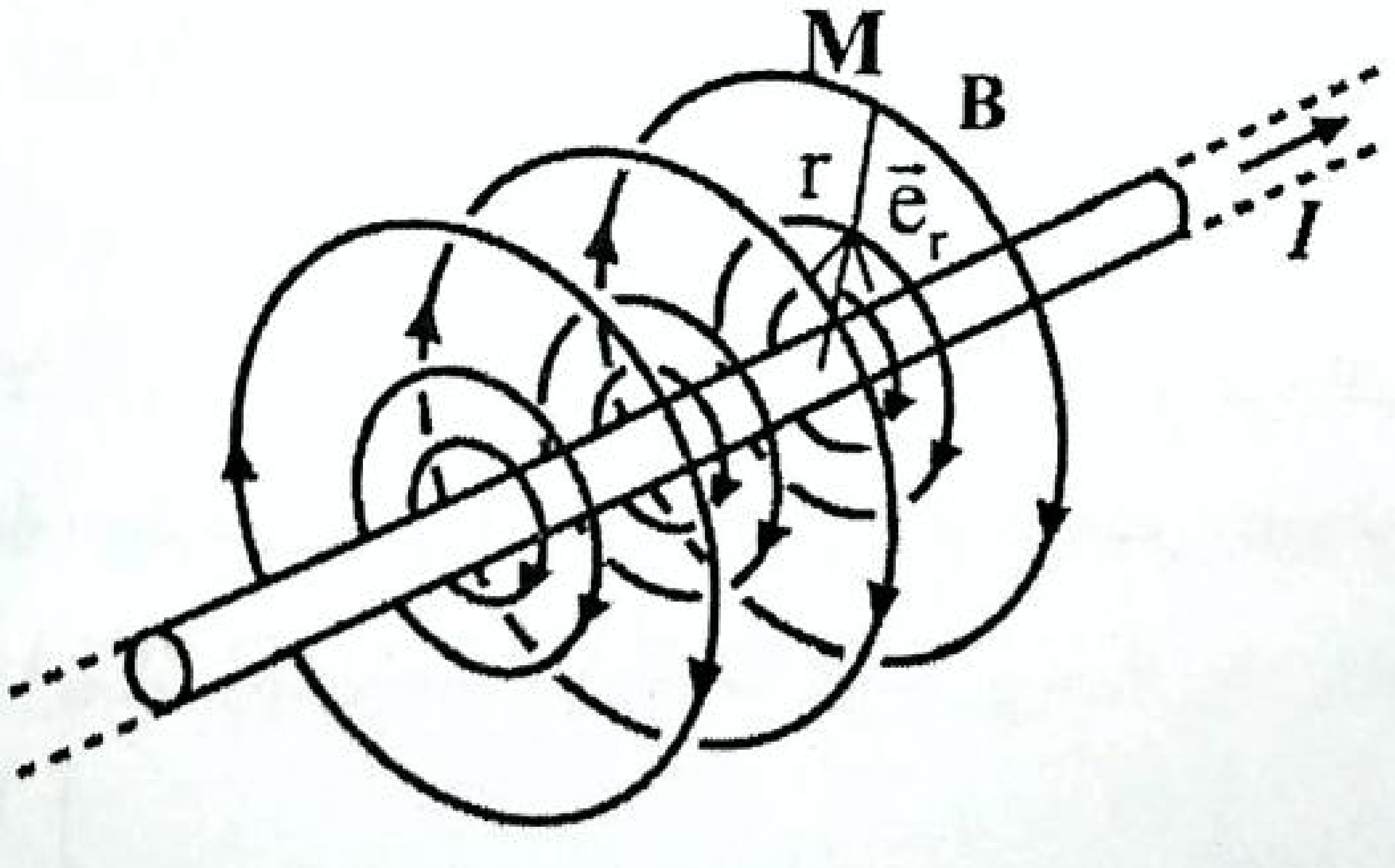
ملاحظة :

استخلصنا قانون آمبير من معادلة ماكسويل (2.2) ومن تعريف التيار ولكنه يسبق تاريخياً معادلة ماكسويل الديناميكية التي تضيف الحد بـ $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ وتعمم (2.2) ولذا يطلق على هذه المعادلة اسم معادلة ماكسويل–آمبير.

2.2– حساب الحقل المغنطيسي الراكد

سنعتمد كما فعلنا في الكهربائية الراكدة على خواص تناظر النظمة المدروسة وتناظر الحقل المغنطيسي الناتج عنها لتعيين قيمته.

أ– ليكن لدينا سلك مستقيم ذو مقطع أسطواني يمر فيه تيار مستمر I، طوله كبير ومقطعه مهمل بالنسبة لبعد النقطة M التي نريد حساب الحقل فيها عن السلك؛ وليكن r هذا البعد. سنقبل بالتناظر أن قيمة الحقل لا تتوقف إلا على البعد r وأن خطوط الحقل المغلقة $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0)$ دوائر عمودية على السلك ويقع مركزها عليه، الشكل.9



الشكل.9

لدينا بتطبيق مبرهنة آمبير

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

ومنه

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (2.9)$$

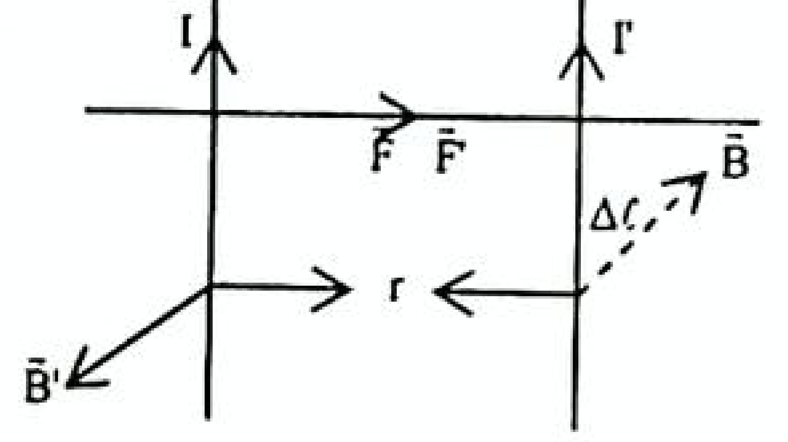
واتجاه $\bar{B}$ هو اتجاه التدوير المتعارف عليه في مبرهنة ستوكس، إنه من اليمين نحو اليسار بالنسبة لاتجاه التيار – الذي يعين اتجاه الناظم على السطح. تعرف هذه القاعدة باسم قاعدة آمبير وتكتب (2.9) على شكل متجهي

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 \bar{I} \times \bar{e}_r}{2\pi r} \qquad (2.9)'$$

حيث $\bar{e}_r$ المتجهة الواحدية على نصف القطر r – متجهة من المركز نحو المحيط.

تعين العلاقة (2.9) الصلة بين وحدتي قياس التيار والحقل المغنطيسي فتعرف الآمبير بأنه التيار الذي يحدث على بعد متر واحد منه حقلاً مغنطيسياً شدته $2 \cdot 10^{-7}$ فيبر/متر مربع.

نحصل من قانون لابلاس الذي يعين القوة الفاعلة على تيار في حقل مغنطيسي وقانون آمبير الذي يعين الحقل المغنطيسي الذي يحدثه التيار على القوة التي يتجاذب أو يتنابذ بها تياران I و I'، حسبما يكونان في اتجاه واحد أو اتجاهين متعاكسين، الشكل.10



الشكل.10

لدينا من (1.8) و(2.9)

$$|F| = \frac{\mu_0 I I' \Delta\ell}{2\pi r} \qquad (2.10)$$

ترينا هذه العلاقة أن الأمبير وحدة مشتقة من القوة : يتجاذب تياران شدة كل منهما 1 آمبير بعيدان عن بعضهما مسافة متر واحد وطول كل منهما متر واحد أيضاً بقوة قدرها $2 \cdot 10^{-7}$ نيوتن.

تجدر الملاحظة أن تعيين الحقل المغنطيسي الناتج عن تيار I، العلاقة (2.9)، قد تم من قبل بيو– سافار Biot-Savart في عام 1820. وقد دفع ذلك آمبير حينها إلى وضع العلاقة (2.8) المكافئة لمعادلة ماكسويل في الحالة الراكدة (2.2) التي أتت أربعين عاماً بعد آمبير.

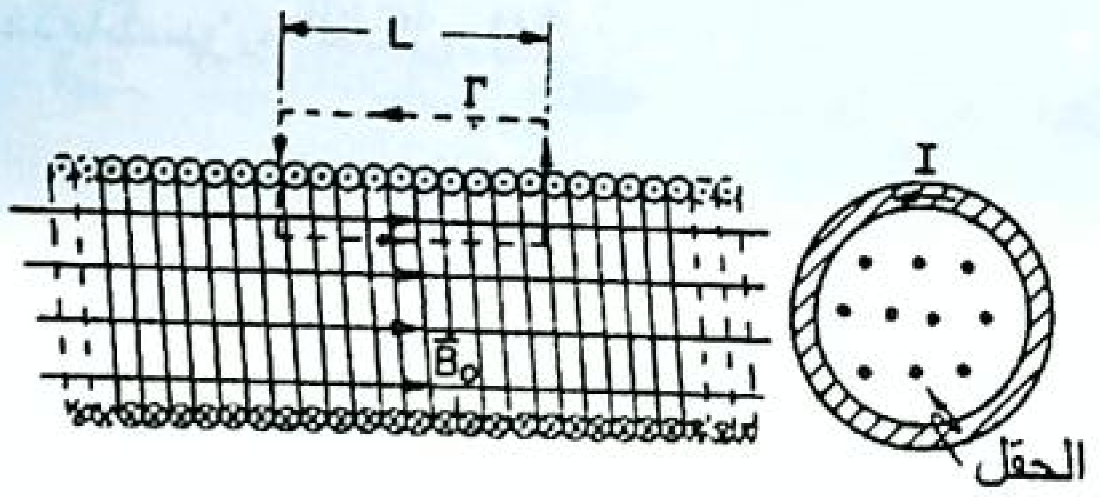
ب- الحقل الناتج عن ملف Solenoid

نسمي سولينوئيد سلكاً ملفوفاً بشكل لولبي متراص على أسطوانة ونقصد بمتراص أن خطوة اللولب صغيرة جداً. يبين، الشكل.11، مقطعاً عرضانياً للملف. يلاحظ تجريبياً ضعف شدة الحقل المغنطيسي خارج الأسطوانة كلما كان الملف طويلاً بالنسبة لقطر الأسطوانة. ولهذا نميز بين السولينوئيد ذي الطول اللامنته والخطوة المتناهية في الصغر والملف (الوشيعة) حيث عدد اللفات محدود وخطوة اللولب منتهية. سنهمل إذاً هذا الحقل الخارجي وسنفرض بالتناظر أن الحقل $\vec{B}$ في داخل الأسطوانة ثابت ومواز لمحورها، أن خطوط الحقل تنغلق في اللانهاية لتحقق $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. لنطبق قانون آمبير (2.8) من أجل منحن مغلق – المستطيل Γ في الشكل ذو الطول L؛ عرضه عمودي على الحقل – فيأخذ الشكل

$$BL = \mu_0 NI$$

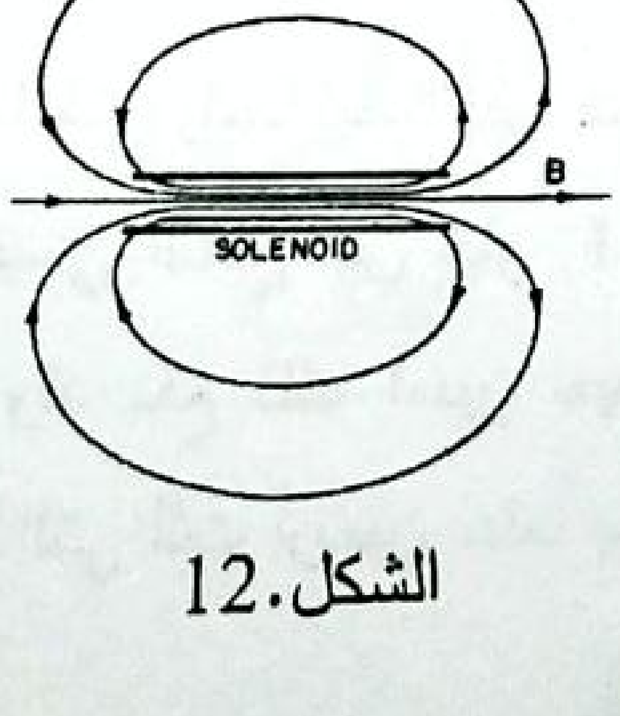
حيث N عدد اللفات – عدد التيارات – في الطول L. $n = \frac{N}{L}$ عدد اللفات في واحدة الطول ومنه

$$B = \mu_0 nI \qquad (2.11)$$



الشكل.11

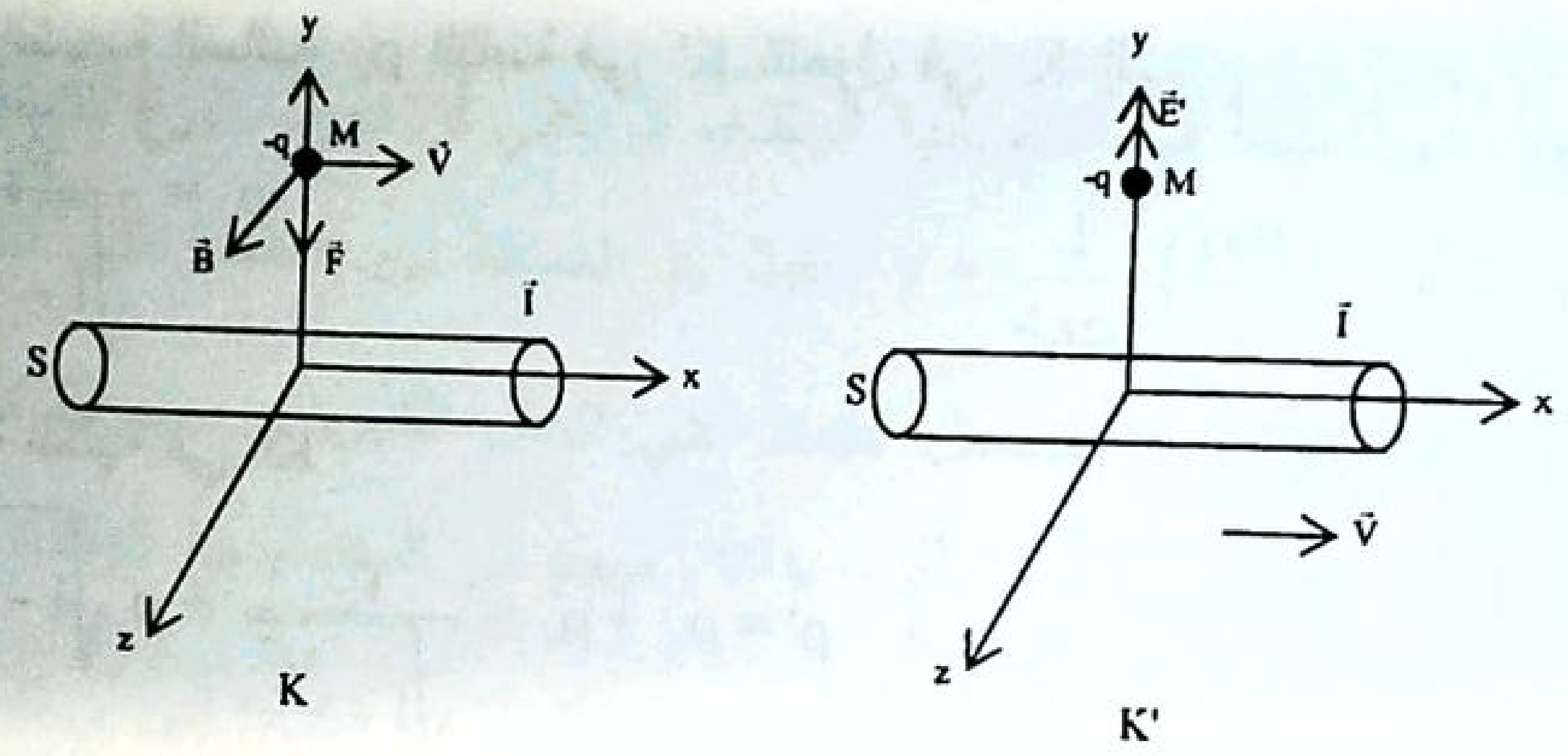
تنغلق خطوط الحقل في واقع الأمر لتعود فتدخل من الطرف الآخر، الشكل.12، على الشكل الملاحظ لقضيب حديدي ممنغط. ولا غرابة في ذلك لأننا سنرى في المجلد الخامس أن المغنطيسية الحديدية ناتجة عن تفاعل أزواج سبينات الإلكترونات في المواد الحديدية (الحديد، الكوبالت والنيكل) متوازية الاتجاه تفاعلاً كهربائياً راكداً يكافئ جريان تيار على سطح القضيب على غرار تيار الملف، الشكل.12،



الشكل.12

3.2- تحول الحقل المغنطيسي إلى حقل كهربائي

ليكن لدينا سلك يمر فيه تيار مستمر I وشحنة سالبة $-q$ تسير بسرعة ثابتة $\vec{V}$ موازية لاتجاه التيار $\vec{I}$ وتبعد عنه مسافة r. يمكن النظر إلى نظمة الإحداثيات التي يقع فيها السلك غير المتحرك والشحنة $-q$ المتحركة كنظمة غاليلية نرمز لها بـ K. تخضع الشحنة $-q$ في هذه النظمة إلى قوة لورانتس $-q\vec{V} \times \vec{B}$، $\vec{B}$ يحدثه التيار وقيمته معطاة بـ (2.9). لنأخذ نظمة إحداثيات غاليلية أخرى K' مرتبطة بالشحنة السالبة وتسير بالتالي بسرعة ثابتة $\vec{V}$ بالنسبة لـ K، يتحرك السلك في هذه النظمة بسرعة $-\vec{V}$، الشكل.13.



الشكل.13

تنعدم قوة لورانتس المغنطيسية في النظمة K' لانعدام سرعة الشحنة $-q$، ولكن هذا لا يعني انعدام القوة المؤثرة على $-q$ أو تغيرها وإلا لوقعنا في تناقض مع مبدأ النسبية الغاليلية وتعميمه إلى النسبية الخاصة القائل باستحالة تعيين حركة نظمة غاليلية بالنسبة لأخرى بتجربة فيزيائية، أي تمييز النظمة "الساكنة" عن الأخرى المتحركة بالنسبة لها. لقد تحولت القوة ذات المنشأ المغنطيسي في النظمة K إلى قوة ذات منشأ كهربائي في النظمة K' ورأينا بالفعل ((I.(7.(4.19)) تحولات $\vec{E}$ و $\vec{B}$ الناتجين عن الشحنة عند الانتقال من نظمة غاليلية إلى أخرى وأن $E'_{\perp} \sim \dfrac{(\vec{V} \times \vec{B})_{\perp}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{C^2}}}$. إلا أننا لا نستطيع تطبيق هذه التحولات مباشرة هنا لأننا أمام نوعين من الشحنات، الإلكترونات والأيونات في السلك، الأولى متحركة (في اتجاه معاكس لاتجاه التيار الموجب) والأخرى ثابتة في النظمة K – المرتبطة بالسلك، بينما تبقى الإلكترونات ثابتة في النظمة K'، حيث أخذنا للتبسيط سرعة الشحنة $-q$ مساوية لسرعة الإلكترونات بينما تسير الأيونات بسرعة $-\vec{V}$ – في هذه النظمة. وهكذا لا تخضع هذه الشحنات إلى نفس التحولات عندما ننتقل من K إلى K'. لنرمز بـ $\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$ إلى الكثافة الحجمية المعدومة في النظمة K : التيار مستمر والسلك حيادي كهربائياً. لنذكر، لكي نتجنب اللجوء إلى الكتابة رباعية الأبعاد، أن تقلص لورانتس في اتجاه

الحركة، $L' = L\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}$، يؤدي إلى تغير في الكثافة الحجمية، لا يتغير السطح S : $S = S'$ أي أن

$$\rho' L' = \rho L$$

$$\rho' = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \tag{2.12}$$

وهكذا فإن كثافة الشحنة الموجبة التي كانت ثابتة في K تتحول في K' إلى

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \tag{2.13}$$

وكذلك فإن كثافة الشحنة السالبة ρ'_- الثابتة في K' تتحول في K إلى

$$\rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \tag{2.14}$$

ومنه كثافة الشحنة الكلية في K'

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} + \rho_-\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}$$

نبدل ρ_- بـ $-\rho_+$ في هذه العلاقة لنجد أن

$$\rho' = \frac{\rho_+ V^2/C^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \tag{2.15}$$

وهي شحنة موجبة تنتج في النقطة M، موقع الشحنة $-q$، البعيدة عن السلك ذي المقطع S المسافة r الحقل $\vec{E}'$ في اتجاه Oy يساوي لـ

$$\vec{E}' = \frac{\rho' S\vec{e}_y}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{\rho_+ S\vec{e}_y V^2/C^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}$$

والقوة المؤثرة على الشحنة $-q$ هي

$$\vec{F}' = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{q\rho_+ S\vec{e}_y V^2/C^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \tag{2.16}$$

إن التيار في K هو $I = -\rho_- S \times -\vec{V} = \rho_+ SV$ والحقل الناتج عنه في اتجاه Oz هو حسب (2.9)' حيث نبدل μ_0 بـ $\frac{1}{\varepsilon_0 C^2}$

$$\frac{\rho_+ SV\vec{e}_z}{2\pi\varepsilon_0 C^2 r}$$

والقوة المؤثرة على الشحنة $-q$ السائرة بالسرعة $\vec{V}$ في ذات الاتجاه Ox هي

$$\vec{F} = -\frac{q\rho_+ S\vec{e}_y\, V^2/C^2}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.17}$$

وهكذا فإن

$$\vec{F'} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}$$

كما تقتضيه تحولات متجهة القوة في النسبية الخاصة.

4.2- الكمون المتجهي

رأينا أن الكمون يلعب دوراً مهماً في الكهربائية الراكدة، إذ يكفي أن نعرف توزع الشحنات في منطقة ما لتعيين الكمون الناتج عنها $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho d\tau}{r}$ حيث r المسافة بين النقطة التي نحسب الكمون فيها والنقطة المعينة بكثافة الشحنة ρ. ونحصل عندئذ على الحقل الكهربائي بسهولة لأنه مشتق من هذا الكمون $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ وعلى معادلة بواسون $\nabla^2 V + \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. توجد في المغنطيسية الراكدة طريقة مماثلة تبين الصلة بين كمون مغنطيسي علينا تحديده وكثافة التيار $\vec{J}$. أشرنا في (2.6) إلى أن تفرق تدوير متجهة لا على التعيين معدوم دوماً وبما أن $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ فمن الممكن إيجاد متجهة $\vec{A}$ يكون $\vec{B}$ تدويراً لها أي أن

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{2.18}$$

نسمي $\vec{A}$ الكمون المتجهي للحقل $\vec{B}$ لأن $\vec{B}$ مشتق منه على غرار الحقل $\vec{E}$ المشتق من V. وكما أن الكمون V معرف بإضافة ثابتة اعتباطية له (غراديانها يساوي الصفر) تعين نفس الحقل الكهربائي $\vec{E}$ وتتيح لنا اختيار مبدأ حساب الطاقة الكامنة، فإن الكمون المتجهي معرف بإضافة غراديان دالة ψ لا على التعيين لأن $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\psi = 0$ أياً كانت ψ، وبالتالي فإن الكمون المتجهي $\vec{A}'$ المعرف بإضافة $\vec{\nabla}\psi$ إلى الكمون المتجهي $\vec{A}$ يعين نفس الحقل المغنطيسي :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \left(\vec{A} + \vec{\nabla}\psi\right) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \tag{2.19}$$

ملاحظة هامة :

إن اشتقاق الحقل الكهربائي $\vec{E}$ من كمون V صحيح في حالة الكهربائية الراكدة فقط، فقد استخلصناه من $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ الصالحة في الكهربائية الراكدة حيث ينعدم الطرف الثاني من معادلة ماكسويل في هذه المعادلة $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. أما اشتقاق $\vec{B}$ من الكمون $\vec{A}$ فهو صحيح في كل الحالات، المستقلة عن الزمن أو التابعة له، لأنه مشتق من كون $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ الصالح في كل الأحوال : لا وجود للكتل المغنطيسية.

سنرى أننا مضطرون لإعطاء صيغة مناسبة للمعادلات التفاضلية الجزئية إلى أعطاء قيمة محددة لـ $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ وذلك باختيار مناسب لـ ψ. لنفرض على سبيل المثال أننا نريد أن يكون هذا التفرق معدوماً من أجل $\vec{A}'$ المعرف بإضافة $\vec{\nabla}\psi$ لـ $\vec{A}$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$$

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2\psi$$

لأن $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2$، علينا إذاً أن نختار الدالة ψ بدليل الكمون المتجهي القديم التي تحقق العلاقة

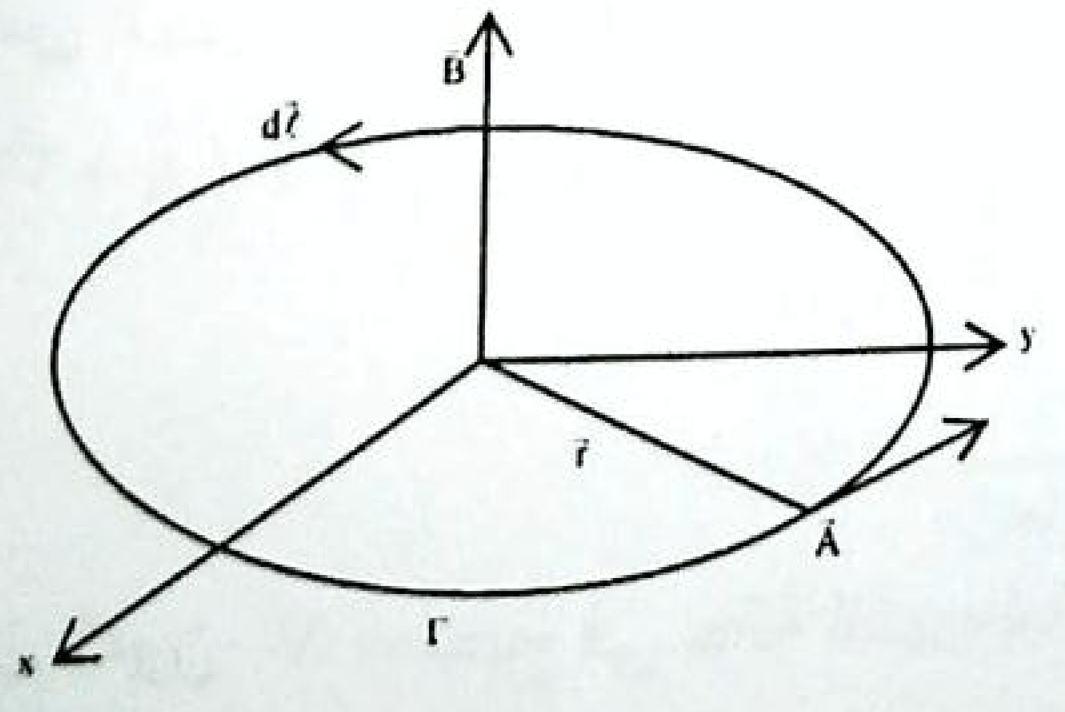
$$\nabla^2\psi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \qquad (2.20)$$

لنأخذ كمثال يبين لنا حرية اختيار $\vec{A}$ من أجل حقل معين $\vec{B}$ بأن نجعل المحور Oz منطبقاً على اتجاه $\vec{B}$. نكتب المعادلات الثلاث المقابلة لـ (2.18)

$$\begin{cases} B_x = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \\ B_y = \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \\ B_z = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} = B \end{cases} \qquad (2.18)'$$

لدينا عدة حلول لهذه النظمة من المعادلات، بأن نأخذ A_x أو A_y متناسبين مع B، أي أن $\vec{A} = (A_x, 0, 0)$ أو $\vec{A} = (0, A_y, 0)$. والإمكانية الثالثة هي $\vec{A} = (A_x, A_y, 0)$. لدينا في الحالة الأولى كحل مقبول $A_x = -yB$، والثانية $A_y = xB$ والثالثة بالجمع بين هذين الحلين $A_x = -\frac{1}{2}yB$ و $A_y = \frac{1}{2}xB$. يبين هذا الحل الثابت أن $\vec{A}$، المتناسبة مركبتاها مع -y و x، عمودية على $\vec{r}$ المعين بـ x و y، ونعين اتجاهها بكتابتها على شكل جداء متجهي، الشكل.14

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} \qquad (2.21)$$



الشكل.14

لنفترض الآن أن $\vec{A}$ ذا القيمة الثابتة على الدائرة التي نصف قطرها r هو المعلوم ونريد حساب $\vec{B}$ (وهو الهدف من إدخال مفهوم الكمون) فلدينا من مبرهنة ستوكس

$$\int \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \overline{dS} = \int \vec{B} \cdot \overline{dS}$$

$$A 2\pi r = B \pi r^2$$

ونجد من جديد العلاقة بين A و B

$$|B| = \frac{2|A|}{r}$$

لنكتب من جديد قانون ماكسويل–آمبير آخذين (2.18) بعين الاعتبار

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} = \frac{1}{\varepsilon_0 C^2} \vec{J}$$

والطرف الأول هو

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}$$

بأخذ $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ كما اخترنا، ومنه

$$\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{\varepsilon_0 C^2} \vec{J} = 0 \qquad (2.22)$$

تكافئ هذه المعادلة المتجهية (الصحيحة في حالة المغنطيسية الراكدة فقط) ثلاث معادلات سلمية

$$\nabla^2 A_x + \frac{1}{\varepsilon_0 C^2} J_x = 0$$

$$\nabla^2 A_y + \frac{1}{\varepsilon_0 C^2} J_y = 0$$

$$\nabla^2 A_z + \frac{1}{\varepsilon_0 C^2} J_z = 0$$

كل واحدة من هذه المعادلات هي معادلة بواسون يحل فيها $\frac{J}{C^2}$ محل كثافة الشحنة – وهذا ما يجعلنا نفضل الكتابة $\frac{1}{\varepsilon_0 C^2}$ للتعبير عن μ_0 – حلولها هي حلول معادلة بواسون

$$\begin{cases} A_x = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2} \displaystyle\int \frac{J_x d\tau}{r} \\ A_y = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2} \displaystyle\int \frac{J_y d\tau}{r} \\ A_z = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2} \displaystyle\int \frac{J_z d\tau}{r} \end{cases} \qquad (2.23)$$

أو

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2} \int \frac{\vec{J} d\tau}{r} \qquad (2.24)$$

حيث r المسافة بين النقطة التي نحسب فيها $\vec{A}$ والنقطة التي توجد فيها كثافة التيار $\vec{J}$. كثيراً ما نكتب هذه العلاقة، على غرار ما فعلناه في ('(3.15).1)، للتوضيح :

$$\vec{A}(1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2}\int \frac{J(2)\,d\tau_2}{r_{12}} \qquad (2.24)'$$

ملاحظة هامة : انطلاقاً من (1.(3.15)') على (1.(3.27)) كما حصلنا من هذه العلاقة أيضاً لنلاحظ أننا نحصل على هذه العلاقة أيضاً كما حصلنا من الحقلين الكهربائي والمغنطيسي، فالأول لا عقص له (لا تدويري) مبرهنة غرين، مع الاختلاف بين الحقلين الكهربائي والمغنطيسي، فالأول لا عقص له (لا تدويري) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$، والآخر لا لف له، $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. وتحل المعادلات الثلاث (2.22) محل $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

نجمع النتيجتين (1.(3.15)') و(2.24) في صيغة واحدة تعمم (1.(3.27)) هذا نصها :

ليكن لدينا متجهتان $\vec{E}$ و $\vec{B}$ لا على التعيين، أولاهما لا تدويرية والثانية لا لف لها. إن $\vec{E}$ مشتقة من دالة سلمية (كمون) V : $\vec{E} = -\vec{\nabla}V + C$، و $\vec{B}$ من دالة متجهية : $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla}C$، يحقق هذان الكمونان عندما نكتب مجموع المتجهتين على الشكل

$$\vec{E} + \vec{B} = \vec{A} \qquad (2.25)$$

العلاقة (1.(3.27))

$$\begin{cases} 4\pi V = \int \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{r} d\vec{r} \\ 4\pi \vec{A} = \int \frac{\vec{\nabla} \times \vec{A}}{r} d\vec{r} \end{cases} \qquad (2.26)$$

واضح أن $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ هو $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ و $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ هو $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\vec{J}}{\varepsilon_0 C^2}$. إنها مبرهنة هامة وعميقة جداً في كل الرياضيات الفيزيائية، تنطبق هنا على الكهرطيسية، موضوع هذا المجلد، كما تنطبق على ميكانيك السوائل الذي نكتفي بالإشارة إليه من آن إلى آخر في هذا الكتاب.

وهكذا فلدينا طريقة عامة لحساب الحقل المغنطيسي الناتج عن التيارات المستمرة لا تختلف عن طريقة حساب الحقل الكهربائي الناتج عن الشحنات الراكدة. سنعطي بعض الأمثلة في الفقرة التالية.

3. حساب الحقول المغنطيسية من الكمون المتجهي

1.3- الحقل الناتج عن سلك

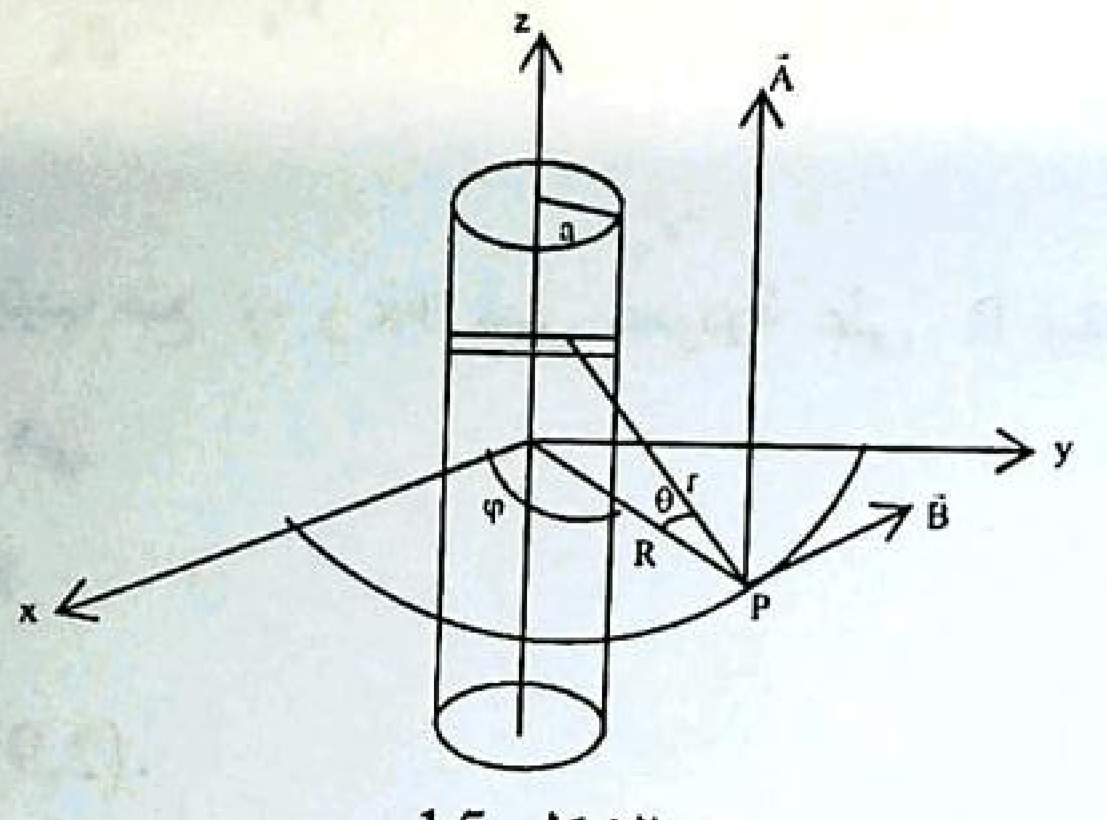
ليكن لدينا تيار مستمر يمر في سلك أسطواني الشكل نصف قطر مقطعه a وليكن Oz اتجاه مولد الأسطوانة. إن $J_x = J_y = 0$ ومركبة كثافة التيار في اتجاه Oz هي تعريفاً

$$J_z = \frac{I}{\pi a^2} \qquad (3.1)$$

تربنا العلاقات (2.23) أن $A_x = A_y = 0$ وأن A_z في نقطة P تبعد مسافة R عن محور السلك هي حسب العلاقة الأخيرة في (2.23)

$$A_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2}\int \frac{J_z d\tau}{r} = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 C^2}\int \frac{dr}{r} \qquad (3.2)$$

حيث r هي بعد النقطة P التي نحسب فيها الكمون المتجهي عن عنصر حجم التيار، الشكل.15، حيث طابقنا dr مع $d\ell$ مهملين مقطع السلك a



الشكل.15

إن عنصر الحجم هو $\pi a^2 dr$ و $J_z d\tau = I dr$.

يمكننا طبعاً أن نكامل (3.2) من أجل $r = \frac{R}{\cos\theta}$ بين R و $\alpha = \frac{\ell}{\sin\theta}$، حيث ℓ نصف طول اعتباطي للسلك، مضافاً إليها التكامل من $\alpha = \frac{-\ell}{\sin\text{-}\theta}$ إلى R. على أن نلاحظ أن r موجبة دوماً عندما تحل θ- محل θ، وأن إشارة dr في التكامل الثاني مخالفة للإشارة في التكامل الأول $dr = \frac{-R\sin\theta}{\cos^2\theta}$. وهكذا فحصيلة التكامل هي

$$\int_R^\alpha \frac{dr}{r} - \int_\alpha^R \frac{dr}{r} = -2LnR$$

والكمون A_z هو

$$A_z = \frac{-I}{2\pi\varepsilon_0 C^2} LnR = \frac{-\pi a^2 J_z}{2\pi\varepsilon_0 C^2} LnR \qquad (3.2)'$$

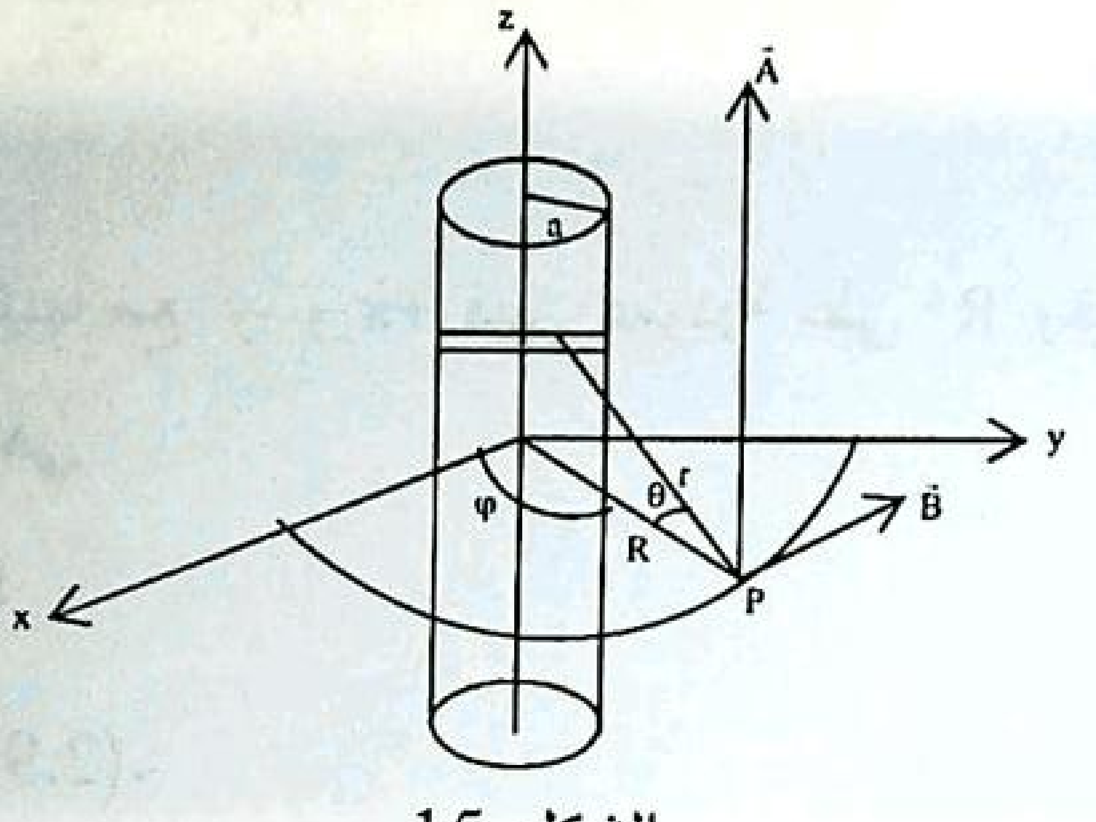
إلا أن التماثل بين الكمون المتجهي $\bar{A}$ والكمون السلمي V في الكهربائية يعفينا من إجراء التكامل. فقد حسبنا الكمون V بالتناظر من أجل سلك بالغ الطول (نحسب الكمون على مسافة صغيرة أمام طول السلك) ووجدنا ('(3.1).1) يكفي أن نستبدل الكثافة الحجمية للشحنة ρ بكثافة التيار مقسومة على C^2 لنحصل على '(3.2) دون إجراء أي حساب تكامل.

$$J_z = \frac{I}{\pi a^2} \qquad (3.1)$$

ترينا العلاقات (2.23) أن $A_x = A_y = 0$ وأن A_z في نقطة P تبعد مسافة R عن محور السلك هي حسب العلاقة الأخيرة في (2.23)

$$A_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2}\int \frac{J_z d\tau}{r} = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 C^2}\int \frac{dr}{r} \qquad (3.2)$$

حيث r هي بعد النقطة P التي نحسب فيها الكمون المتجهي عن عنصر حجم التيار، الشكل.15، حيث طابقنا dr مع $d\ell$ مهملين مقطع السلك a



الشكل.15

إن عنصر الحجم هو $\pi a^2 dr$ و $J_z d\tau = I dr$.

يمكننا طبعاً أن نكامل (3.2) من أجل $r = \frac{R}{\cos\theta}$ بين R و $\alpha = \frac{\ell}{\sin\theta}$، حيث ℓ نصف طول اعتباطي للسلك، مضافاً إليها التكامل من $\alpha = \frac{-\ell}{\sin -\theta}$ إلى R. على أن نلاحظ أن r موجبة دوماً عندما تحل $-\theta$ محل θ، وأن إشارة dr في التكامل الثاني مخالفة للإشارة في التكامل الأول $dr = \frac{-R\sin\theta}{\cos^2\theta}$. وهكذا فحصيلة التكامل هي

$$\int_R^\alpha \frac{dr}{r} - \int_\alpha^R \frac{dr}{r} = -2LnR$$

والكمون A_z هو

$$A_z = \frac{-I}{2\pi\varepsilon_0 C^2}LnR = \frac{-\pi a^2 J_z}{2\pi\varepsilon_0 C^2}LnR \qquad (3.2)'$$

إلا أن التماثل بين الكمون المتجهي $\vec{A}$ والكمون السلمي V في الكهربائية يعفينا من إجراء التكامل. فقد حسبنا الكمون V بالتناظر من أجل سلك بالغ الطول (نحسب الكمون على مسافة صغيرة أمام طول السلك) ووجدنا ('1.(3.1)) يكفي أن نستبدل الكثافة الحجمية للشحنة ρ بكثافة التيار مقسومة على C^2 لنحصل على '(3.2) دون إجراء أي حساب تكامل.

نحصل من '(3.2) و(2.18) على مركبات الحقل $\vec{B}$ لنجد أن

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 C^2}\frac{\partial}{\partial y}LnR = -\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 C^2}\frac{y}{R^2}$$

نظراً لأن $R = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$

و

$$\frac{\partial LnR}{\partial y} = \frac{\partial LnR}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{1}{R}\frac{y}{R}$$

و

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 C^2}\frac{x}{R^2}$$

$$B_z = 0$$

مركبات $\vec{B}$ متناسبة على الترتيب مع $-y$ و $+x$ فهي عمودية على R وخطوط الحقل المغنطيسي دوائر محيطة بالسلك وطويلة الحقل هي

$$B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2}\frac{2I}{R}$$

وهي القيمة التي وجدناها في (2.9).

2.3- الكمون والحقل الناتج عن ملف طويل (سولينوئيد)

لا نستطيع هنا إجراء حساب مقابل للنتيجة التي قادتنا إلى '(3.2) لأننا نفرض السولينوئيد متناه في الطول ونهمل الخطوة بين اللفات الدائرية التي يجري فيها التيار. يتيح لنا إهمال الخطوة النظر إلى شدة التيار nI ككثافة تيار $\vec{J}$ مماس لسطح السولينوئيد

$$J = \begin{cases} J_x = -J\sin\varphi = -J\dfrac{y}{r} \\ J_y = J\cos\varphi = J\dfrac{x}{r} \\ J_z = 0 \end{cases}$$

حيث φ الزاوية التي تعين وضع النقطة التي نحسب فيها على محيط الأسطوانة ذات نصف القطر a، كما في الشكل.15. إن الكمون المتجهي في نقطة ما بعيدة مسافة r عن محور الأسطوانة مواز لـ $\vec{J}$ ومتناسب معه، دوارنه

$$\int \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = 2\pi rA$$

نطبق مبرهنة ستوكس على الطرف الأيسر

$$\int \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) d\vec{S} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

سنقبل النتيجة التجريبية المبينة لانعدام مركبة الحقل B_z خارج السولينوئيد – لتجنب اللجوء إلى الحساب في الإحداثيات الأسطوانية واستعمال دالات بسل –، ونستعمل شدة الحقل التي حسبناها في (2.11) لنجد

$$2\pi\, r\, A = \mu_0 n I \cdot \pi a^2$$

ومنه طويلة A

$$A = \frac{\mu_0 n I a^2}{2r} = \frac{K}{r} \qquad (3.3)$$

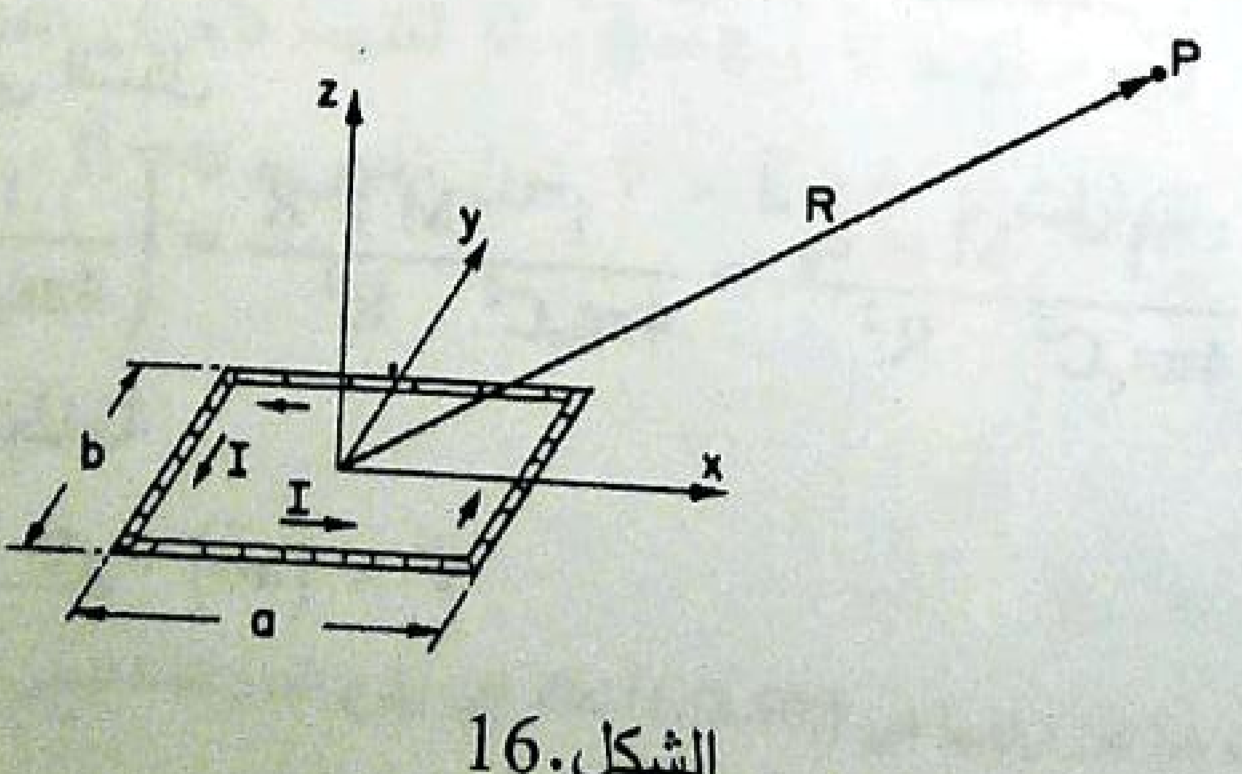
ولدينا كما حال كثافة التيار

$$\begin{cases} A_x = -K\dfrac{y}{r^2} \\ A_y = K\dfrac{x}{r^2} \\ A_z = 0 \end{cases} \qquad (3.3)'$$

3.3– الكمون والحقل الناتج عن دارة صغيرة، العزم المغنطيسي

ليكن لدينا تيار مغلق، عروة يمر فيها تيار مستمر أبعادها صغيرة أمام المسافة R التي تفصلها عن النقطة P التي نقيس الحقل الناتج عن العروة فيها. لنأخذ في بداية الأمر تياراً مستطيل الشكل، نعين مستواه بالإحداثيتين x, y ؛ $J_z = 0$ ومركبة الكمون المتجهي $\vec{A}$ على Oz معدومة أيضاً $A_z = 0$. ليكن a و b بعدي التيار، الشكل.16. يكافئ التياران اللذان يسيران في اتجاهين متعارضين موازيين لـ Ox قضيبين مشحونين، أحدهما ذو شحنة موجبة وثانيهما ذو شحنة سالبة، ويكافئ الكمون الكهربائي الراكد الناتج عنهما في النقطة P كمون ثنائي قطب طوله b شحنتاه $\pm Ia = \pm\rho$ ؛ نرمز لعزم ثنائي القطب هذا بـ $\vec{M} = -b\rho\vec{e}_y$ ولدينا ((3.9).1)

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{M} \cdot \vec{e}_R}{R^2}$$



الشكل.16

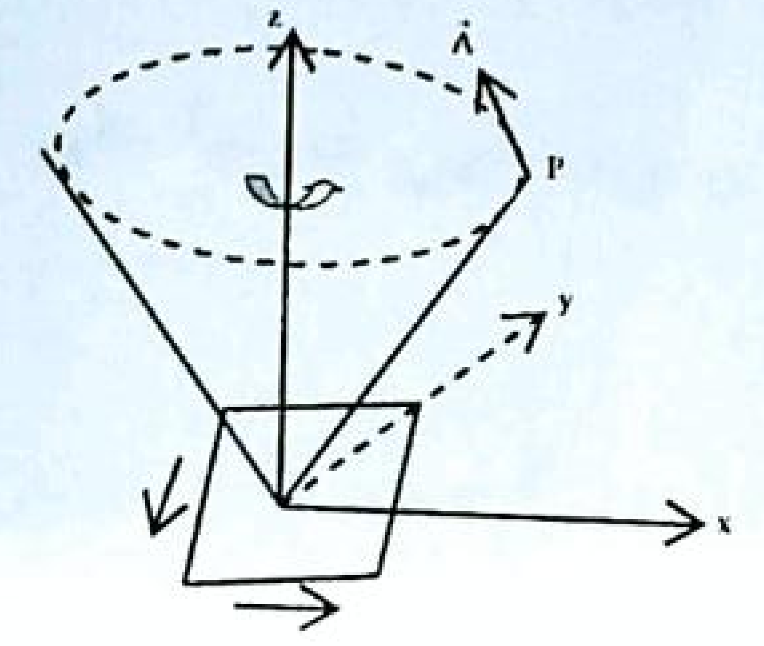
$y = (\vec{e}_R \cdot \vec{e}_y)R$ ؛ x, y, z بـ P وهكذا فالمركبة A_x هي، عندما نرمز لإحداثيات

$$A_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2}\frac{ba}{R^2}\frac{y}{R}$$

و $\vec{M} = ap\vec{e}_x$ ، Oy لدينا باستعمال نفس المحاكمة من أجل التيار الموازي لـ

$$A_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2}\frac{ba}{R^2}\frac{x}{R}$$

ترينا هاتان العلاقتان أن $\vec{A}$ ، $A_x, A_y, 0$ ، عمودي على $\vec{R}$ ويرسم خط الكمون المتجهي في النقطة P، عندما تتحرك $\vec{P}$ كمولد لمخروط محوره Oz، دائرة عمودية على $\vec{R}$ مركزها على Oz واتجاه دورانه هو اتجاه دوران التيار، الشكل.17



الشكل.17

تتناسب طويلة $\vec{A}$ مع المقدار

$$M = Iab$$

أي مع شدة التيار مضروبة بسطح الدارة ونحصل على $\vec{A}$ بإعطاء هذا المقدار اتجاهاً عمودياً على التيار

$$\vec{M} = Iab\vec{e}_z$$

<u>تعريف 3</u> :

يطلق على المتجهة $\vec{M}$ المساوية لجداء شدة التيار بمتجهة سطح الدارة العمودية على التيار والتي يتعين منحاها بسريان التيار في الاتجاه المباشر حولها اسم عزم التيار المغنطيسي.

ونحصل بالفعل على $\vec{A}$ على الشكل

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2}\frac{\vec{M} \times \vec{e}_R}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2}\frac{\vec{M} \times \vec{R}}{R^3} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2}\vec{\nabla} \times \frac{\vec{M}}{R}\right) \quad (3.4)$$

تنتج المساواة الأخيرة عن المتطابقة

$$\vec{\nabla} \times (a\vec{b}) = a\vec{\nabla} \times \vec{b} + \vec{\nabla}a \times \vec{b}$$

حيث المقداران، السلمي a والمتجهي $\vec{b}$ تابعان لـ (x, y, z)، التي نتحقق من صحتها بسهولة بالعودة إلى التعريفين $\vec{\nabla}\times$ و $\vec{\nabla}\cdot$.

إن $\vec{\nabla}\times\vec{M}=0$ لأن $\vec{M}$ لا يتوقف على الوضع (x, y, z) و $\vec{\nabla}\frac{1}{R}=-\frac{\vec{R}}{R^3}$.

الفارق الوحيد بين الكمونين الكهربائي الراكد والمغنطيسي الراكد هو أن الأول جداء سلمي لعزم ثنائي القطب بـ $\vec{e}_R$ والثاني جداء متجهي لعزم التيار المغنطيسي بـ $\vec{e}_R$.

نكتب عزم ثنائي القطب المغنطيسي على الشكل

$$\vec{M}=I\cdot\vec{S} \qquad (3.4)'$$

حيث $\vec{S}$ سطح التيار، يعين اتجاهه حركة التيار حوله بالاتجاه المباشر، من اليمين نحو اليسار. نحسب الحقل المغنطيسي، تدوير $\vec{A}$، فنجد حسب '(2.18)

$$(3.4)'' \quad \begin{cases} B_x \sim -\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{R^3}=\frac{3xy}{R^5} \quad ; \quad B_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0C^2}\frac{3xz}{R^5} \\ B_y \sim \frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{R^3}=\frac{3xy}{R^5} \quad ; \quad B_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0C^2}\frac{3yz}{R^5} \\ B_z \sim \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{R^3}-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{R^3}\right) \\ B_z \sim \frac{1}{R^3}-\frac{3x^2}{R^5}+\frac{1}{R^3}-\frac{3y^2}{R^5} \quad ; \quad B_z=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0C^2}\left(\frac{1}{R^3}-\frac{3z^2}{R^5}\right) \end{cases}$$

لا تختلف هذه المركبات في شيء عن مركبات الحقل الكهربائي الناتج عن شحنتين متساويتين ومتعاكستين في نقطة بعيدة بالنسبة للمسافة d الفاصلة بينهما[1]. فلا غرابة والحال هذه أن يتصور الفيزيائيون، قبل ماكسويل بل وحتى بعده، وجود كتل مغنطيسية على غرار الشحنات وثنائي قطب مغنطيسي يماثل ثنائي القطب الكهربائي. تبين $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ أن لا وجود للكتل المغنطيسية وأن الحقل ناتج عن التيار الكهربائي، وهذا ما تثبته دراسة المغنطيسية الحديدية القائمة على الميكانيك الكمومي. يعود التماثل بين مفعول الشحنتين في الكهربائية الراكدة ومفعول التيار ذي الدارة الصغيرة إلى تماثل قوانين الكهربائية الراكدة والمغنطيسية الراكدة عندما ندرس مفاعيلها على مسافات بعيدة عن الشحنات والتيارات. صحيح أن معادلتي ماكسويل في الكهربائية الراكدة $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$ و $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon$ تختلف عن معادلتي المغنطيسية الراكدة $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$ و $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ لكنهما تأخذان نفس الشكل تماماً عندما نبتعد عن أمكنة وجود الشحنات والتيارات : $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$ دون تغيير و $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ على غرار $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ دون تغيير و $\vec{\nabla}\times\vec{B}=0$.

---

[1] واضح أن اختلاف ترتيب المركبات هنا عن ترتيبها في ((3.10).1) عائد إلى وقوع العزم المغنطيسي على Oz بينما يقع عزم ثنائي القطب على Ox.

الشحنات المتحركة. من أجل التيار إلى حالة عدد ما من الشحنات المتحركة.

نعمم مفهوم العزم المغنطيسي الذي أعطيناه من أجل التيار إلى حالة عدد ما من الشحنات المتحركة، وضع الشحنة e_i معين بالمتجهة $\vec{r}_i$. نأخذ مبدأ الإحداثيات داخل الحجم الذي تحدده هذه الشحنات، وضع النقطة P، التي نقيس الكمون المتجهي فيها، بـ R، وسرعة الشحنة e_i، $\vec{V}_i$، نستبدل بالتكامل '(2.24) قيمة وسطية لـ $\langle \vec{A} \rangle$ نكتبها على الشكل

$$\langle A \rangle = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2}\sum_i \frac{e_i\langle \vec{V}_i \rangle}{\left|\vec{R} - \vec{r}_i\right|} \qquad (2.24)''$$

ننشر المقدار $\left|\vec{r}_{i}\right| = \left|\vec{R} - \vec{r}_i\right|$ في جوار $\vec{R}$ بأن نكتب من أجل أي دالة $\vec{R} \rangle\rangle \vec{r}_i$ $f = \frac{1}{\vec{R} - \vec{r}_i}$ التي تعطينا من أجل $f\left(\vec{R} - \vec{r}_i\right) = f\left(\vec{R}\right) - \vec{r}_i\vec{\nabla}f\left(\vec{R}\right)$

$$\frac{1}{\left|\vec{R} - \vec{r}_i\right|} = \frac{1}{R} - \left|\vec{r}_i\vec{\nabla}\frac{1}{R}\right| = \frac{1}{R} + \left|\frac{\vec{r}_i\vec{R}}{R^3}\right|$$

نضع هذا النشر في "(2.24)، مع ملاحظة أن $\frac{d}{dt}\langle \vec{r}_i \rangle = \langle \vec{V}_i \rangle$، ونكتب

$$\langle \vec{A} \rangle = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2}\left\{\frac{1}{R}\sum_i \frac{d}{dt}e_i\langle \vec{r}_i \rangle + \sum_i e_i\langle \vec{V}_i \rangle\left|\frac{\vec{r}_i\vec{R}}{R^3}\right|\right.$$

إن القيمة الوسطية للمجموع $\sum_i \frac{d}{dt}e_i\langle \vec{r}_i \rangle$، مشتق $\sum_i e_i\langle \vec{r}_i \rangle$ بالنسبة للزمن، معدومة[2]. نعيد كتابة الحد الثاني على النحو التالي:

$$\vec{V}_i\left(\vec{r}_i\vec{R}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \cdot \left(\vec{r}_i \cdot \vec{R}\right)\right) - \vec{r}_i\left(\vec{V}_i\vec{R}\right)$$

نكتب الطرف الأيسر المساوي لـ $\vec{V}_i\left(\vec{r}_i\vec{R}\right)$ على الشكل المتناظر

$$\vec{V}_i\left(\vec{r}_i\vec{R}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \cdot \left(\vec{r}_i \cdot \vec{R}\right)\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\vec{r}_i \cdot \vec{R}\right)\vec{V}_i - \vec{r}_i\left(\vec{V}_i\vec{R}\right)\right]$$

القيمة الوسطية للمشتق بالنسبة للزمن معدومة و

$$\langle \vec{A} \rangle = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2}\sum_i \frac{e_i}{2R^3}\left\langle\left[\left(\vec{r}_i \cdot \vec{R}\right)\vec{V}_i - \vec{r}_i\left(\vec{V}_i\vec{R}\right)\right]\right\rangle \qquad (3.5)$$

تعريف 4 :

نسمي عزماً مغنطيسياً لنظمة الشحنات المقدار المتجهي

$$\vec{M} = \frac{1}{2}\sum_i e_i\vec{r}_i \times \vec{V}_i \qquad (3.6)$$

---

[2] كتبنا مرات عديدة أن $\frac{1}{T}\int_0^T \frac{df}{dt}dt = \frac{f(T) - f(0)}{T}$ تساوي الصفر إذا كانت الدالة f دورية دورها T أو كانت منتهية وأخذنا T كبيراً بما فيه الكفاية.

واضح أن المقدار بين المعقفوتين في (3.5) هو الجداء المتجهي المزدوج

$$\left(\vec{r}_i \times \vec{V}_i\right) \times \vec{R}$$

وبالتالي فإن القيمة الوسطية لـ $\langle \vec{A} \rangle$ هي

$$\langle \vec{A} \rangle = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2} \frac{\langle \vec{M} \rangle \times \vec{R}}{R^3} \qquad (3.7)$$

إنها مماثلة للكمون المتجهي الذي ينتجه العزم النغنطيسي للتيار، ونكتبها كما في (3.4) على الشكل

$$\langle \vec{A} \rangle = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2} \vec{\nabla} \times \frac{\langle \vec{M} \rangle}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2} \vec{\nabla} \frac{1}{R} \times \vec{M}$$

ملاحظة :

عندما تكون النسبة $\frac{e_i}{m_i}$ هي نفسها وتساوي $\frac{e}{m}$ من أجل كل الجسيمات المشحونة التي تتكون منها النظمة فإن العزم المغنطيسي

$$\vec{M} = \frac{1}{2}\frac{e}{m}\sum_i m\vec{r}_i \times \vec{V}_i = \frac{1}{2}\frac{e}{m}\vec{L} \qquad (3.8)$$

حيث $\vec{L}$ العزم الزاوي الكلي للنظمة. إن تناسب العزم الزاوي مع العزم المغنطيسي للتيارات والشحنات أمر هام في الفيزياء التقليدية والكمومية على حد سواء.

4.3- قانون بيو وسافار Biot-Savart

عندما يكون السلك الذي يمر فيه التيار خيطي الشكل، مقطعه dS صغير جداً أمام الأبعاد الأخرى فكثافة التيار متجانسة وشدة التيار ثابتة بحيث يمكن كتابة الدالة تحت إشارة التكامل الثلاثي في (2.24) على الشكل

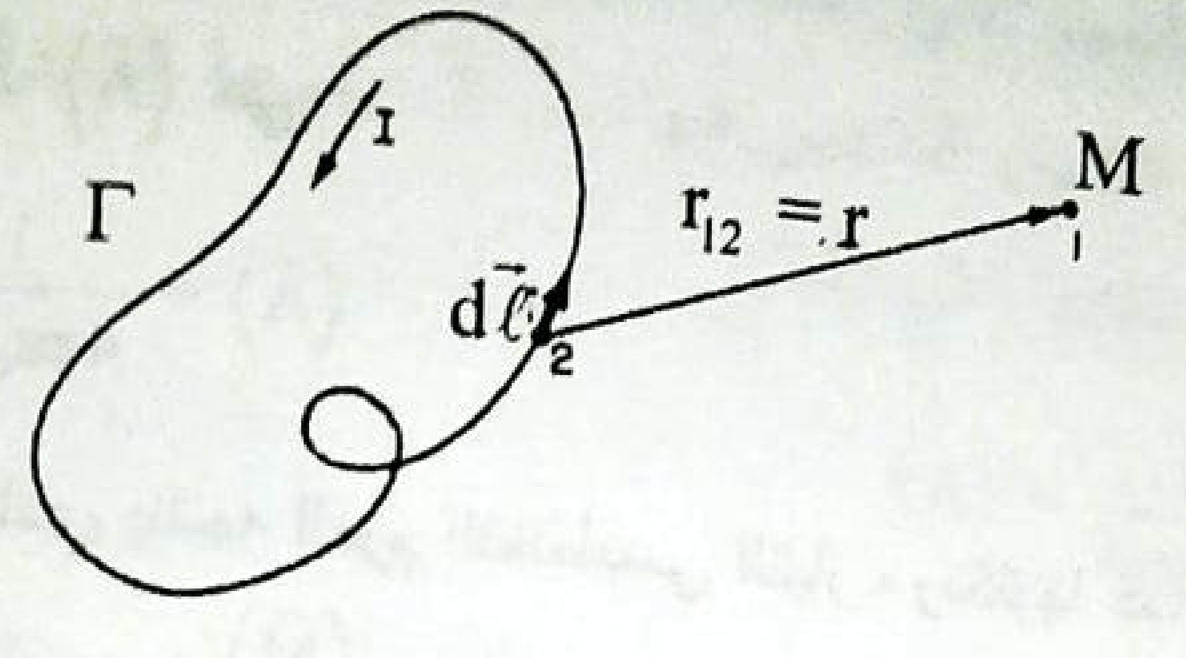
$$\vec{J}d\tau = J \cdot dS\, \overline{d\ell} = I\overline{d\ell}$$

وكتابة الكمون المتجهي $\vec{A}$ على شكل تكامل إحادي على طول التيار - $\vec{A}$ موازي لاتجاه التيار في كل مقطع من مقاطعه - يعمم (3.2)

$$\vec{A} = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 C^2} \int_\Gamma \frac{\overline{d\ell}}{r}$$

حيث Γ منحني الدارة التي يمر فيها التيار.

ليس من الضروري هنا أن يكون السلك خيطي الشكل مستقيماً، يمكنه أن يأخذ على سبيل المثال الشكل التالي، الشكل.18



الشكل.18

لنطبق المؤثر التفاضلي $\vec{\nabla} \times$ (التدوير) على طرفي هذه العلاقة للحصول على الحقل المغنطيسي في نقطة M تبعد عن $\overline{d\ell}$ المسافة r

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 C^2} \int \vec{\nabla} \times \left(\frac{\overline{d\ell}}{r} \right)$$

التكامل عملية خطية كالاشتقاق واشتقاق التكامل يساوي لتكامل الدالة المشتقة.

نرى من المتطابقة

$$\vec{\nabla} \times \left(a\vec{b} \right) = \vec{\nabla} a \times \vec{b} + a \vec{\nabla} \times \vec{b}$$

التي كتبناها أعلاه، من كون $\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \times \frac{\vec{r}}{r} = \frac{-\vec{r}}{r^3}$ و $\vec{\nabla} \times \overline{d\ell} = 0$ المستقلة عن r تساوي الصفر في النقطة M، أن قيمة الحقل $\vec{B}$

$$\vec{B} = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 C^2} \int \vec{\nabla} \frac{1}{r} \times d\vec{\ell} = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 C^2} \int \frac{-\vec{r} \times d\vec{\ell}}{r^3} \qquad (3.9)$$

يمكننا القول إذاً من وجهة النظر الرياضية أن كل عنصر $\overline{d\ell}$ من التيار ينتج في النقطة M البعيدة عنه مسافة r حقلاً مغنطيسياً يساوي

$$\overline{dB} = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 C^2} \frac{\overline{d\ell} \times \vec{r}}{r^3} \qquad (3.10)$$

بحيث تشكل الثلاثية $\left(\overline{d\ell}, \vec{r}, \overline{dB}\right)$ ثلاثية مباشرة. وهذا هو قانون بيو–سافار. لا معنى فيزيائياً بطبيعة الحال لحقل تنتجه قطعة تيار؛ لا يحدث الحقل إلا تيارات مغلقة، دارات.

لا يتغير قانون بيو-سافار عندما لا يكون السلك خيطي الشكل، يجب والحال هذه العودة إلى كتابة A كتكامل بدليل كثافة الشحنة، $I d\vec{\ell} = \vec{J} dS d\ell$، و

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2}\int \frac{\left(\vec{J}d\tau\right) \times \vec{r}}{r^3} \qquad (3.11)$$

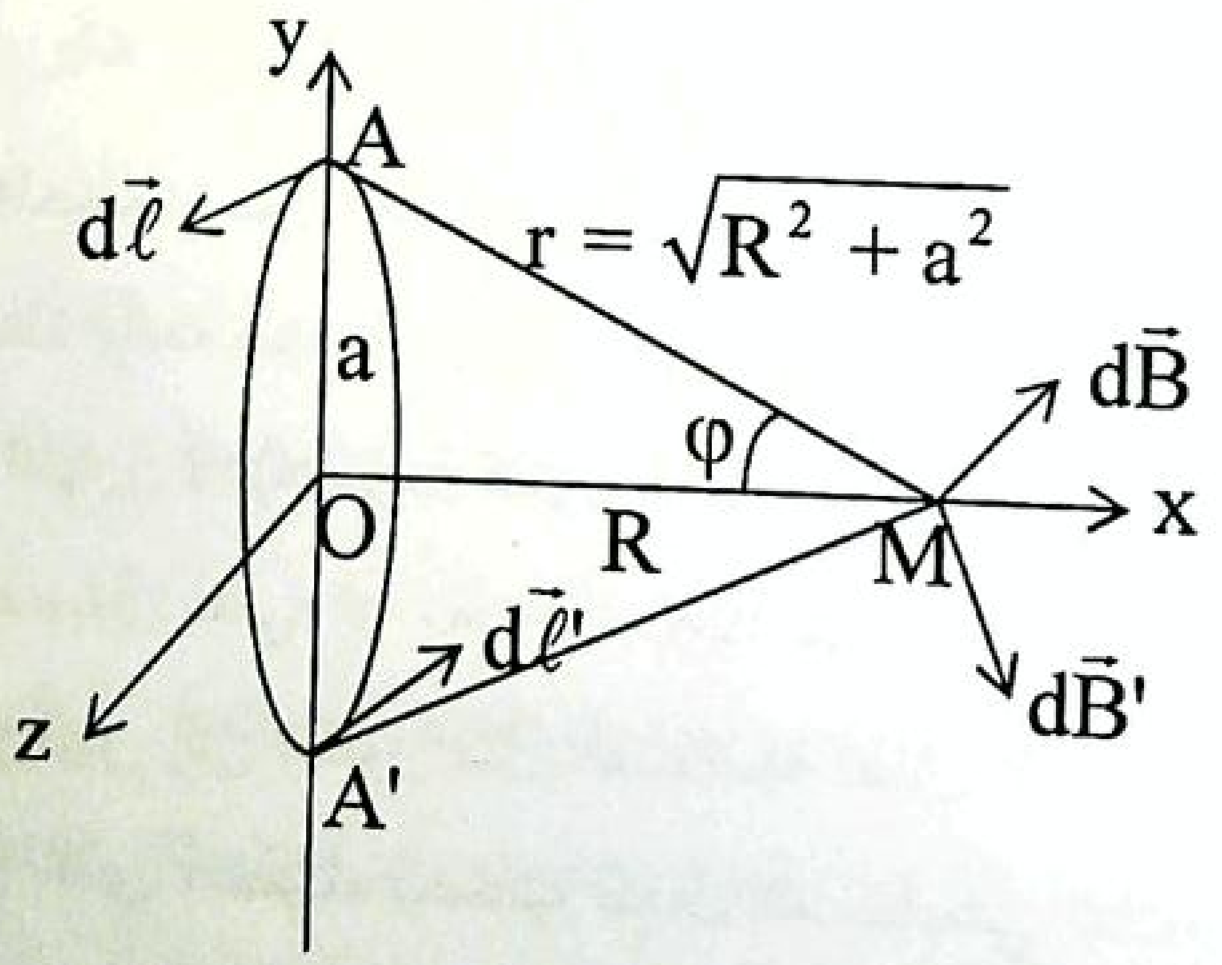
يلعب هذا القانون حيث شدة الحقل متناسبة مع $\frac{1}{r^2}$ الدور الذي يلعبه قانون كولون في الكهربائية الراكدة ويلح من جديد على التماثل القائم بين هذين الحقلين والمكتشف تجريبياً قبل توحيدها في معادلات ماكسويل.

لنطبق قانون بيو وسافار لحساب الحقل المغنطيسي الناتج عن دارة دائرية نصف قطرها a في نقطة M عمودية على الدائرة في مركزها O وتبعد عنها مسافة R. لدينا من أجل وضعين متناظرين على المخروط ذي الرأس M والقاعدة الدائرة ذات نصف القطر a نفس الحقل المغنطيسي العنصري، dB طويلته

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2}\frac{I d\ell}{\left(R^2 + a^2\right)}$$

واتجاه العنصرين $d\vec{B}$ و $d\vec{B}'$ في المستوي للدائرة xy هو كما يبينه الشكل.19a، ولا يبقى إلا مسقطيهما على Ox ؛ لدينا إذاً من أجل كل عنصر $d\ell$ أياً كان اتجاهه

$$dB_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 C^2}\frac{I d\ell}{\left(R^2 + a^2\right)}\sin\varphi = \frac{I d\ell\, a}{4\pi\varepsilon_0 C^2\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}}$$



الشكل.19a

وبالتكامل أي بتطبيق مبدأ التوضيع على كل الدائرة $\int d\ell = 2\pi a$

$$B_x = \frac{1}{2\varepsilon_0 C^2}\frac{I a^2}{\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}} \qquad (3.12)$$

نستطيع تعميم هذه العلاقة لحساب الحقل داخل سولينوئيد منته في نقطة ما من محوره تبعد المسافة x_1 عن قاعدته الأولى و x_2 عن قاعدته الثانية، الشكل.19b، يصبح B_x عنصر الحقل الناتج عن ndx تيار، حيث n عدد اللفات في واحدة الطول

$$dB_x = \frac{1}{2\varepsilon_0 C^2} nI \frac{a^2}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} dx$$

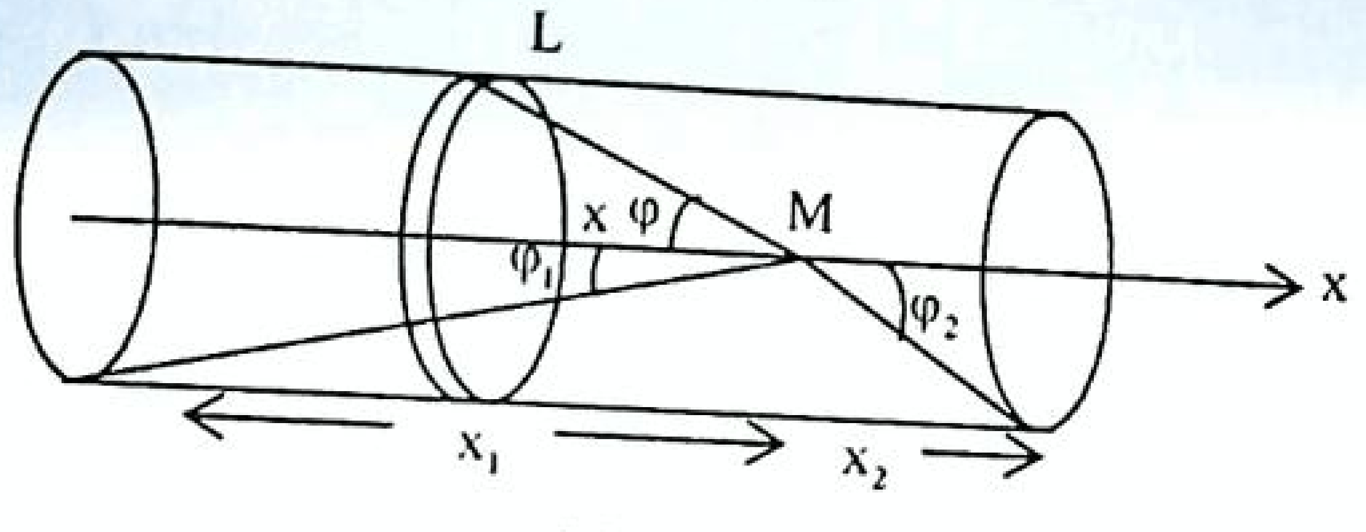
$$= \frac{1}{2\varepsilon_0 C^2} nI d\cos\varphi$$

ومنه

$$B = \frac{nI}{2\varepsilon_0 C^2}\left(\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\right) \quad (3.13)$$

ويساوي في مركز السولينوئيد ذي الطول L :

$$B = \frac{nI}{\varepsilon_0 C^2}\frac{L}{\left(L^2 + 4a^2\right)^{1/2}} \quad (3.14)$$



الشكل.19b

5.3- قياس حقل الكمون المتجهي

لنبدأ هنا بإبداء بعض الملاحظات حول الكمون المتجهي $\vec{A}$. لقد طرحت فكرة هذا الكمون للتأكيد على التماثل بين الكهربائية الراكدة والمغنطيسية الراكدة، بين الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$، وقد رأينا بالفعل أشكالاً عديدة لهذا التماثل : تحل كثافة التيار $\vec{J}$ (مقسومة على C^2) محل كثافة الشحنة في (2.23) لتعطينا الحقل $\vec{A}$ ومنه $\vec{B}$ على غرار الحصول على V ومنه $\vec{E}$. رأينا هذا التماثل كذلك بين ثنائيي القطب الكهربائي والمغنطيسي الذي دفع الفيزيائيين إلى تصور كتل مغنطيسية تماثل الشحنات الكهربائية، تبين أن لا وجود لها في الطبيعة. لكن المثال الذي أعطيناه لحساب الحقل المغنطيسي الناتج عن دارة دائرية أظهر لنا أنه من الممكن بل ومن الأسهل القيام بهذا الحساب مباشرة، اعتماداً على قانون بيو–سافار، بدون اللجوء إلى الحقل $\vec{A}$ وحساب مشتقاته الجزئية التي تعقد الأمور أحياناً. ولذا فقد حان الوقت للتساؤل عن الماهية الحقيقية للكمون $\vec{A}$، أهو مجرد إجراء رياضي يساعد عبر التماثل الذي ذكرناه على حساب الحقل المغنطيسي أم أنه حقل حقيقي يعبر عن واقع فيزيائي كغيره من الحقول السلمية، المتجهة أوالتانسورية

التي طالما أشرنا إليها ؟ صحيح أن قوانين النسبية الخاصة – والجدير بالتذكير هنا أن منشأها هو الكهرطيسية – تعبر عن المقادير الفيزيائية بمتجهات رباعية الأبعاد في فضاء مينكوفسكي : الطاقة والاندفاع الخطي، $(E, \bar{p})$، الشحنة وكثافة التيار، $(e, \bar{J})$، الكمون السلمي والمتجهي، $(V, \bar{A})$، انظر (I.7.§4.2)؛ وبالتالي فإن $\bar{A}$ مقدار فيزيائي كالمقادير الأخرى التي عددناها. قد تبدو هذه الحجة غير كافية في نظر الفيزياء التقليدية النيوتونية والنسبوية لأن أهمية الكتابة رباعية الأبعاد هي في تعبيرها عن مسايرة التغيير في الانتقال من نظمة محاور غاليلية K إلى أخرى K' تسير بسرعة مستقيمة منتظمة بالنسبة لها. لنذكر بالمناسبة أن الحقلين $\bar{E}$ و $\bar{B}$ ليسا مسايري التغيير وأنهما يتصدرا الحساب في الفيزياء التقليدية التي تنظر إلى القوة كمفهوم أول أساسي. من الطبيعي إذاً أن ترى هذه الفيزياء في $\bar{A}$ مجرد أداة رياضية، الغرض منها الوصول إلى المقادير الفيزيائية الحقة التي تعبر عن القوة. لكن مجيء ميكانيك الكم في آخر الربع الأول من القرن الماضي وضع مفهوم الطاقة، الهاميلتوني، في المقام الأول وجعله يحل محل مفهوم القوة الذي يكاد يختفي في إطار هذا الميكانيك. يكتب هاميلتوني جسيم كتلته m وشحنته e خاضع لحقل كهرطيسي على الشكل

$$H = \frac{1}{2m}\left(\bar{p} - e\bar{A}\right)^2 + eV$$

يتحول الاندفاع الحر $\bar{p}$ إلى $\bar{p} - e\bar{A}$ عند خضوع الجسيم إلى حقل كهرطيسي. هذا يعني أن الكمون المتجهي في ميكانيك الكم مقدار فيزيائي يمكن قياسه.

قلنا منذ البداية أن مفهوم الحقل يعني تغير خواص الفضاء، مساهمة الفضاء في التفاعل الذي ينتشر أولاً بأول ملغياً بذلك مفهوم التفاعل عن بعد؛ ونقيس شدة الحقل في نقطة ما عبر تفاعله مع شحنة، سميناها شحنة التجربة موضوعة في هذه النقطة. يقع إذاً على عاتق ميكانيك الكم، مادام لا يعتمد على مفهوم القوة، القيام بالتجارب اللازمة لمعرفة حقيقة الكمون المتجهي أهو حقل تتأثر به الشحنات الكهربائية أم مجرد أداة رياضية لا محتوى فيزيائي لها.

سنعرض في مطلع الفصل الأول من المجلد الرابع التجربة المؤسسة لميكانيك الكم كنظرية متسقة تشرح كل فيزياء الجسيمات الذرية وتحت الذرية؛ إنها تجربة تحاكي تجربة يونغ Young في الضوء وتبين أن الجسيمات الكمومية، الإلكترونات، لا تخضع لمفهوم المسار وإنما لها طابع موجي يجعلها تتداخل كم تتداخل الأمواج الضوئية ووضعنا كأحد مبادئ هذا الميكانيك أن الفعل (مقسوماً على ثابتة بلانك $\hbar$) يحل محل فرق الطور في الضوء. ثم إن الفعل متناسب مع المتجهة رباعية الأبعاد $(V, \bar{A})$ يمكن والحال هذه وضع سولينوئيد طويل، لينعدم الحقل المغنطيسي خارجه كما أوضحنا بينما يبقى الكمون المتجه وحده حوله. فإذا أدى وجود هذا السولينوئيد إلى تغيير فرق الطور بين الإلكترونين الواردين على الحاجز م ثقبي يونغ وبالتالي إلى انزياح مخطط التداخل (الانعراج) فمعنى ذلك أن الكمون يحقق معيار الحقل.

التي طالما أشرنا إليها ؟ صحيح أن قوانين النسبية الخاصة – والجدير بالتذكير هنا أن منشأها هو الكهرطيسية – تعبر عن المقادير الفيزيائية بمتجهات رباعية الأبعاد في فضاء مينكوفسكي : الطاقة والاندفاع الخطي، $(E, \bar{p})$، الشحنة وكثافة التيار، $(e, \bar{J})$، الكمون السلمي والمتجهي، $(V, \bar{A})$، انظر (I.7.§4.2)؛ وبالتالي فإن $\bar{A}$ مقدار فيزيائي كالمقادير الأخرى التي عددناها. قد تبدو هذه الحجة غير كافية في نظر الفيزياء التقليدية النيوتونية والنسبوية لأن أهمية الكتابة رباعية الأبعاد هي في تعبيرها عن مسايرة التغيير في الانتقال من نظمة محاور غاليلية K إلى أخرى K' تسير بسرعة مستقيمة منتظمة بالنسبة لها. لنذكر بالمناسبة أن الحقلين $\bar{E}$ و $\bar{B}$ ليسا مسايري التغيير وأنهما يتصدرا الحساب في الفيزياء التقليدية التي تنظر إلى القوة كمفهوم أول أساسي. من الطبيعي إذاً أن ترى هذه الفيزياء في $\bar{A}$ مجرد أداة رياضية، الغرض منها الوصول إلى المقادير الفيزيائية الحقة التي تعبر عن القوة. لكن مجيء ميكانيك الكم في آخر الربع الأول من القرن الماضي وضع مفهوم الطاقة، الهاميلتوني، في المقام الأول وجعله يحل محل مفهوم القوة الذي يكاد يختفي في إطار هذا الميكانيك. يكتب هاميلتوني جسيم كتلته m وشحنته e خاضع لحقل كهرطيسي على الشكل

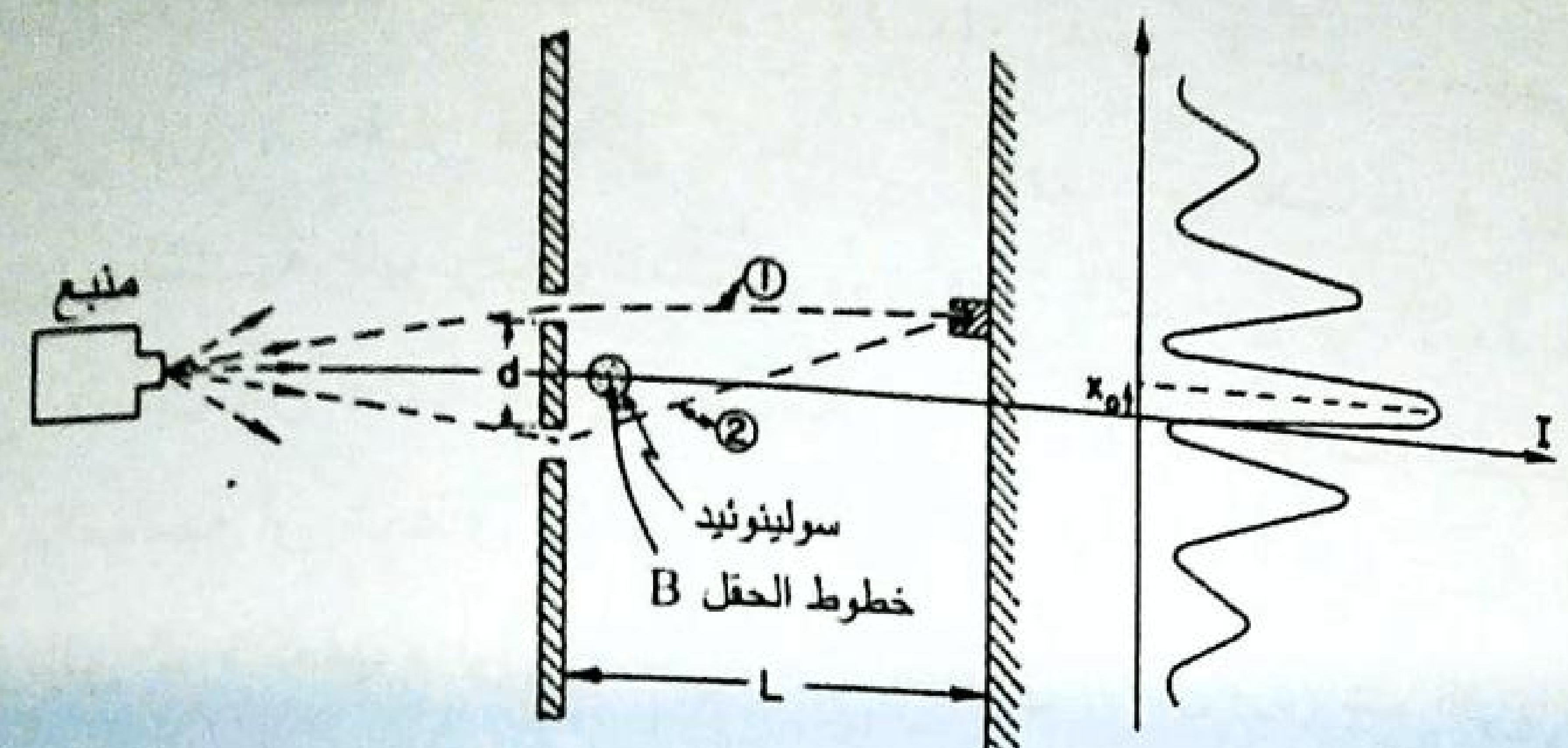
$$H = \frac{1}{2m}\left(\bar{p} - e\bar{A}\right)^2 + eV$$

يتحول الاندفاع الحر $\bar{p}$ إلى $\bar{p} - e\bar{A}$ عند خضوع الجسيم إلى حقل كهرطيسي. هذا يعني أن الكمون المتجهي في ميكانيك الكم مقدار فيزيائي يمكن قياسه.

قلنا منذ البداية أن مفهوم الحقل يعني تغير خواص الفضاء، مساهمة الفضاء في التفاعل الذي ينتشر أولاً بأول ملغياً بذلك مفهوم التفاعل عن بعد؛ ونقيس شدة الحقل في نقطة ما عبر تفاعله مع شحنة، سميناها شحنة التجربة موضوعة في هذه النقطة. يقع إذاً على عاتق ميكانيك الكم، مادام لا يعتمد على مفهوم القوة، القيام بالتجارب اللازمة لمعرفة حقيقة الكمون المتجهي أهو حقل تتأثر به الشحنات الكهربائية أم مجرد أداة رياضية لا محتوى فيزيائي لها.

سنعرض في مطلع الفصل الأول من المجلد الرابع التجربة المؤسسة لميكانيك الكم كنظرية متسقة تشرح كل فيزياء الجسيمات الذرية وتحت الذرية؛ إنها تجربة تحاكي تجربة يونغ Young في الضوء وتبين أن الجسيمات الكمومية، الإلكترونات، لا تخضع لمفهوم المسار وإنما لها طابع موجي يجعلها تتداخل كما تتداخل الأمواج الضوئية ووضعنا كأحد مبادئ هذا الميكانيك أن الفعل (مقسوماً على ثابتة بلانك $\hbar$) يحل محل فرق الطور في الضوء. ثم إن الفعل متناسب مع المتجهة رباعية الأبعاد $(V, \bar{A})$ يمكننا والحال هذه وضع سولينوئيد طويل، لينعدم الحقل المغنطيسي خارجه كما أوضحنا بينما يبقى الكمون المتجهي وحده حوله. فإذا أدى وجود هذا السولينوئيد إلى تغيير فرق الطور بين الإلكترونين الواردين على الحاجز من ثقبي يونغ وبالتالي إلى انزياح مخطط التداخل (الانعراج) فمعنى ذلك أن الكمون يحقق معيار الحقل.

وهذا ما يحدث فعلاً، الشكل.20



الشكل.20

الغريب في الأمر أن هذه التجربة لم تتحقق إلا في العام 1956، بعد مرور ربع قرن على تأسيس ميكانيك الكم، بناءً على اقتراح من بوم Bohm وآرانوف Ahranov. وهي تجربة في غاية الصعوبة لأن أطوال الموجة الإلكترونية أصغر بكثير من أطوال الموجات الضوئية؛ يجب إذاً أن تكون المسافة الفاصلة بين الثقبين صغيرة جداً وأن يكون السولينوئيد في غاية الدقة. إنه في حقيقة الأمر شعرة Whisker من الحديد الممغنط، الخ. ولكن الأغرب أن البعض مازالوا يتحدثون عن الكمون المغنطيسي كأداة رياضية !

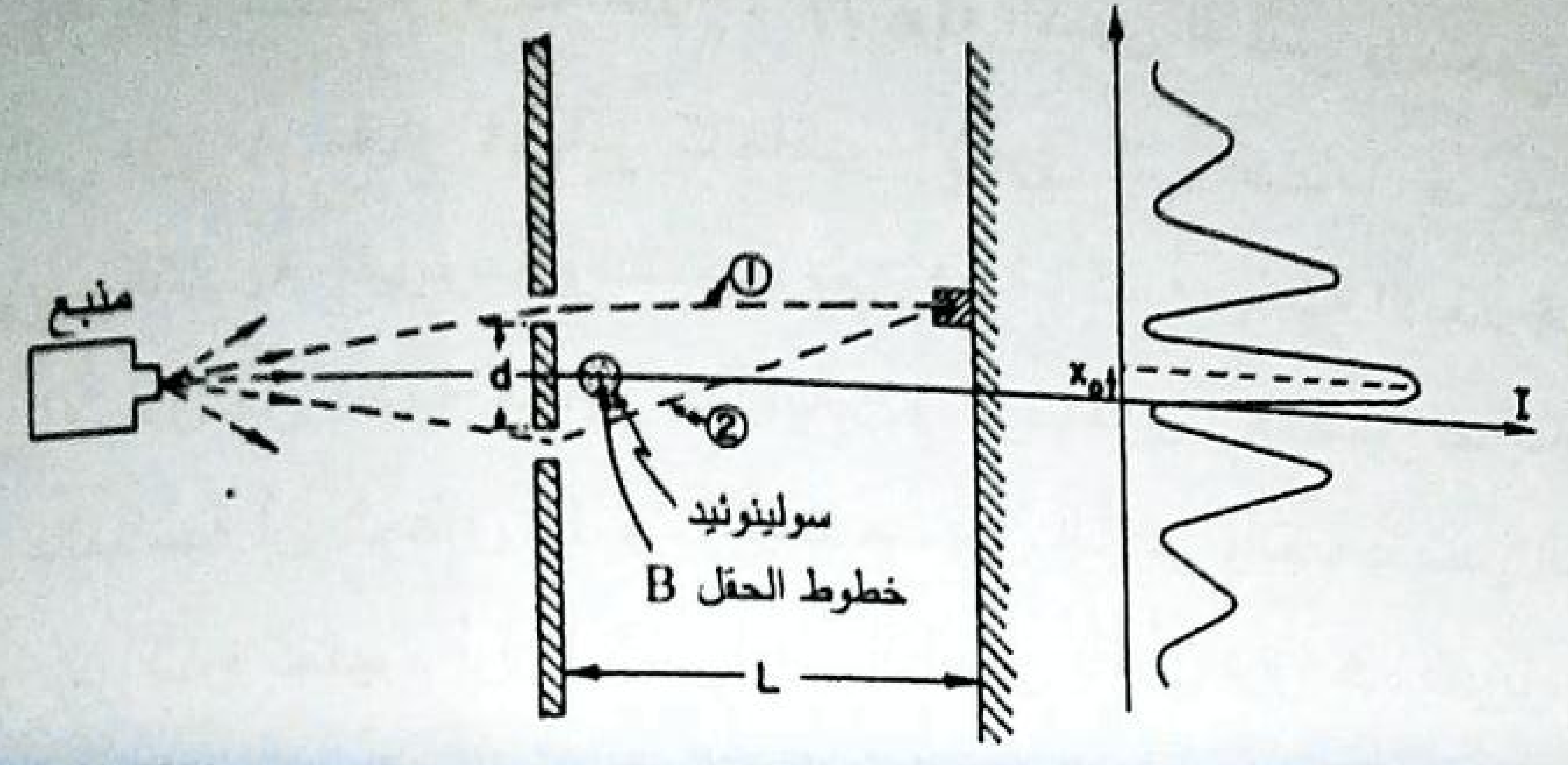
4. الطاقة المغنطيسية الراكدة

1.4– عمل القوى المغنطيسية

سيتيح لنا التماثل بين الكهربائية الراكدة ونظيرتها المغنطيسية إعطاء صيغ مماثلة للطاقة الكهربائية الراكدة، إلا أنه لابد من الإشارة منذ البداية إلى أن هذه الصيغ المماثلة لا تشمل كل الطاقة لأن تحريك الدارة، تحريك ثنائي القطب المغنطيسي مثلاً هو في واقع الأمر تحريك مركب من حركتين، حركة الدارة ككل وحركة الشحنات (الإلكترونات) في الدارة. لنبدأ في النظر إلى حركة التيار I، إلى حركة عنصر صغير، $\overline{d\ell}$، من هذا التيار خيطي الشكل في حقل مغنطيسي $\vec{B}$ ناتج عن تيارات مستمرة أخرى أو عن مغنطيس دائم. ليكن $\overline{dM} = \overline{MM'}$ الانتقال الذي حققته القوى المغنطيسية على هذا العنصر، الشكل.21. إن عمل هذه القوى العنصري حسب قانون لابلاس هو

$$d\mathscr{C} = \vec{F} \cdot \overline{dM} = I\left(\overline{\Delta\ell} \times \vec{B}\right) \cdot \overline{dM}$$

وهذا ما يحدث فعلاً، الشكل.20



الشكل.20

الغريب في الأمر أن هذه التجربة لم تتحقق إلا في العام 1956، بعد مرور ربع قرن على تأسيس ميكانيك الكم، بناءً على اقتراح من بوم Bohm وآرانوف Ahranov. وهي تجربة في غاية الصعوبة لأن أطوال الموجة الإلكترونية أصغر بكثير من أطوال الموجات الضوئية؛ يجب إذاً أن تكون المسافة الفاصلة بين الثقبين صغيرة جداً وأن يكون السولينوئيد في غاية الدقة. إنه في حقيقة الأمر شعرة Whisker من الحديد الممغنط، الخ. ولكن الأغرب أن البعض مازالوا يتحدثون عن الكمون المغنطيسي كأداة رياضية !

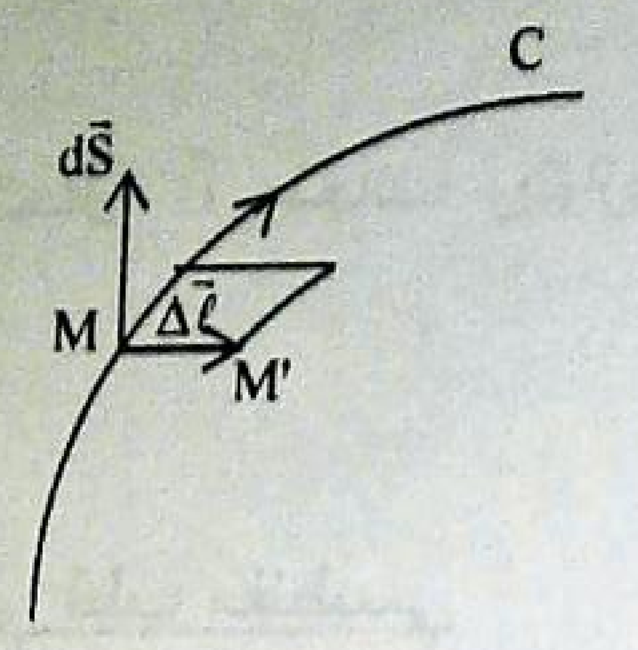
4. الطاقة المغنطيسية الراكدة

1.4- عمل القوى المغنطيسية

سيتيح لنا التماثل بين الكهربائية الراكدة ونظيرتها المغنطيسية إعطاء صيغ مماثلة للطاقة الكهربائية الراكدة، إلا أنه لابد من الإشارة منذ البداية إلى أن هذه الصيغ المماثلة لا تشمل كل الطاقة لإن تحريك الدارة، تحريك ثنائي القطب المغنطيسي مثلاً هو في واقع الأمر تحريك مركب من حركتين، حركة الدارة ككل وحركة الشحنات (الإلكترونات) في الدارة. لنبدأ في النظر إلى حركة التيار I، إلى حركة عنصر صغير، $\overline{d\ell}$، من هذا التيار خيطي الشكل في حقل مغنطيسي $\vec{B}$ ناتج عن تيارات مستمرة أخرى أو عن مغنطيس دائم. ليكن $\overline{dM} = \overline{MM'}$ الانتقال الذي حققته القوى المغنطيسية على هذا العنصر، الشكل.21.

إن عمل هذه القوى العنصري حسب قانون لابلاس هو

$$d\mathscr{C} = \vec{F} \cdot \overline{dM} = I\left(\overline{\Delta\ell} \times \vec{B}\right) \cdot \overline{dM}$$



الشكل.21

نحول الجداء المختلط في الطرف الثاني إلى جداء لـ $\vec{B}$ بعنصر السطح $\overline{dS} = \overline{dM} \times \overline{\Delta\ell}$ (أخذنا عنصر التيار $\overline{\Delta\ell}$ صغيراً ولكنه منته وإلا أصبح عنصر السطح لامتناهياً في الصغر من الدرجة الثانية).

$$d\mathscr{C} = I\overline{dS} \cdot \vec{B}$$

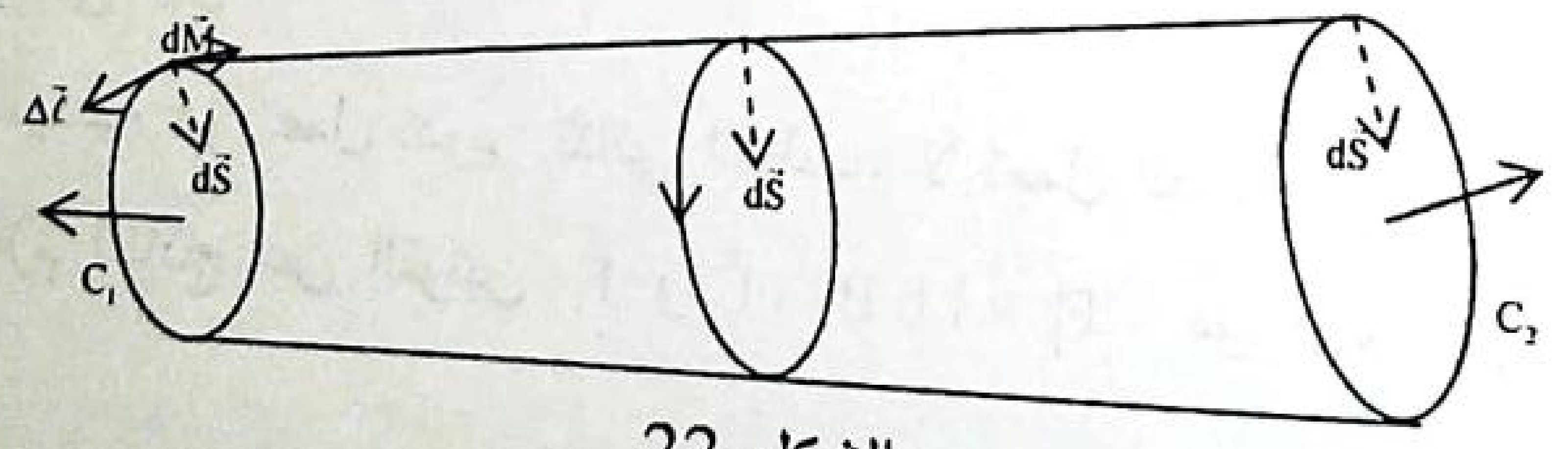
إن $\vec{B} \cdot \overline{dS}$ هو تعريفاً عنصر تدفق الحقل الراكد $\vec{B}$ عبر السطح $\overline{dS}$ الناتج عن انتقال $\overline{\Delta\ell}$ مسافة صغيرة؛ كأن عنصر التيار قام بحصد خطوط الحقل $\vec{B}$ أثناء حركته ولذا يطلق البعض على هذا التدفق اسم التدفق المحصود. ويرمزون له بـ $d\phi_C$

$$d\mathscr{C} = I \cdot \overline{dS} \cdot \vec{B} = Id\phi_C \qquad (4.1)$$

نحصل على عمل القوى المغنطيسية على العنصر $\overline{\Delta\ell}$ في انتقال منته بمكاملة هذه العلاقة بين وضعين M و M' متباعدين فنحصل على تدفق محصود منته نرمز له بـ $\Delta\phi_C$:

$$\mathscr{C} = I\int_M^{M'} d\phi_C = I\Delta\phi_C \qquad (4.2)$$

لنطبق هذه المحاكمة على دارة مغلقة C يعين انتقالها سطحاً مغلقاً بين الوضعين C_1 و C_2 للدارة تحده انتقالات عناصر التيار $\overline{\Delta\ell}$، الشكل.22.



الشكل.22

إن التدفق الكلي عبر السطح المغلق معدوم، على أن نقيس هذا التدفق بعناصر سطح متجهة نحو الخارج في كل الأحوال. لا ينطبق هذا الشرط إلا على وضع الدارة النهائي ϕ_2، التدفق في الوضع البدائي (الداخل) سالب والتدفق المقطوع سالب من أجل أي عنصر تيار $\overline{\Delta\ell}$ بين الوضعين M و M' وهكذا فإن

$$0 = \phi_2 - \phi_1 - \Delta\phi_C \qquad (4.3)$$

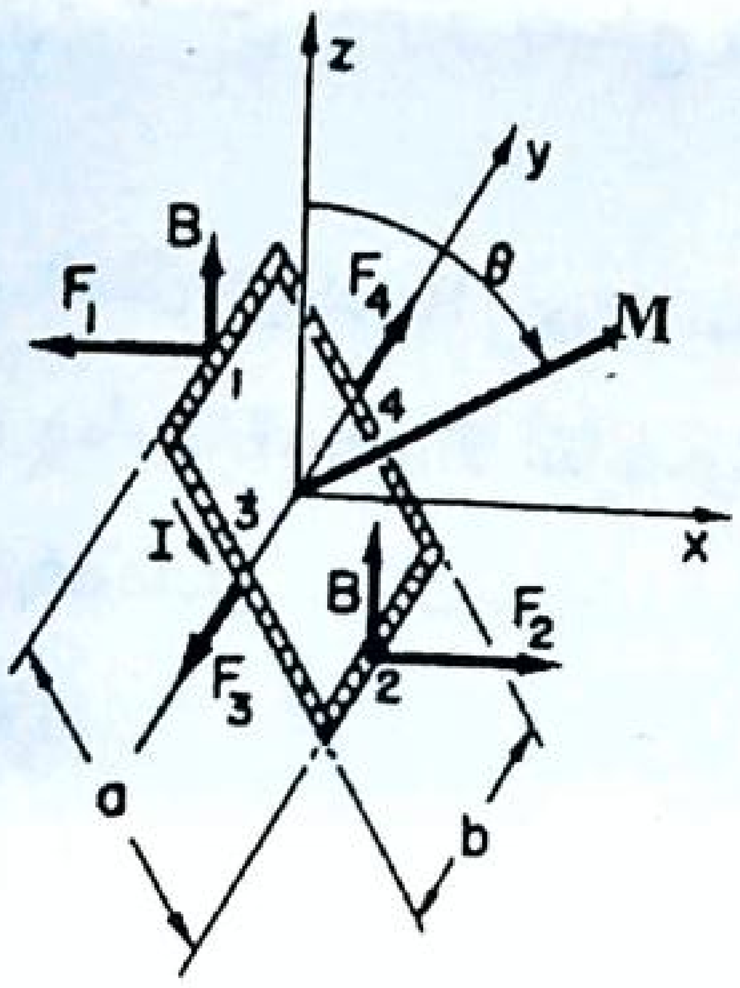
وبالتالي فإن عمل القوى المغنطيسية عند انتقال الدارة C بين الوضعين 1 و 2 هو

$$\mathscr{E} = I(\phi_2 - \phi_1) \quad (4.4)$$

وإلا وضعا الدارة في الحالتين 1 و 2 متجانساً ويتوازى $\vec{B}$ يجب لكي ينعدم هذا العمل أن يكون الحقل تتغير مساحة السطح.

2.4- عمل القوى المغنطيسية في ثنائي قطب مغنطيسي

ليكن لدينا ثنائي قطب على شكل مستطيل طوله a وعرضه b يستطيع الدوران حول محور مواز لعرضه ومار من وسطه. نأخذ هذا المحور كمحور Oy ونفرض أن الحقل المطبق $\vec{B}$ واقع في اتجاه المحور Oz، الشكل.23.



الشكل.23

ولتكن θ الزاوية بين اتجاه الحقل $\vec{B}$ واتجاه السطح العمودي على مستوى التيار، وهو اتجاه العزم المغنطيسي $\vec{M}$ حسبما تعارفنا عليه (دوران التيار مباشر حول $\vec{M}$). إن القوى المغنطيسية المؤثرة على طرفين متوازيين متعاكسة مباشرة نظراً لانقلاب اتجاه التيار بين العرضين 1 و 2. وبين الطولين 3 و 4؛ القوتان 1 و 2 موازيتان لـ Ox لأن التيار فيهما مواز لـ Oy والقوتان 3 و 4 واقعتان على Oy لأنه عمودي على التيار وعلى Oz.

إن عمل القوى المغنطيسية هو عمل تدوير ثنائي القطب، لا تعمل القوتان $\vec{F}_3$ و $\vec{F}_4$ الواقعتان على محور الدوران؛ ولذا فإن العزم الناتج عن القوتين $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$، $|F| = I\,b\,B$، هو عزم المزدوجة، نرمز له بـ $\vec{\Gamma}$، ويساوي لـ

$$\vec{\Gamma} = \vec{a} \times \vec{F}_2 \quad (4.5)$$

حيث θ هي – $\vec{F}_2$ مواز لـ Ox وعمودي على Oz و $\vec{a}$ عمودي على $\vec{M}$ والزاوية بينهما هي إذاً θ الزاوية القطبية $\widehat{OzOM}$.

وبالتالي فإن

$$|\vec{\Gamma}| = |a||F_2|\sin\theta = I\,a\,b\,B\sin\theta = |M||B|\sin\theta$$

ومنه

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \times \vec{B} \qquad (4.6)$$

اتجاه الدوران من $\vec{M}$ نحو $\vec{B}$، في عكس اتجاه الزاوية θ، لأن المزدوجة تسعى لوضع عزم التيار $\vec{M}$ في اتجاه $\vec{B}$ وبالتالي فإن $\Gamma = -MB\sin\theta$.

وبما أن الطاقة هي العمل الواجب بذله ضد القوى، تثاقلية أو كهربائية أو مغنطيسية لجلب الجسم من اللانهاية حيث القوى المؤثرة معدومة إلى النقطة التي نحسب فيها الطاقة فيمكن القول إن طاقة ثنائي القطب التي لا تأخذ بعين الاعتبار إلا حركة التيار ككل والتي نطلق عليها اسم الطاقة الميكانيكية هي، نظراً لأن $\frac{\partial U}{\partial \theta} = -\Gamma$،

$$U_{mec} = -\vec{M} \cdot \vec{B} \qquad (4.7)$$

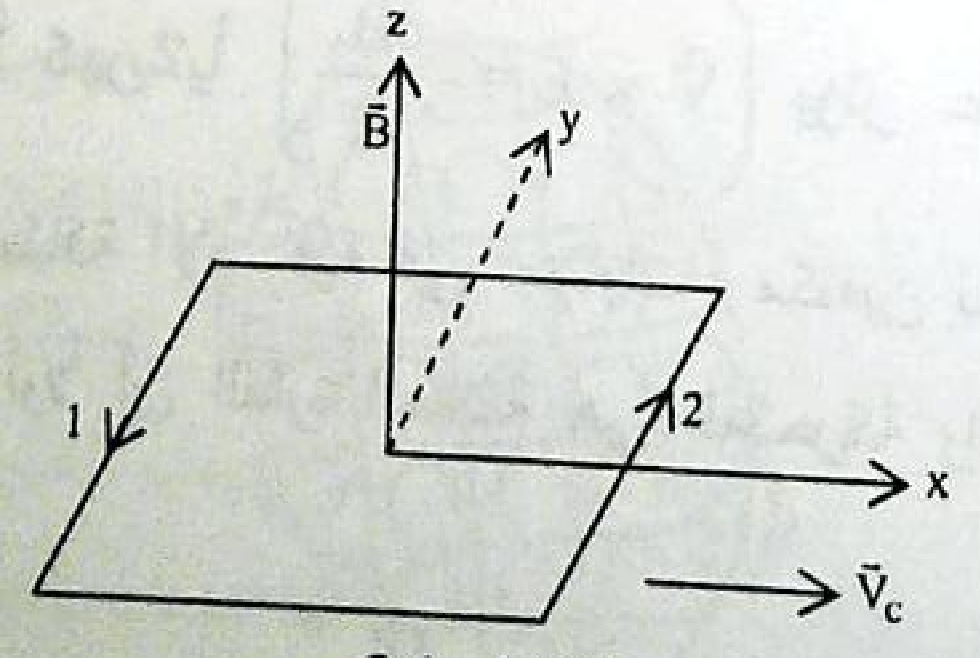
تماثل هذه الطاقة طاقة ثنائي القطب الكهربائي الكامنة وتبرر التصور القديم للكتل المغنطيسية، ولكنها تختلف عنها كونها لا تمثل كل الطاقة عندما يتعلق الأمر بحركة تيار.

لنلاحظ أن العلاقة (4.4) تعطينا نفس النتيجة عندما ننظر إلى العمل الواجب بذله ضد القوى المغنطيسية لجلب التيار من اللانهاية حيث الحقل معدوم $\phi_1 = 0$ إلى وضعه الحالي

$$U_{mec} = -\mathscr{C} = -I\phi = -I\vec{S} \cdot \vec{B} = -\vec{M} \cdot \vec{B} \qquad (4.8)$$

3.4- الطاقة الكلية

تتألف حركة الإلكترونات المكونة للتيار من حركتين، حركة التيار ككل أي حركة الدارة، نرمز لها بـ $\vec{V}_C$، وحركة الإلكترون في التيار ونرمز لها بـ $\vec{V}_e$. لنأخذ مثلاً الدارة المستطيلة، ثنائي القطب المغنطيسي ذا الطول a والعرض b، ولنفرض أن التيار يتحرك بالسرعة $\vec{V}_C$ في اتجاه Ox العمودي على اتجاه الحقل، السرعة $\vec{V}_e$ موازية لـ Oy وباتجاهين مختلفين في الخطين 1 و2 العرضانيين ولـ Ox في الخطين الطولانيين، الشكل.24.



الشكل.24

إن قوة لورانتس المؤثرة على شحنة الإلكترون هي $-e\vec{V}_C \times \vec{B}$، إنها في اتجاه Oy في الضلع 2 وتسرع الإلكترونات (التيار) في هذا الاتجاه وعلى العكس من ذلك فهي تبطئه في الضلع 1. فإذا كان $\vec{B}$ متجانساً فيعدم هذان المفعولان بعضهما ولا تتغير شدة التيار لأن مفعول قوة لورانتس على الضلعين 3 و 4 غير ذي تأثير على حركة الإلكترونات في السلك، فهو يحرك السلك ككل. أما إذا كانت شدة الحقل $\vec{B}$ مختلفة في الضلع 2 عنها في الضلع 1 فإن حصيلة المفعولين هي تغيير سرعة الإلكترونات وبالتالي تغيير شدة التيار؛ لا بد والحال هذه من منبع طاقة، يصدر طاقة أو يمتص الطاقة الفائضة لإبقاء شدة التيار على حالها. لنحسب عمل قوة لورانتس على ضلع التيار 2؛ ليكن n عدد الإلكترونات في واحدة الطول (واحدة الحجم عندما لا يكون السلك خطياً) تنتقل هذه الإلكترونات في اتجاه Oy مسافة $nV_e dt$ في الزمن العنصري dt وعمل القوة في هذا الاتجاه هو

$$F_y \cdot nV_e dt = -enV_e V_C B dt \qquad (4.9)$$

يطلق على هذا العمل اسم تغير الطاقة الكهربائية التي نرمز لها بـ U_{elec} ونكتب

$$\frac{dU_{elec}}{dt} = -enV_e V_C B = IV_C B \qquad (4.10)$$

إن حركة التيار ككل $\vec{V}_C$ ناتجة عن تناقص الطاقة الميكانيكية، إن عمل القوى المحركة في واحدة الزمن هو $-\frac{dU_{mec}}{dt}$، وهو حسب (4.8)

$$-\frac{dU_{mec}}{dt} = I\frac{d\phi}{dt} = IV_C B \qquad (4.11)$$

ونرى من العلاقتين السابقتين أن

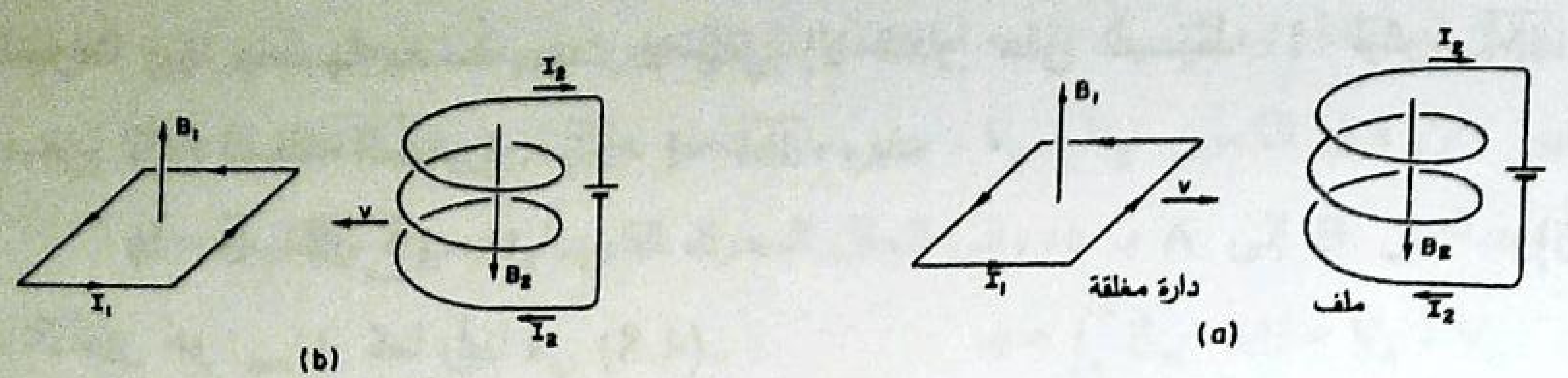
$$\frac{dU_{elec}}{dt} + \frac{dU_{mec}}{dt} = 0$$

ومنه، فإن مجموع الطاقتين الميكانيكية والكهربائية ثابت من أجل دارة مغلقة، نأخذه مساوياً للصفر

$$U_{elec} + U_{mec} = 0 \qquad (4.12)$$

علينا الآن لحساب طاقة الدارة المغلقة أخذ التيارات التي أحدثت الحقل المغنطيسي الذي تتحرك فيه هذه الدارة بعين الاعتبار. لتكن I_1 شدة التيار في الدارة المغلقة المتحركة في الحقل $\vec{B}_1$ الناتج عن ملف يجري فيه تيار I_2. ينتج التيار I_1 حقلاً مغنطيسياً في الملف نرمز له بـ $\vec{B}_2$. يتغير هذا الحقل عندما نحرك الدارة المغلقة منتجاً حقلاً كهربائياً $\left(\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}_2}{\partial t}\right)$ يؤثر على التيار I_2، وهو ما سندرسه بالتفصيل لاحقاً. سنهمل الآن الطاقة الإضافية في حساباتنا، مكتفين بالنظر إلى الحركة النسبية للدارة المغلقة بالنسبة للملف. لنفرض أولاً أن الدارة المغلقة هي المتحركة والملف ثابت، الشكل.25a، لدينا حسب (4.12)

$$U_{elec} + U_{mec} = 0$$



الشكل.25

لنرمز بـ U' إلى الطاقة في الملف ولنفرض ثانياً أننا نحرك الملف وأن الدارة المغلقة ثابتة، الشكل.25b؛ لدينا حسب (4.12)

$$U'_{elec} + U'_{mec} = 0$$

ولكن $U'_{mec} = U_{mec}$ ويجب ألا تدخل هذه الطاقة في حساب الحقل المغنطيسي للدارة والملف إلا مرة واحدة وهكذا فالطاقة الكلية هي نظراً لكون

$$U_{elec} + U'_{elec} + 2U_{mec} = 0$$

$$U_{elec} + U'_{elec} + U_{mec} = -U_{mec} \quad (4.13)$$

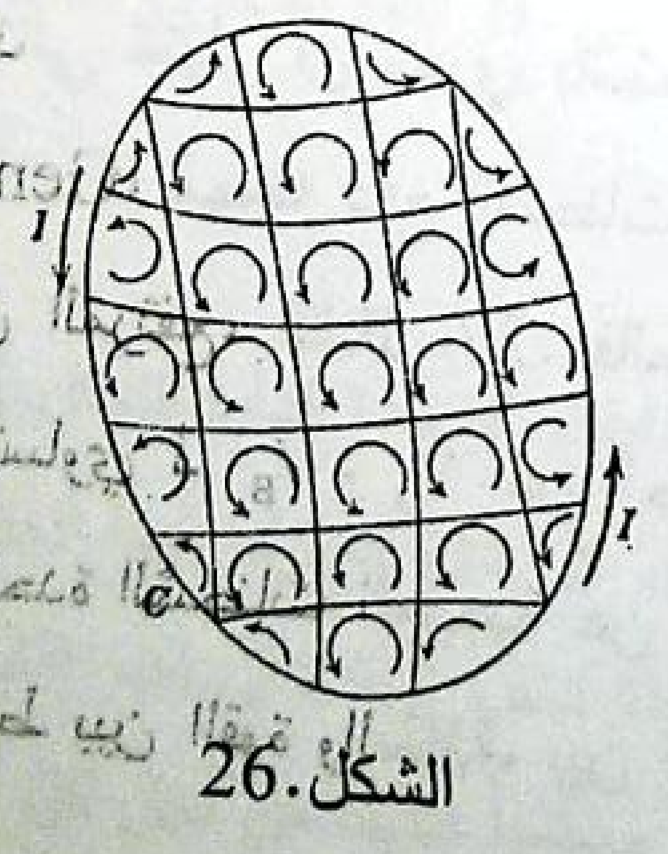
وطاقة ثنائي القطب الكلية عندما تُأخذ بعين الاعتبار التيارات التي أحدثت الحقل فيه هي

$$U = +\vec{M} \cdot \vec{B} \quad (4.14)$$

رأينا حالة مشابهة في الكهربائية الراكدة عندما ميزنا بين عمل القوى المطبقة على مكثفة معزولة وتلك المطبقة على مكثفة مرتبطة بمنبع طاقة يبقى كمونها ثابتاً.

4.4– طاقة التيارات المستمرة

يمكننا انطلاقاً من (4.14)، طاقة ثنائي القطب المغنطيسي الكلية، حساب طاقة تيار مغلق أياً كان شكل الدارة وذلك بتقسيم السطح الذي يرتكز على منحني التيار المغلق Γ إلى منحنيات مغلقة صغيرة، تحاكي ما فعلناه في مبرهنة ستوكس، يجري فيها التيار في اتجاه واحد، عكس حركة عقارب الساعة، الشكل.26



الشكل.26

لیكن $\overline{dM}$ عزم ثنائي. Γ على المحيط إلا التيار بحيث لا يبقى تُعدم التيارات فيها بعضها بعضاً القطب، عزم الدارة المغلقة الصغيرة : $\overline{dM} = I \cdot \overline{dS}$ ، ومنه

$$U = I\sum \overline{dS} \cdot \overline{B} = I\phi \qquad (4.15)$$

والطرف الأخير هو U_{mec}- كما رأينا في (4.8).

نكتب U على شكل تكامل ونطبق مبرهنة ستوكس

$$U = I\int \overline{B} \cdot \overline{dS} = I\int (\overline{\nabla} \times \overline{A}) \cdot \overline{dS} = I\oint_{\Gamma} \overline{A} \cdot \overline{d\ell} \qquad (4.16)$$

حيث يمر التيار I. Γ على المحيط الكمون المتجهي الذي أحدثته التيارات الأخرى

$\overline{A}$ هو الكمون المتجهي الذي أحدثته التيارات الأخرى على المحيط Γ حيث يمر التيار I. يمكن تصور أي توزع للتيارات المستمرة على شكل أنانيب تيار مقطعها dS موازية لتدفق التيار، لكثافته $\overline{J}$، تتأثر بالكمون المتجهي $\overline{A}$ الناتج عن التيارات الأخرى وطاقتها معطاة بـ (4.16). أو بتعبير آخر تتفاعل أنانيب التيار فيما بينها زوجاً زوجاً وطاقتها الكلية هي نصف الطاقة (4.16) عندما نكامل على كل التيارات لئلا نحسب التفاعل بين تيارين إلا مرة واحدة. وهكذا فطاقة تيار يحتل حجماً معيناً τ هي

$$U = \frac{1}{2}\int_{\tau} (\overline{J} \cdot \overline{dS}) \overline{A}\, \overline{d\ell} = \frac{1}{2}\int_{\tau} \overline{J} \cdot \overline{A}\, d\tau \qquad (4.17)$$

لأن $\overline{dS}$ مواز لـ $\overline{d\ell}$ حسب تعريف أنبوب التيار.

ونجد مرة أخرى التماثل بين الكهربائية الراكدة حيث الطاقة معرفة بتكامل جداء الشحنة بالكمون السلمي بدلاً عن جداء كثافة التيار بالكمون المتجهي هنا

$$U = \frac{1}{2}\int_{\tau} \rho V d\tau$$

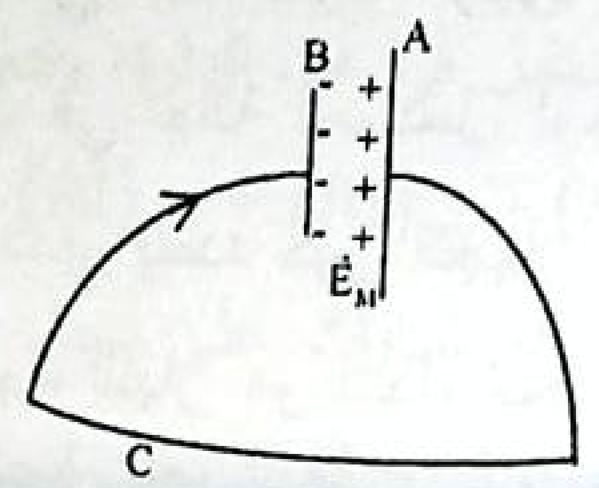
5. مصادر التيار المستمر

1.5- القوة المحركة الكهربائية Electromotive force (emf)

رأينا أنه من اللازم للإبقاء على الحالة المستقرة، على شدة تيار ثابتة رغم تبدد طاقة الإلكترونات نتيجة اصطدامها بالأيونات الساكنة، من منبع طاقة يحافظ على فرق كمون ثابت بين نقطتين A و B، بين طرفي السلك في دارة مغلقة ويتيح بالتالي للتيار أن يجري باستمرار في هذه الدارة. يطلق على منبع الطاقة هذا اسم مولد كهربائي Generator، مهمته دفع الشحنات الموجبة من الطرف B ذي الكمون المنخفض إلى الطرف A ذي الكمون المرتفع، الشكل.27. فالمولد الكهربائي جهاز يضخ الشحنات بإحداثه حقلاً كهربائياً، بإنتاجه طاقة تساوي لـ $V_A - V_B$ من أجل واحدة الشحنات. يطلق على هذه الطاقة، على هذا العمل اللازم لفصل واحدة الشحنات الموجبة عن B ونقلها إلى A اسم القوة المحركة الكهربائية؛ إنها تسمية خاطئة طبعاً تخلط بين القوة والطاقة، بين القوة وعمل القوة ولكنها مستعملة منذ

زمن بعيد وبمعان مختلفة؛ وماكسويل نفسه استعملها تارة للتعبير عن شدة الحقل الكهربائي المحدث $\vec{E}_M$ وبعدها للتعبير عن فرق الكمون $V_A - V_B$، وهو ما سنفعله هنا. نرمز إذاً للعمل المبذول لجلب واحدة الشحنات الموجبة من B إلى A بـ e، وإلى الحقل المحرك الكهربائي بـ $\vec{E}_M$ ونكتب

$$e = \int_B^A \vec{E}_M \cdot d\vec{r} = V_A - V_B \qquad (5.1)$$



الشكل.27

لنلاحظ أن التوازن الكهربائي الراكد، أن انعدام التيار (الدارة مفتوحة) يعني أن

$$\vec{E}_M = -\vec{E}$$

أما عند مرور التيار فعلى الطاقة e أن تكافئ ضياع الطاقة في السلك، ولتكن مقاومته R، وفي المولد ذاته، ولتكن مقاومته R'؛ ولدينا، بتطبيق قانون أوم

$$e = RI + R'I$$

ومن (5.1) التي استخلصناها عندما تكون الدارة مفتوحة نجد عند إغلاق الدارة

$$e = V_A - V_B + R'I \qquad (5.2)$$

هذا من أجل واحدة الشحنات أما من أجل التيار كله فنحصل على العمل المبذول الكلي في واحدة الزمن، على الاستطاعة

$$eI = (V_A - V_B)I + R'I^2 \qquad (5.3)$$
$$= RI^2 + R'I^2$$

لنتصور الآن جهازاً آخر في الدارة يخفض الكمون بدلاً عن رفعه، يحول جزءاً من طاقة الشحنات إلى عمل بدلاً عن بذله عملاً. نقول عن هذا الجهاز أنه جهاز مستقبل، يولد حقلاً كهربائياً راكداً $\vec{E}_C$ معاكساً لاتجاه التيار وعمله عمل سالب.

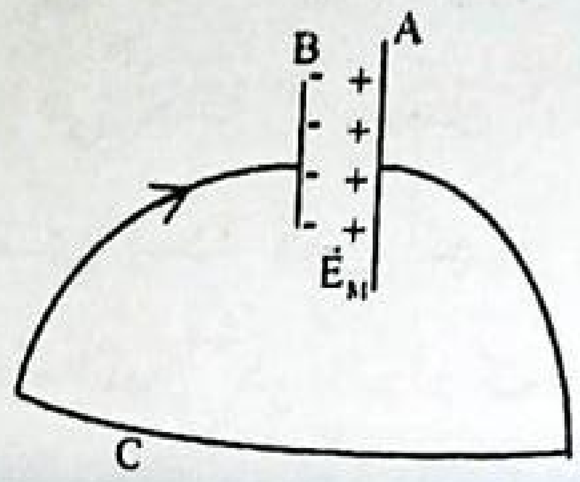
نسمي العمل المعاكس الموجب من A إلى B القوة المحركة المعاكسة e_C ونكتب كما في (5.2) عندما تكون الدارة مغلقة

$$V_A - V_B = e_C + R'I \qquad (5.4)$$

تهدف هذه الكتابة إلى تسهيل دراسة الدارات المعقدة كدارة الشكل.28 أدناه، نطلق على النقاط التي تتفرع فيها التيارات اسم العقد ونعين من أجل كل دارة تشترك فيها العقدة اتجاهاً لسير التيار الحقيقي لنعطي بذلك قيمة جبرية للتيار فهو موجب إذا دخل العقدة وسالب إذاث خرج منها، ونظراً لأن الشحنات لا تتجمع في أي نقطة عندما يكون التيار مستمراً فلدينا من أجل كل عقدة

زمن بعيد وبمعان مختلفة؛ وماكسويل نفسه استعملها تارة للتعبير عن شدة الحقل الكهربائي المحدث $\vec{E}_M$ وبعدها للتعبير عن فرق الكمون $V_A - V_B$، وهو ما سنفعله هنا. نرمز إذاً للعمل المبذول لجلب واحدة الشحنات الموجبة من B إلى A بـ e، وإلى الحقل المحرك الكهربائي بـ $\vec{E}_M$ ونكتب

$$e = \int_B^A \vec{E}_M \cdot d\vec{r} = V_A - V_B \quad (5.1)$$



الشكل.27

لنلاحظ أن التوازن الكهربائي الراكد، أن انعدام التيار (الدارة مفتوحة) يعني أن

$$\vec{E}_M = -\vec{E}$$

أما عند مرور التيار فعلى الطاقة e أن تكافئ ضياع الطاقة في السلك، ولتكن مقاومته R، وفي المولد ذاته، ولتكن مقاومته R'؛ ولدينا، بتطبيق قانون أوم

$$e = RI + R'I$$

ومن (5.1) التي استخلصناها عندما تكون الدارة مفتوحة نجد عند إغلاق الدارة

$$e = V_A - V_B + R'I \quad (5.2)$$

هذا من أجل واحدة الشحنات أما من أجل التيار كله فنحصل على العمل المبذول الكلي في واحدة الزمن، على الاستطاعة

$$eI = (V_A - V_B)I + R'I^2 \quad (5.3)$$
$$= RI^2 + R'I^2$$

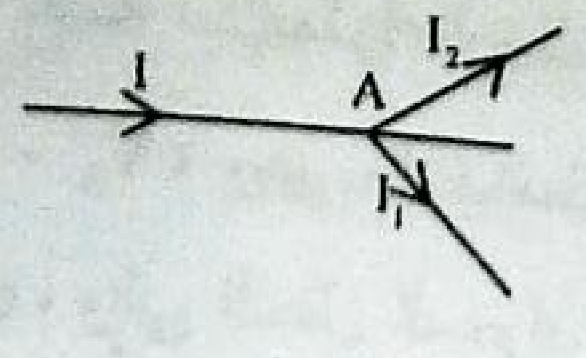
لنتصور الآن جهازاً آخر في الدارة يخفض الكمون بدلاً عن رفعه، يحول جزءاً من طاقة الشحنات إلى عمل بدلاً عن بذله عملاً. نقول عن هذا الجهاز أنه جهاز مستقبل، يولد حقلاً كهربائياً راكداً $\vec{E}_C$ معاكساً لاتجاه التيار وعمله عمل سالب.

نسمي العمل المعاكس الموجب من A إلى B القوة المحركة المعاكسة e_C ونكتب كما في (5.2) عندما تكون الدارة مغلقة

$$V_A - V_B = e_C + R'I \quad (5.4)$$

تهدف هذه الكتابة إلى تسهيل دراسة الدارات المعقدة كدارة الشكل.28 أدناه، نطلق على النقاط التي تتفرع فيها التيارات اسم العقد ونعين من أجل كل دارة تشترك فيها العقدة اتجاهاً لسير التيار الحقيقي لنعطي بذلك قيمة جبرية للتيار فهو موجب إذا دخل العقدة وسالب إذات خرج منها، ونظراً لأن الشحنات لا تتجمع في أي نقطة عندما يكون التيار مستمراً فلدينا من أجل كل عقدة

$$\sum I = 0 \qquad (5.5)$$



نرمز للمولد والمستقبل بقطبين، $\overset{A}{\underset{+}{|}}\ \overset{B}{|}$، أحدهما موجب والآخر سالب. يسير التيار الموجب فعلاً في دارة مغلقة من الموجب A نحو السالب B، في حالة المولد، لوجود الحقل الكهربائي $\vec{E}_M$ الذي يرفع الكمون، وعلى العكس من السالب نحو الموجب في حالة المستقبل لوجود الحقل الكهربائي $\vec{E}_C$ الذي يخفض الكمون. أي أن تعيين اتجاه التيار هو الذي يحدد كون الجهاز مستقبلاً أو مولداً ويعين الإشارة الجبرية الواجب إعطاؤها لـ e و e_C. وبما أن اتجاه التيار هو اتجاه انخفاض الكمون فإن إشارة E_M ومعها إشارة e سالبة بينما إشارة E_C ومعها إشارة e_C موجبة. يتيح هذا الإصطلاح لنا استبدال كل هبوط للكمون عبر موصل مقاومته R وشدة التيار فيه I بـ $RI - e$: إنها العلاقة (5.2) في حالة المولد و(5.4) في حالة المستقبل، حيث R هنا هي المقاومة بين طرفي السلك مضافاً إليها مقاومة الجهاز. هذا ولما كان لدينا من أجل أي منحن مغلق العلاقة

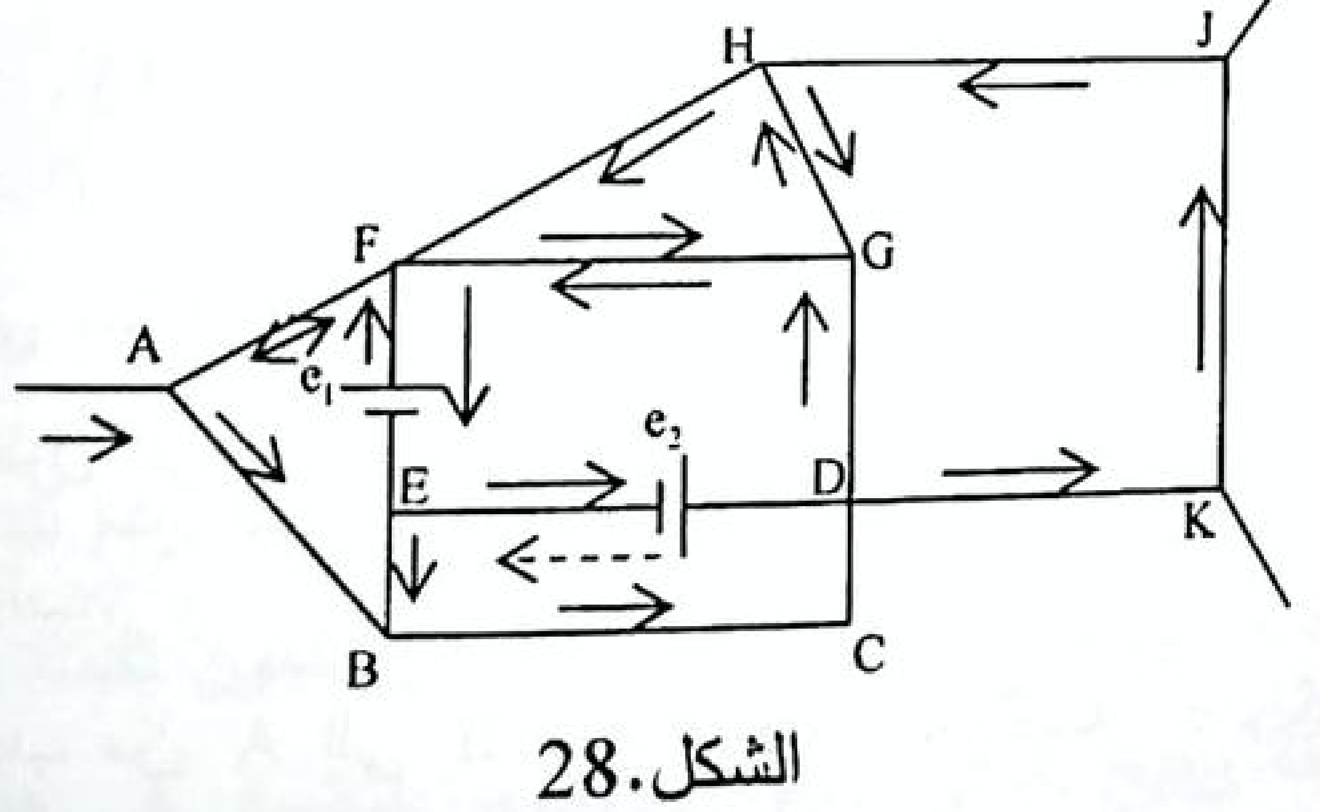
$$\oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0$$

المكافئة لـ $\sum_{i=1}^{n} V_i = 0$

حيث n عدد هبوطات الكمون في عقد هذا المنحني المغلق فإن

$$\sum_{i=1}^{n} RI - e = 0 \qquad (5.6)$$

يطلق على (5.5) و(5.6) اسم قاعدتي كيرشوف Kirchhoff.



الشكل.28

لدينا على سبيل المثال من أجل العقدة E في الشكل.28 عندما ننظر إليها كعقدة في الدارة المغلقة FEDG حسب (5.5)

$$I_{FE} - I_{ED} - I_{EB} = 0 \qquad (1)$$

ولدينا في هذه الدارة عندما ننطلق من العقدة G وأخذ اتجاه التيار معاكساً لعقارب الساعة

$$-(RI)_{GF} + (RI)_{FE} + e_1 + (RI)_{ED} - e_2 + (RI)_{DG} = 0 \qquad (2)$$

ذلك أن e_1 مستقبل في هذه الدارة، يدخل التيار من الطرف الموجب له، e_2 مولد فيها، يخرج التيار من الطرف الموجب له. أما إشارة - أمام $(RI)_{GF}$ فلأن اتجاه التيار فيه معاكس لاتجاه التيار الحقيقي الموجب $(I)_{FG}$.

أما عندما ننظر إلى E كعقدة في الدارة BCDE فإن قاعدة كيرشوف الأولى تعطينا

$$I_{DE} - I_{EB} - I_{EF} = 0 \qquad (1)'$$

التي لا تختلف عن (1) : أما e_2 فهو مستقبل في هذه الدارة، ولدينا عوضاً عن (2)

$$(RI)_{BC} + (RI)_{CD} - (RI)_{DE} + e_2 + (RI)_{EB} = 0 \qquad (2)'$$

نستطيع بفضل قاعدتي كيرشوف حساب شدة التيارات على سبيل المثال إذا علمنا القوة المحركة الكهربائية والمقاومة. لدينا في شبكة الشكل.29 إن نظرنا لـ e_1 كمولد يعين اتجاه التيار I_1، في العقدة A :

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \qquad (3)$$

ولدينا في الدارة ABCD

$$R_3I_3 - e_1 + R_1I_1 = 0 \qquad (4)$$

وفي الدارة AEFD

$$R_2I_2 - e_2 - R_3I_3 = 0 \qquad (5)$$

وشدة التيارات هي

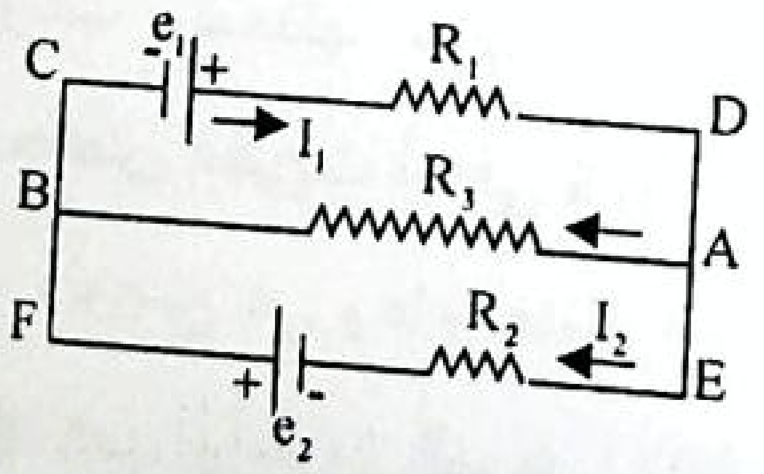
$$I_1 = \frac{e_1 - R_3I_3}{R_1} \qquad (6)$$

$$I_2 = \frac{e_2 + R_3I_3}{R_2} \qquad (7)$$

و

$$I_3 = \frac{R_2e_1 - R_1e_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \qquad (8)$$

نضع قيمة I_3 في (6) و(7) فنحصل على شدة التيارات الثلاثة بدليل المقاومات والقوتين المحركتين الكهربائيتين.

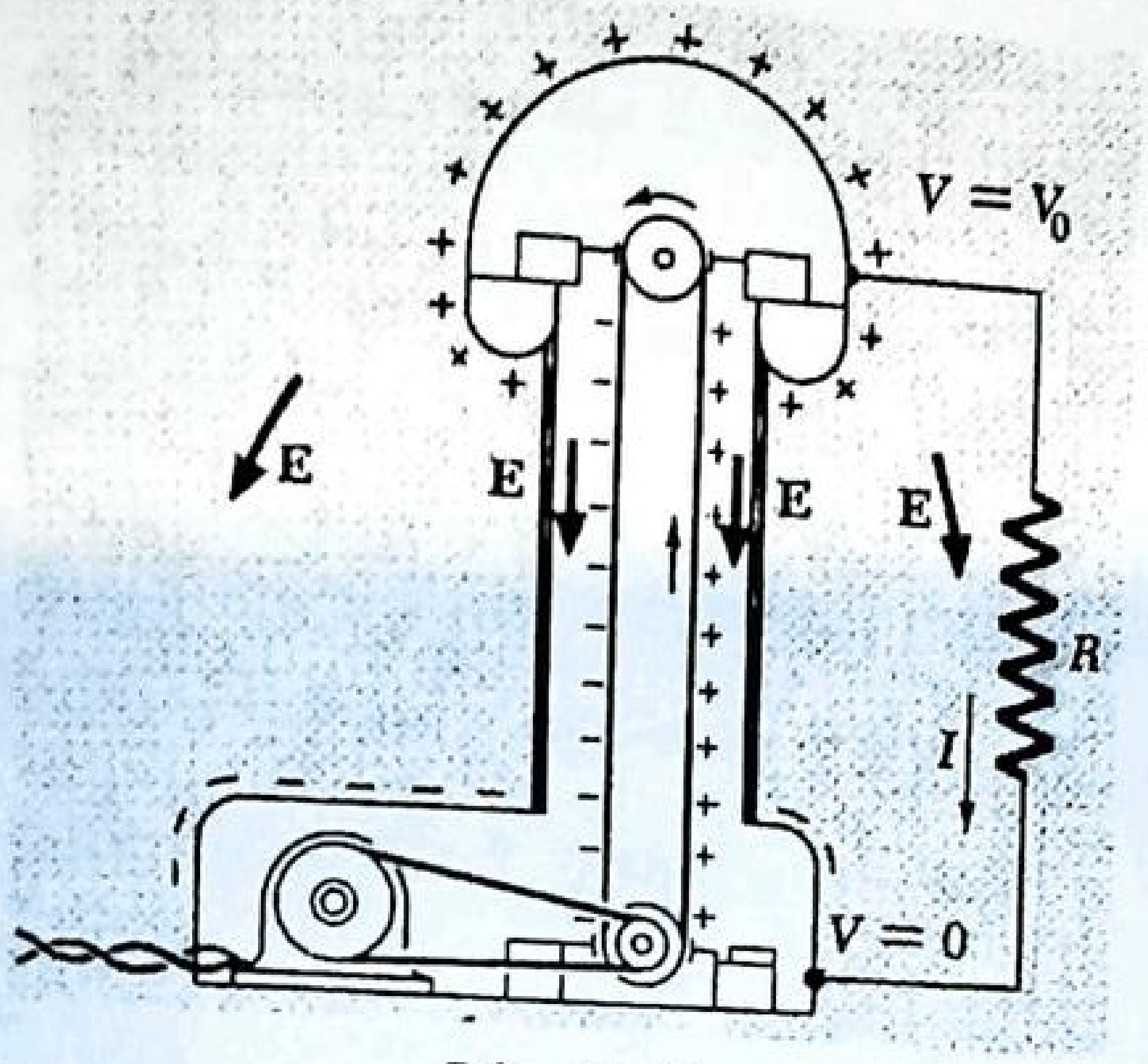


الشكل.29

2.5- مولدات التيار المستمر، الخلايا الفولتائية

قلنا إن مهمة مولد التيار المستمر خلق فرق كمون دائم يضخ الشحنات الموجبة من أحد طرفي المولد إلى الطرف الآخر، في اتجاه معاكس لاتجاه الحقل الكهربائي. يمكننا أن نعطي مولد فان دو غراف Van de

بكرتان في أنبوب عمودي عازل يحركهما محرك Graff الكهربائي الراكد كمثال على ذلك. مبدؤه : بكرتان في أنبوب عمودي عازل يحركهما محرك كهربائي وينزلق عليهما حزام عازل كذلك ينقل الشحنات الكهربائية (ولنقل الموجبة) من البكرة السفلى إلى البكرة العليا. يحيط بالبكرتين مسريان electrodes، يحمل كل منهما مشطاً، الأول تحت البكرة السفلى والثاني فوق البكرة العليا يتصل بكرة معدنية مفرغة تستند على الأنبوب العازل، الشكل.29



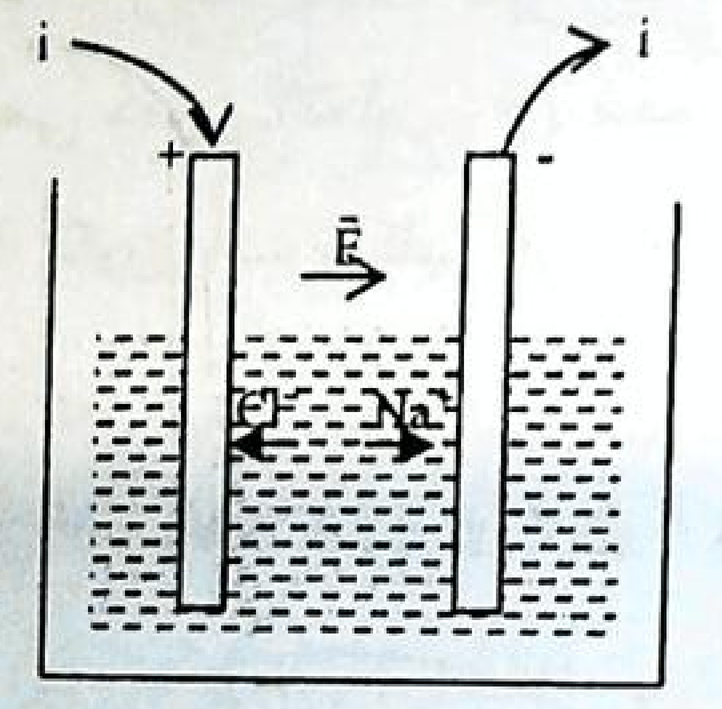
الشكل.29

آلية هذا النقل فرق كمون عال نحدثه داخل الأنبوب بين المسرى السفلي والأرض. يؤين فرق الكمون هذا جزئيات الهواء ويدفع بالشحنات الموجبة نحو الحزام فتلتصق به إلى أن تصل إلى البكرة العليا، يلتقطها المسرى العلوي وينقلها إلى سطح الكرة المفرغة الخارجي. يتأين الهواء داخل الكرة وتنتشر على سطح البكرة العليا بالتحريض شحنات سالبة تلتصق بالحزام فتتفرغ البكرة وتتمكن من استقبال الشحنات الموجبة من جديد وتنقلها إلى سطح الكرة المعدنية الخارجي إلى أن يصل فرق الكمون بين هذه الكرة والأرض إلى مستوى عال جداً إلى حوالي 11 مليون فولت، من أجل كرة معدنية قطرها حوالي خمسة أمتار.

يحدث ضخ الشحنات كذلك في التحليل الكهربائي Electrolyse : في فصل الأيونات الموجبة عن الأيونات السالبة. إن ما يجعل الجزيء متماسكاً هو التجاذب بين مكونات فقدت بعض إلكتروناتها، وشحنتها موجبة، وأخرى اكتسبت هذه الإلكترونات وشحنتها سالبة؛ في كلورات الصوديوم اتحاد الكلور Cl^- والصوديوم Na^+ أو H_2^{++} و SO_4^- في حمض الكبريت أو في كبريتات الزئبق SO_4Hg_2 الخ. تذاب الأملاح أو الحموض في سائل ما، الماء مثلاً، وتوضع في وعاء غمس فيه صفيحتان معدنيتان متصلتان بقطبي منبع كهربائي (إلكترودان). يجري التيار من الإلكترود الموجب (الأنود) إلى الإلكترود السالب (الكاتود). يفك الحقل الكهربائي في المحلول (الإلكتروليت) الأيون الموجب Na^+ الذي يسير في اتجاه الحقل، نحو الكاتود، عن الأيون السالب Cl^- الذي يسير في اتجاه معاكس لاتجاه الحقل، نحو الأنود. تسمى الشحنات الموجبة المتجهة نحو الكاتود كاتيونات Cathions وتلك المتجهة نحو الأنود أنيونات Anions.

تفقد الكاتيونات شحنتها عندما تصل إلى الإلكترود السالب المعدني لتصبح حيادية وتتوضع الآنيونات على الأنود – صفيحة من الفحم. وهكذا يجري في داخل المحلول تيار كهربائي يتجه في اتجاه الحقل الكهربائي $\vec{E}$ من الأنود نحو الكاتود، الشكل.30، نحسب بسهولة كثافة التيار انطلاقاً من العلاقة

$$\vec{J} = \rho\vec{v} = \sigma\vec{E} \quad (5.7)$$



الشكل.30

على أن نلاحظ أن التناسب بين السرعة والحقل لن يكون هو نفسه من أجل الكاتيونات والآنيونات. لتكن هذه النسبة k_1 و k_2 على الترتيب، وبالتالي $\vec{v}_1 = k_1\vec{E}$ و $\vec{v}_2 = -k_2\vec{E}$، وكمية الكهرباء في اتجاه $\vec{E}$ من أجل كل جزيء هو $|e|p(k_1 + k_2)\vec{E}$ حيث $|e|$ الشحنة الموجبة و p عدد إلكترونات التعادل، ومن أجل n جزيء في واحدة الحجوم فهي $n|e|p(k_1 + k_2)\vec{E}$ ؛ $p = 1$ من أجل كلورات الصوديوم و $p = 2$ من أجل كبريتات الزئبق على سبيل المثال. هذا بفرض تحلل (تفكك) كل جزيئات المحلول، وهو غير محقق في الحالة العامة. لتكن α نسبة التفكك $1 \geq \alpha > 0$. لذا نكتب كثافة التيار على الشكل

$$\vec{J} = |e|\alpha np(k_1 + k_2)\vec{E} \quad (5.8)$$

نحسب، عوضاً عن الحساب بالنسبة إلى عدد الجزيئات في واحدة الحجوم، بالنسبة للكتلة، لعدد آفوغادرو، ولتركيز المحلول $c = \frac{n}{N_a}$ (حجم المول هو وحدة الحجوم) وبالتالي

$$\vec{J} = |e|\alpha p(k_1 + k_2)cN_a\vec{E} = \sigma\vec{E} \quad (5.9)$$

ومنه الناقلية

$$\sigma = \alpha p(k_1 + k_2)cq_0 \quad (5.10)$$

حيث رمزنا للمقدار الثابت $|e|N_a$ بـ q_0 أي أن كمية الكهرباء q المتوضعة على الكاتود في واحدة الزمن هي

$$q = \alpha pk_1cq_0 \quad (5.11)$$

تسمح لنا هذه الكتابة بإعادة صياغة قانون فارادي التجريبي: إن كتلة المادة المتوضعة على الكاتود في واحدة الزمن وواحدة السطوح، بفرض $\alpha = 1$ و $k_1 = 1$ هي حسب (5.11) وتعريف c

$$c = \frac{n}{N_a} = \frac{m}{M} = \frac{q}{q_0 p}$$

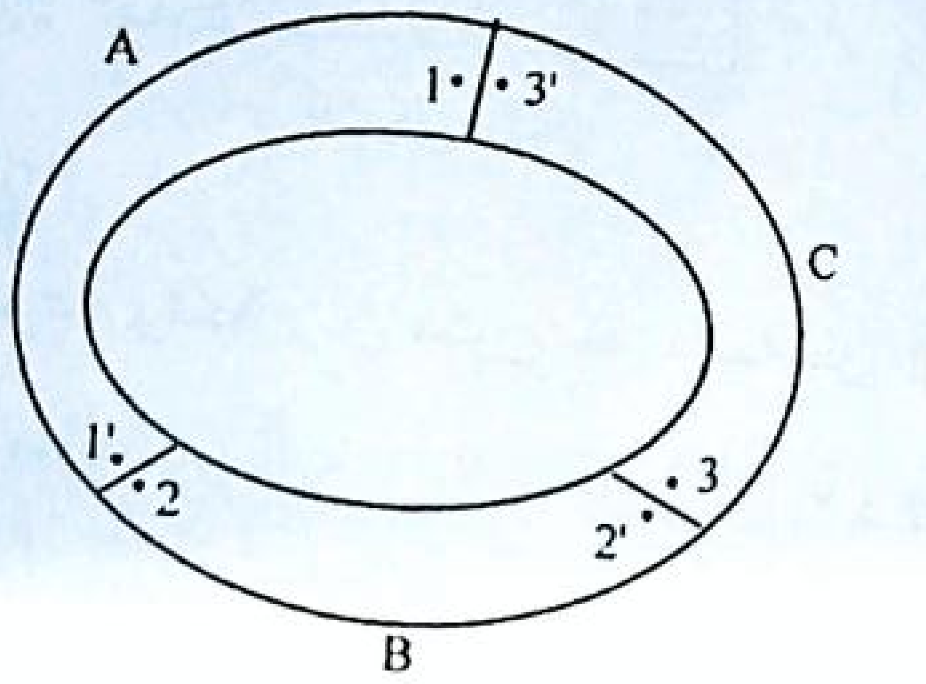
$$m = \frac{q}{q_0}\frac{M}{p}$$

حيث M كتلة المول.

إذ يستحيل أن تتوزع الشحنات الموجبة والسالبة على سطحي المعدنين على نفس النحو، يسمى كمون التماس. إن مجموع كمونات التماس لدارة مغلقة مكونة من عدة معادن يساوي الصفر عندما تكون الدارة كلها في درجة حرارة واحدة. ذلك أن $V_1 = V_{1'}$، $V_2 = V_{2'}$، $V_3 = V_{3'}$، الشكل.31، وبالتالي

هناك فرق كمون آخر ناتج عن تماس معدنين،

$$A/B + B/C + C/A = V_{1'} - V_2 + V_{2'} - V_3 + V_{3'} - V_1 = 0$$



الشكل.31

ولكن الأمر يختلف عندما تكون الدارة مفتوحة، بين C و A على سبيل المثال، إذ سيكون بالإمكان ظهور فرق الكمون المقيس بين النقطتين '3 و 1، ظهور قوة محركة كهربائية مولدة لتيار مستمر. هذا هو مبدأ البيل الفولتائي أو الخلية الفولتائية. تتألف صفيحتا التحليل الكهربائي من معدنين مختلفين، النحاس (كاتود) والتوتياء (أنود) يربطهما سلك دارة خارجية من معدن ما M ويتألف الإلكتروليت L من حمض الكبريت الممدد. فالقوة المحركة الكهربائية هي

$$e = M/Cu + Cu/L + L/Zn + Zn/M$$

لكن المعدن الخارجي لن يلعب أي دور لأن الدارة المغلقة لا تنتج أي فرق كمون

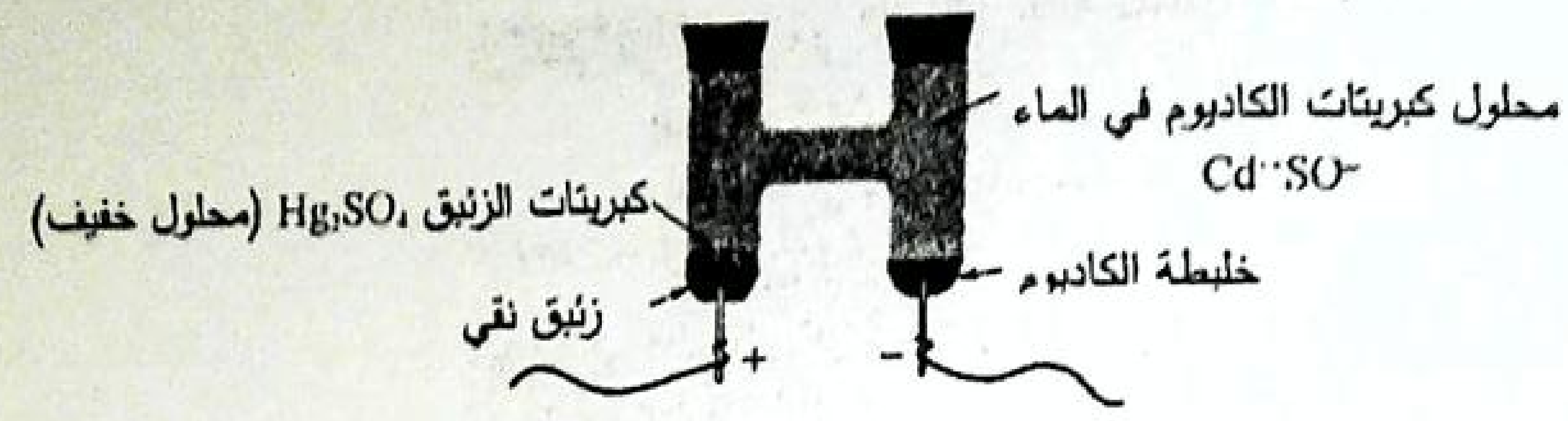
$$M/Cu + Cu/Zn + Zn/M = 0$$

ومنه

$$e = Cu/L + L/Zn + Zn/Cu$$

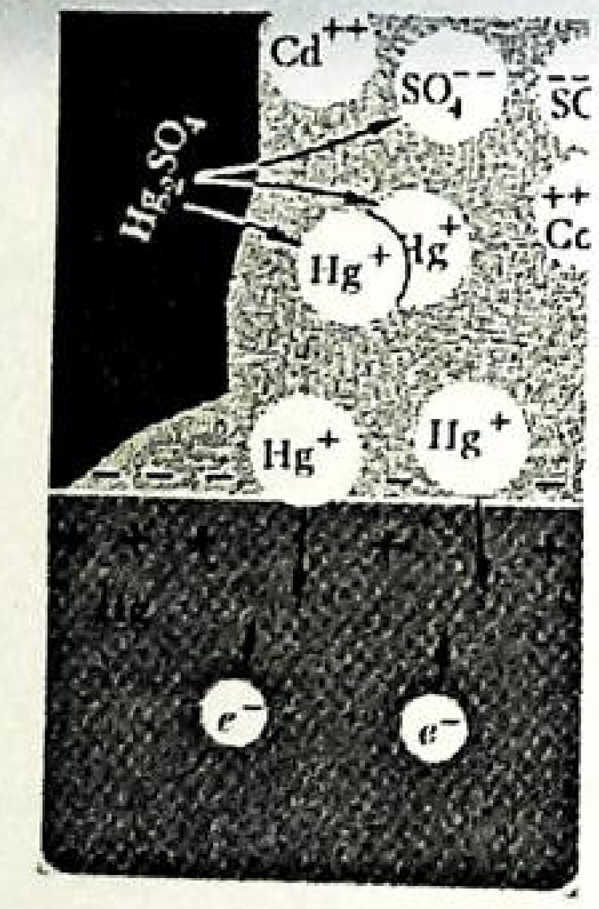
تحدث هذه القوة المحركة الكهربائية تياراً داخل المحلول وعبر سلك الدارة الخارجية M. سنكتفي بهذا القدر من التذكير ببيل فولتا التاريخي للانتقال إلى دراسة خلية وستون Weston المعيارية المكونة من حاوية زجاجية على شكل H مملوءة بمحلول كبريتات الكاديوم $CdSO_4$. يتكون الأنود من كمية من

الزئبق الصافي يعوم فوقها بضع بلورات من كبريتات الزئبق Hg_2SO_4 المشبعة بالماء؛ ويتكون الكاتود من خليطة من الزئبق والكاديوم (الكاديوم بالنسبة 12,5%)، الشكل.32،

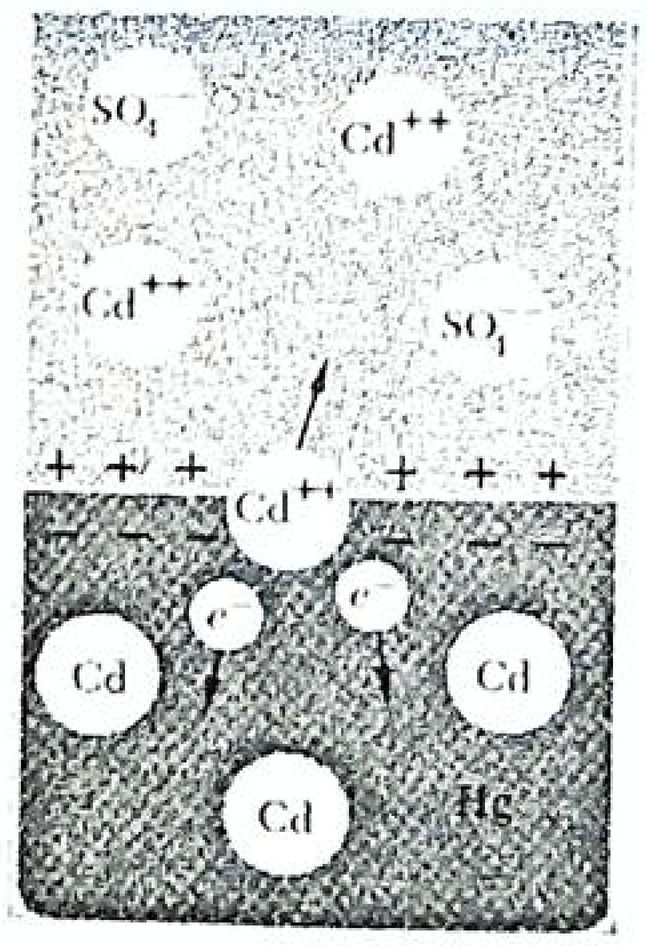


الشكل.32

يمر التيار داخل الخلية من الكاتود إلى الأنود لوجود فرق كمون تنتجه الآلية التالية : تغادر أيونات الكاديوم Cd^{++} الخليطة نحو المحلول مخلفة وراءها إلكترونين من أجل كل أيون، الشكل.33a. وتتوقف هجرة أيونات الكاديوم عندما تصل كمية الإلكترونات الباقية في الخليطة إلى حد كاف لجذب أيونات الكاديوم الموجبة، أي لمنع ذرات الكاديوم عن التخلي عن إلكترونيها. تُضخ هذه الإلكترونات نحو الخارج بفضل إغلاق الدارة الملتحمة بالقطبين، وهكذا يستمر التيار في الخلية : نزوح أيونات الكاديوم نحو المحلول؛ والتيار الإلكتروني (السالب) من الكاتود نحو الأنود في الدارة الخارجية، الشكل.33b.



الشكل.33b



الشكل.33a

عندما تصل الإلكترونات إلى الأنود تلتقي بالأيون Hg^+ فيصبح حيادياً Hg ويتحلل الجزيء Hg_2SO_4 معطياً أيون كبريتات إلى المحلول يتحد مع Cd^{++} الصادر عن الكاتود مبقياً المحلول على حاله. لنلاحظ أن آيونات الكاديوم في الكاتود تتجه في اتجاه معاكس لاتجاه الحقل : من طبقة الإلكترونات السالبة إلى طبقة آيونات الكاديوم الموجبة الموجودة فوقها؛ وكذا الأمر في الأنود، تتجه الإلكترونات السالبة نحو آيونات الزئبق الموجبة. لا يتعدى سمك هذه الطبقات بضع آنغستروم وتقابل آلية الحزام في المولد فان دو غراف.

الفصل الثالث

الظواهر الكهربائية والمغنطيسية التابعة للزمن - الأمواج الكهرطيسية

1- ظواهر التحريض 119

2- التحريض والطاقة المغنطيسية 127

3- معادلات ماكسويل 135

4- حلول معادلات الموجة الكهرطيسية 150

5- الطاقة والكتلة الذاتية 169

الفصل الثالث:
الظواهر الكهربائية والمغنطيسية التابعة للزمن
الأمواج الكهرطيسية

1. ظواهر التحريض

1.1- قانون فارادي Faraday

تأخذ معادلة ماكسويل التفاضلية الثانية بوجود حقل مغنطيسي تابع للزمن الشكل التالي

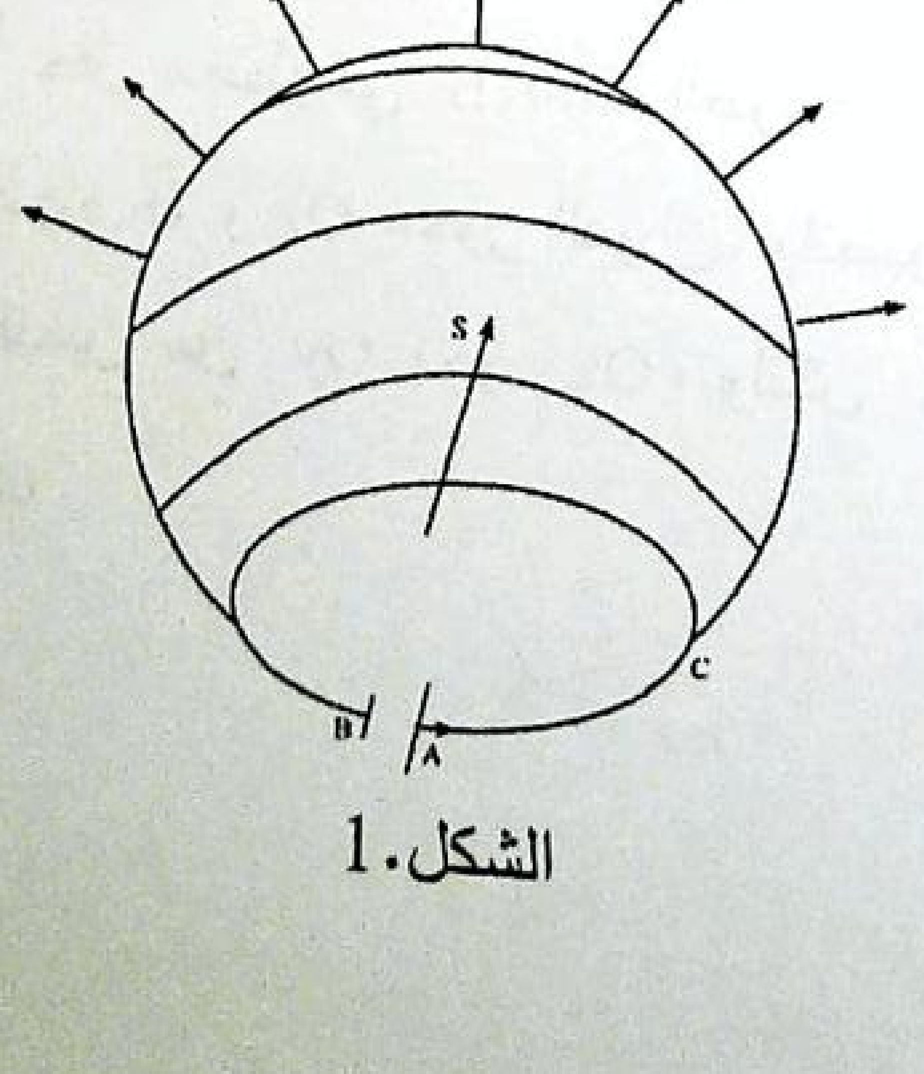
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (1.1)$$

وتبين أن الحقل الكهربائي أصبح هو أيضاً تابعاً للزمن : $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z; t)$ ؛ $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z; t)$. يأخذ تكاملها على دراة مغلقة C، يرتكز عليها سطح S لا على التعيين، بالاستعانة بمبرهنة ستوكس، الشكل التالي

$$\oint_C \vec{E} \cdot \overline{d\ell} = \int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \cdot \overline{dS} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot \overline{dS} \qquad (1.2)$$

إن التكامل الأخير هو تعريفاً تدفق الحقل المغنطيسي عبر السطح S، نرمز له بـ ϕ، وهو مقدار تابع للزمن فقط، على خلاف الحقل $\vec{B}$، مادمنا قد كاملنا على الأبعاد المكانية. لنفرض الآن أن الدارة مفتوحة بين النقطتين B و A وأن اتجاه الدوران على C هو الاتجاه المباشر من اليمين نحو اليسار بالنسبة لاتجاه الناظم على السطح المستوي الذي يحد الدارة C، الشكل.1. نكتب الطرف الأول في (1.2) على الشكل

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \overline{d\ell} + \int_B^A \vec{E} \cdot \overline{d\ell}$$



الشكل.1

إن التكامل الأول معدوم لأن الدارة مفتوحة لا يمر أي تيار فيها. أما التكامل الثاني فيعبر عن قفزة كمون بين النقطتين B و A أي عن قوة محركة كهربائية، نرمز لها كما في ((5.1).2) بـ e ونكتب

$$\int_B^A \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = e = -\frac{d\phi}{dt} \qquad (1.2)'$$

نعبر عن العلاقة

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \qquad (1.3)$$

بالقول إن وجود قوة محركة كهربائية يغير تدفق الحقل المغنطيسي، وعلى العكس إن تغير تدفق الحقل المغنطيسي، أيا كان منشؤه من تغير شدة الحقل مع الزمن أو تغير السطح الذي تمر خطوط الحقل عبره، ينتج قوة محركة كهربائية بين نقطتين ما من دارة C؛ وبالتالي تياراً كهربائياً عبر هذه الدارة على غرار ما تفعله الأبيال والبطاريات في إنتاج التيارات المستمرة.

لقد اكتشفت الصلة بين الحقلين المغنطيسي والكهربائي في عشرنيات القرن التاسع عشر : قوة لابلاس التي تكشف عن تحرك السلك الذي يجري فيه التيار تحت تأثير الحقل المغنطيسي وقانون آمبير الذي يحدد قيمة الحقل المغنطيسي الذي ينتجه التيار، الذي ينتجه عمل الحقل الكهربائي أي القوة المحركة الكهربائية. لقد اقتضى الأمر حوالي عشرين عاماً لتحديد قيمة الحقل الكهربائي، قيمة القوة المحركة الكهربائية e الناتجة عن الحقل المغنطيسي وعلى وجه الدقة عن تغير تدفق هذا الحقل. لقد قام فارادي بتجاربه التي أدت إلى القانون (1.3) في عام 1830 ولكن نتائجه لم تنشر إلا في العام 1840.

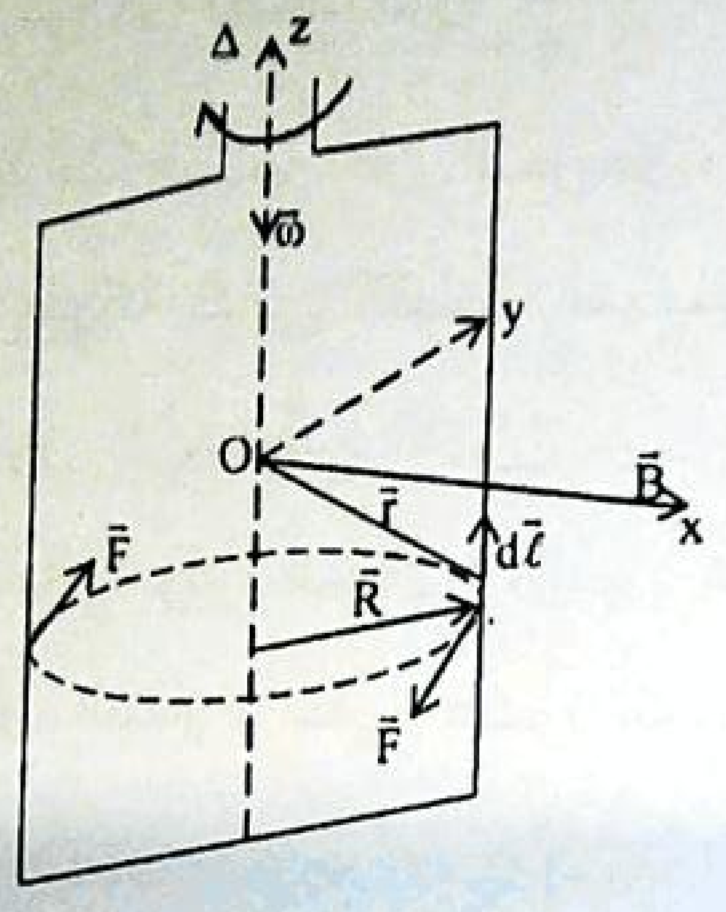
وكما أن قانون آمبير التجريبي، القائم على فرضيته بالمنشأ الكهربائي للمغنطيسية، مكافئ لمعادلة ماكسويل $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J}$ وسميت هذه العلاقة معادلة ماكسويل–آمبير، فإن قانون فارادي مكافئ لمعادلة ماكسويل (1.1) ولذا سميت على نفس النحو معادلة ماكسويل–فارادي.

2.1– المولد والمحرك الكهربائيان

ليكن لدينا موصل على شكل إطار – دارة مفتوحة – يستطيع الدوران حول محور تناظر فيه، المحور Δ الموازي للطول. وليكن لدينا أيضاً حقل مغنطيسي $\vec{B}$ ثابت الطويلة والاتجاه عمودي على محور الدوران Δ. نأخذ جملة محاور Ox في اتجاه $\vec{B}$ و Oz محور الدوران. ولنطبق مزدوجة تدير الإطار في الاتجاه غير المباشر، من اليسار نحو اليمين من Oy نحو Ox، ولتكن $\vec{V}_C$ سرعة دوران الإطار. تخضع إلكترونات الموصل إلى قوة لورانتس

$$\vec{F} = q\vec{V}_C \times \vec{B}$$

التي يمكن النظر إليها كقوة كهربائية، مادامت التجربة قد أثبتت مرور تيار نتيجة هذه الحركة المغيرة لتدفق الحقل المغنطيسي، الشكل.2.



الشكل.2

تعريف 1 :

نسمي الحقل الكهربائي الناتج عن تغير التدفق المغنطيسي، الحقل الكهربائي المحرِّض (المستحث) Induced ونرمز له بـ $\vec{E}_i$، سنكتب إذاً

$$\vec{F} = q\vec{E}_i = q\left(\vec{V}_C \times \vec{B}\right) \quad (1.4)$$

ونكتب القوة المحركة الكهربائية المحدثة لهذا الحقل، آخذين بعين الاعتبار أن $\vec{V}_C = \frac{d\vec{r}}{dt}$ وخواص الجداء المتجهي

$$e = \int \vec{E}_i \cdot \overline{d\ell} = \int -\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \overline{d\ell}\right) \cdot \vec{B} = -\int \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \overline{d\ell}\right) \cdot \vec{B} \quad (1.5)$$

لأن $\overline{d\ell}$ مستقل عن الزمن. لم نأخذ $\overline{d\ell}$ منتهياً كما فعلنا في (2.§4.1) عند حساب التدفق المحصود ولذا فإن عنصر السطح $d\vec{r} \times \overline{d\ell}$ هو عنصر سطح من الدرجة الثانية، نرمز له بـ d^2S (يجب المكاملة على r وعلى ℓ) والعنصر تحت إشارة التكامل في الطرف الأخير من (1.5) هو $\frac{d}{dt}\left(d^2\phi\right) = \frac{d}{dt}\left(d^2SB\right)$ ومنه بالتكامل:

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

لنفرض الآن أن الإطار يدور بسرعة ثابتة حول Oz ولتكن سرعته الزاوية الثابتة ω فإذا كان وضعه عمودياً على Ox في اللحظة البدائية والتدفق مساوياً للصفر فإن التدفق في اللحظة t هو

$$\phi = SB\cos\omega t \quad (1.6)$$

حيث S هو سطح الإطار، والقوة المحركة الكهربائية في هذه اللحظة هي

$$e = \omega SB\sin\omega t = V_0\sin\omega t \quad (1.7)$$

حيث رمزنا بـ V_0 للكمون الثابت $V_0 = \omega SB$، وإذا كانت مقاومة الإطار هي R فإن التيار المحرض هو

$$I = \frac{V_0}{R}\sin\omega t \qquad (1.8)$$

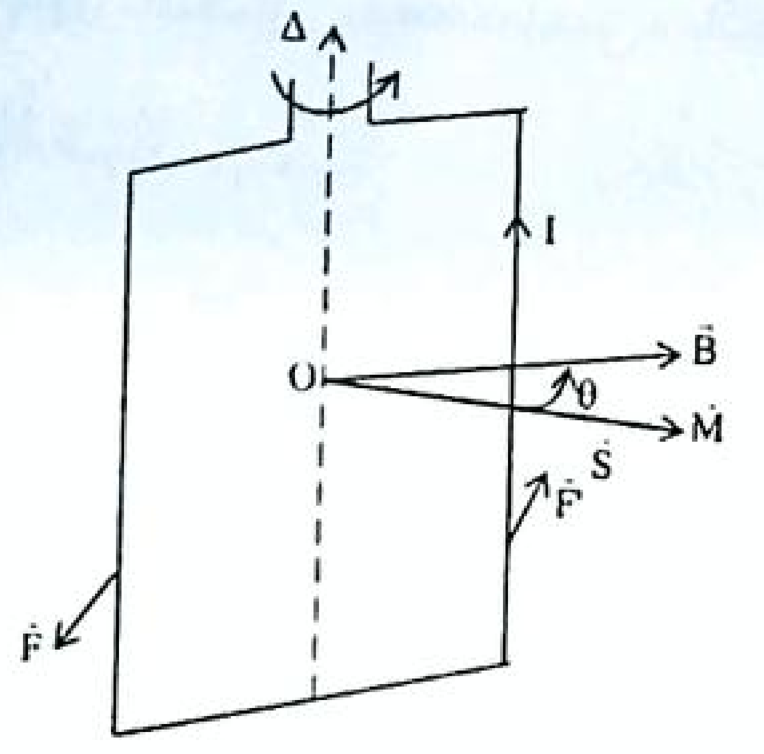
فهو تيار جيبي ينعدم ثم يغير اتجاهه في كل نصف دورة $t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega}$. إنه التيار المتناوب.

هذا فيما يخص المولد الكهربائي للتيارات الناتجة عن التحريض، أما المحرك الكهربائي فقد رأينا مثالاً عليه في الفصل السابق عند دراسة حركة ثنائي القطب المغنطيسي في حقل ثابت. سنأخذ المحرك الكهربائي على شكل إطار يمر فيه تيار I يستطيع الدوران حول محور الدوران Δ في حقل مغنطيسي ثابت. نأخذ جملة المحاور كما في حالة المولد، الشكل.3، يدور هذا الإطار الذي عينا اتجاه التيار فيه في الاتجاه المباشر، من اليمين نحو اليسار، على عكس اتجاه الدوران الذي اخترناه للمولد. عزم المزدوجة هو

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \times \vec{B}$$

حيث $\vec{M}$ عزم الإطار المغنطيسي $\vec{M} = I\vec{S}$

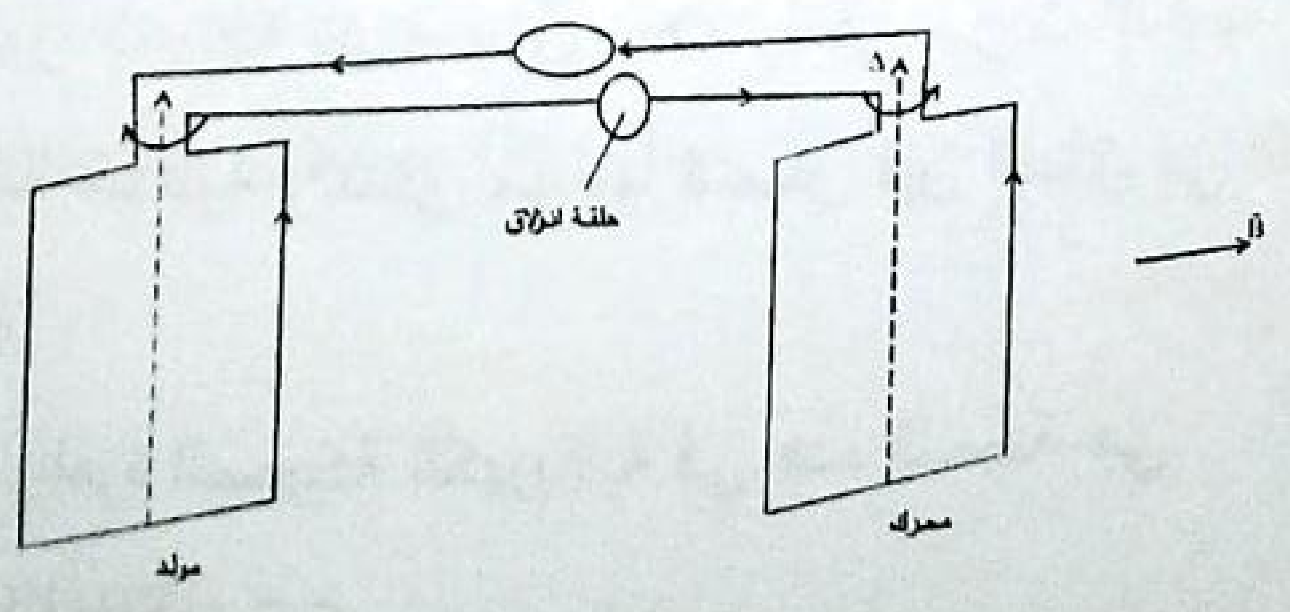
$$\Gamma = MB\sin\theta = MB\sin\omega t$$



الشكل.3

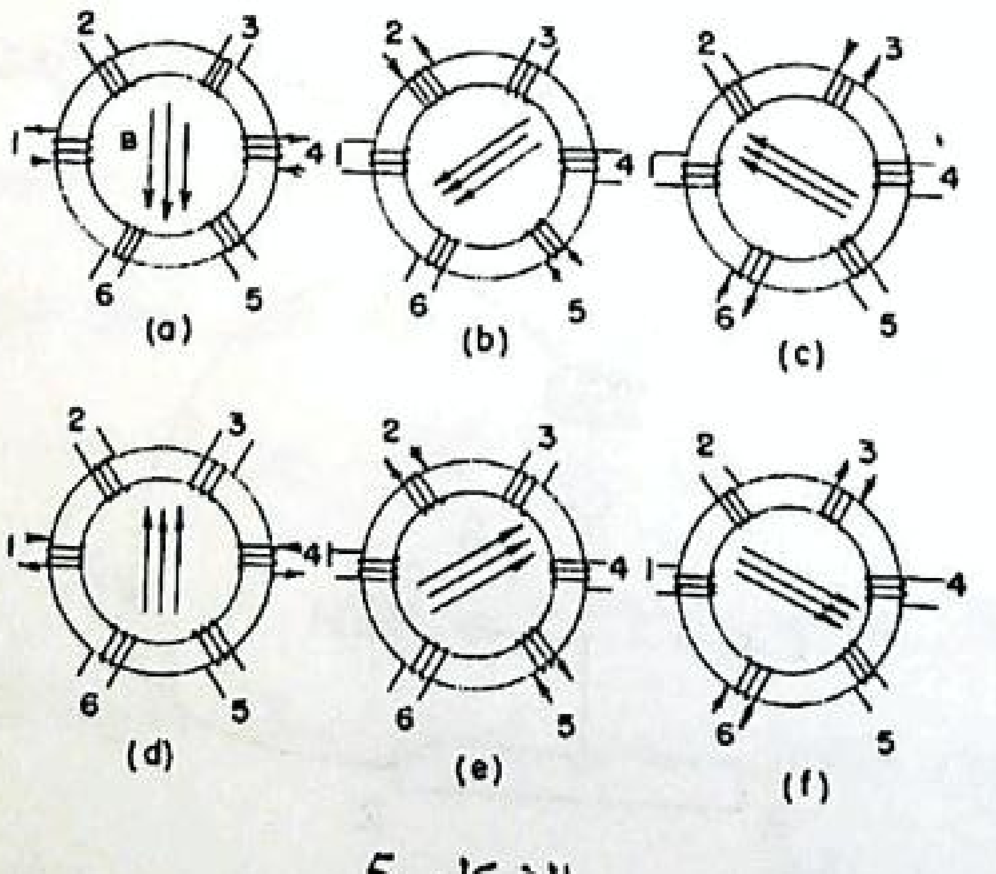
يتغير اتجاه المزدوجة في كل نصف دورة، وتبلغ قيمتها العظمى كل ربع دورة.

يلعب المولد والمحرك الكهربائيان دورين متناظرين تماماً منشؤهما انحفاظ الطاقة فعندما ندير المولد من اليسار نحو اليمين نحدث فيه قوة محركة كهربائية وتياراً نصله بإطار مماثل لإطار المولد فيتحول إلى محرك يدور من اليمين إلى اليسار مستهلكاً الطاقة التي استعملناها لتوليد التيار ويحول القوة المحركة الكهربائية إلى قوة محركة كهربائية معاكسة، الشكل.4.



الشكل.4

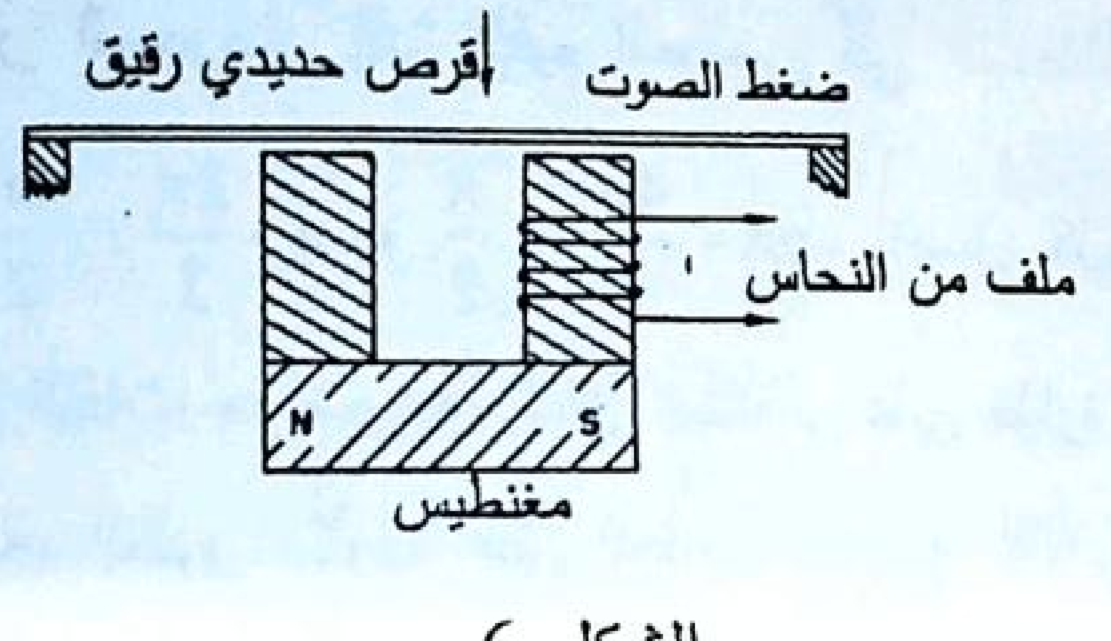
ما من شيء يمنع أن ندير الإطار الثاني يدوياً أو بأي وسيلة ميكانيكية أخرى لينتج تياراً محرضاً ويصبح مولداً، ويصبح الإطار الأول بفضل التيار الذي يصله محركاً يستعيد الطاقة التي بذلت في تدوير الإطار الثاني من اليمين نحو اليسار. وهكذا فالمولد والمحرك متكافئان كتكافئ المولد والمستقبل في دراسة التيارات المستمرة. رمزنا في الشكل.4 بدائرة صغيرة إلى حلقتي الانزلاق اللتين تجنبا التواء سلكي الوصل.
لنلاحظ أنه لا فرق بين تدوير الإطار بوسيلة ميكانيكية ما للحصول عى تيار محرض وتدوير الحقل المغنطيسي نفسه، بأن ندير على سبيل المثال القضيب المغنطيسي الذي أنتج الحقل الثابت $\vec{B}$ في اتجاه Ox دورة كاملة تعكس اتجاهه، ثم نعيده إلى وضعه. يولد التيار المحرض الذي يحدث بدوره مزدوجة تدير الإطار في اتجاه دوران القضيب المغنطيسي. وهذا هو مبدأ المحرك ثلاثي طور التحريض: نحدث في البداية تياراً متناوباً ثلاثي الأطوار بأن ندير حول نفس المحور في حقل مغنطيسي ثابت ثلاثة أطر – بدلاً عن إطار واحد – متماثلة تماماً تفصلها الواحد عن الآخر زاوية مقدارها 120 درجة. تصل القوة المحركة الكهربائية ومعها التيار المحرض إلى القيم العظمى في اللحظات $t = \frac{T}{4}$، $\frac{7T}{12}$، $\frac{11T}{12}$ على الترتيب المقابلة لـ $\omega t = \frac{\pi}{2}$، $\omega t - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$، $\omega t - \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$. لنصل كل طور من هذه الأطوار بملفين من ملفات ستة لها نفس عدد اللفات موضوعة بشكل منتظم على طارة Torus من الحديد، أي على فواصل زاوية تساوي 60 درجة، الطور الأول على الملفين 1 و 4 الثاني على الملفين 2 و 5 والثالث على الملفين 6 و 3. عندما نغلق دارة الطور الأول يحدث الملفان 1 و 4 حقلاً مغنطيسياً عمودياً على اتجاه التيار، الشكل.5a، وعندما نغلق دارة الطور الثاني فالحقل المغنطيسي هو كما في الشكل.5b. وكذلك من أجل دارة الطور الثالث كما في الشكل.5c. يتغير اتجاه التيار بعد نصف دورة وينعكس معه اتجاه الحقل كما تبين المخططات d، e، f من الشكل.5. تولد سيرورة الإغلاق المتوالي لدارات الأطوار الثلاثة حقلاً مغنطيسياً دواراً يحدث مزدوجة على تيار إطار موصل موضوع فوق عازل تجعله يدور حول محور شاقولي. ونكون قد وضعنا مبدأ المحرك الكهربائي ثلاثي طور التحريض.



الشكل.5

كانت تجارب فارادي والصيغة (1.3) المعبرة عنها نقطة انطلاق الثورة الصناعية الثانية وتكنولوجيا الكهرباء–السلكية منها على وجه التحديد بانتظار وصولها إلى الأوج مع التكنولوجيا اللاسلكية التي أتت

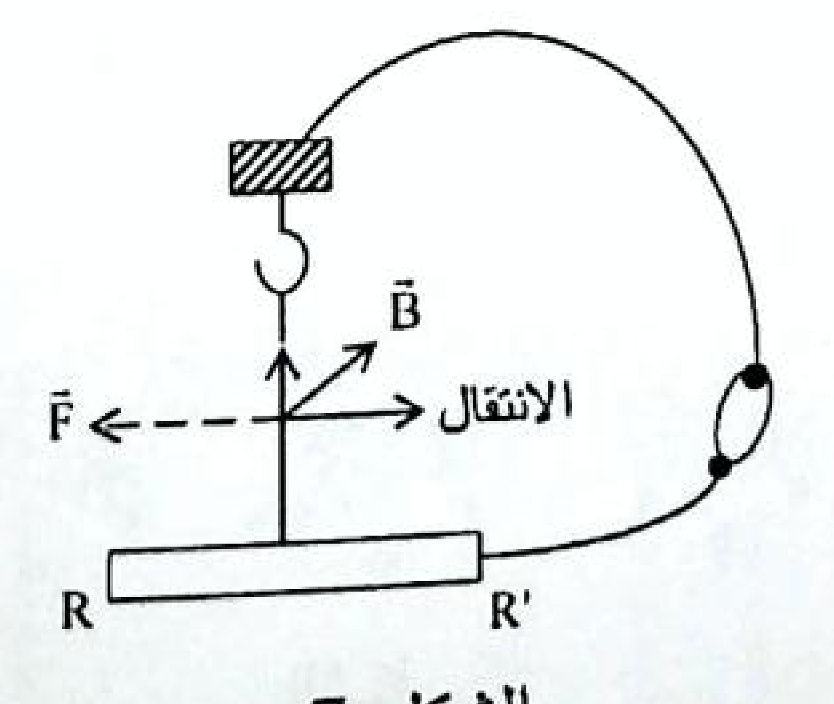
بعد فارادي بربع قرن بفضل ماكسويل وهرتز Hertz. وواضح أن مهمة الدخول في تفاصيل الآلات والأجهزة القائمة على قوانين الكهرطيسية تقع على عاتق كتب الهندسة الكهربائية في حين تقتصر مهمة كتب الفيزياء على شرح محتوى القانون الفيزيائي وعلى توصيف الخطوط العريضة لبنية الجهاز. فالهاتف البدائي من وجهة النظر هذه هو قضيب مغنطيسي يحدث حقلاً مغنطيسياً في كتلتين حديديتين (على شكل نير) وفي حيز الفضاء الذي يفصلهما عن قرص حديدي رقيق يهتز بتأثير الأمواج الصوتية التي يصدرها المتكلم. يغير هذا الاهتزاز بتغييره للسطح الفاصل بين القرص والكتلة الحديدية تدفق الحقل المغنطيسي في الكتلتين الحديديتين محدثاً قوة محركة كهربائية في ملف من النحاس على إحداهما وتياراً يمثل تغير التدفق أي الاهتزازات الصوتية، الشكل.6. يربط طرفا الملف بجهاز آخر مشابه للجهاز الأول، يحدث تغير التيار تغيراً في الحقل المغنطيسي للكتلة يجذب القرص وينبذه مستعيداً اهتزازات قرص الجهاز الأول أي الصوت الصادر عنه.



الشكل.6

3.1– قاعدة لنز Lenz

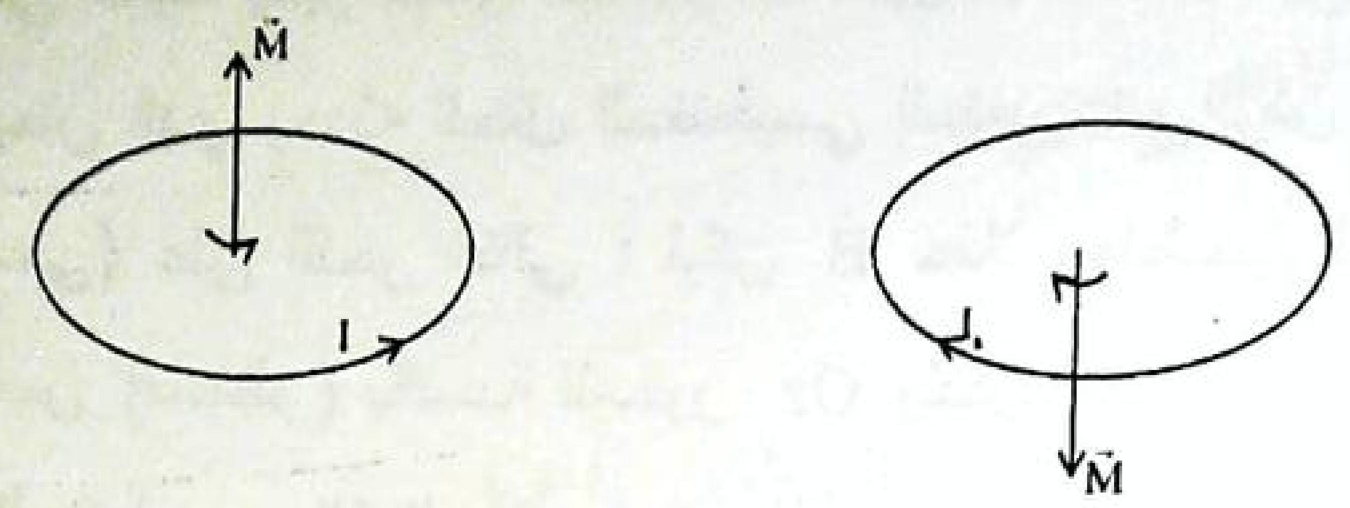
تبين معادلة ماكسويل التفاضلية (1.1) وقانون فارادي التكاملي (1.3) أن القوة المحركة الكهربائية تعارض تغير الحقل المغنطيسي، أي تغير التدفق لوجود إشارة ناقص في الطرف الثاني لهاتين الصيغتين. هذا يعني أن تيار التحريض الذي تحدثه القوة المحركة الكهربائية ينتج حقلاً مغنطيسياً يعاكس تغيرات التدفق. فإذا كان تغير التدفق ناتجاً عن انتقال سلك في دارة فإن تيار التحريض المحدث يعارض هذا الانتقال، الشكل.7.



الشكل.7

وإذا كان تغير التدفق كتغير الحقل، زيادة أو نقصاناً، ناتجاً عن وجود تيار متغير I فإن تيار التحريض، ونسميه عندئذ التحريض الذاتي I_s، يحاول الحد من تغيرات التيار I، إبقاء شدة I ثابتة : يعارض تيار

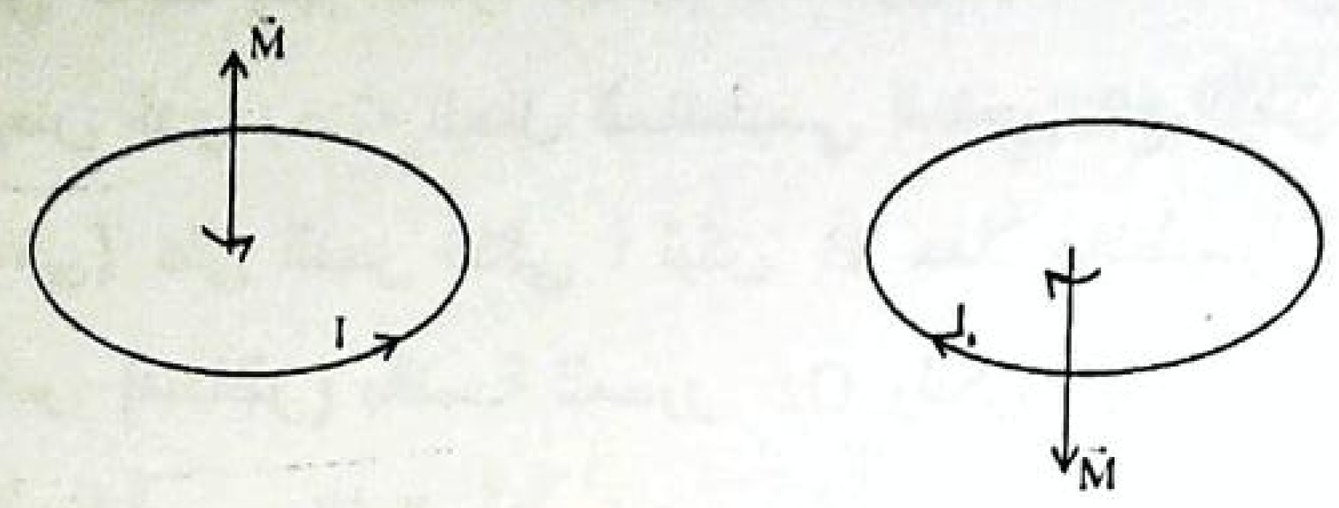
التحريض I_s التيار I عندما يكون هذا الأخير متزايداً فيجري في اتجاه معاكس لـ I، ويجري في نفس الاتجاه عندما يكون I متناقصاً ليحد من التناقص. عندما يجري التياران I و I_s في دارتين مختلفتين فجريانهما في اتجاهين متعارضين، الشكل.8



الشكل.8

لنأخذ كمثال على ذلك إسقاط قضيب ممغنط في أنبوب موصل من النحاس أو الألمنيوم : تبطئ دوامات التيار المحرضة في الأنبوب I_s سقوط القضيب، نتيجة وجود تيارات I (على المستوى الذري) في القضيب الممغنط، إن تنابذ العزمين المغنطيسيين لتيارات القضيب الممغنط وتيارات الأنبوب المعدني هو الذي يبطئ سقوط القضيب في الأنبوب. يمكن تمثل التنابذ بين هذين العزمين عندما تكون الدارتان صغيرتين بالتنابذ بين ثنائيي قطب مغنطيسي وضعت الأقطاب "الكتل المغنطيسية" ذات نفس الإشارة مقابل بعضها فتنابذتا. وهذا ما يحدث عندما نضع دارة معدنية، من الألمنيوم، فوق قضيب مغنطيسي أو فوق ملف يجري فيه تيار فيطرد الملف الدارة التي حل فيها تيار تحريض يعارض تغير التدفق بعيداً عنه. تفسر قاعدة لنز انعدام الحقل المغنطيسي داخل المعادن فائقة التوصيل، وهو مفعول يعرف باسم مفعول مايسنر Meissner. سندرس في الفصل الثالث من المجلد الخامس ظاهرة فائقية التوصيل على ضوء ميكانيك الكم مكتفين بالقول هنا إن المقاومة الكهربائية تنعدم في المعادن في درجات حرارة قريبة من الصفر المطلق بحيث يمكن للتيار المولد في دارة صغيرة داخل معدن عديم المقاومة أن يستمر لسنوات عديدة بعد إزالة البطارية التي أنتجته. لكنه يستحيل وجود قوة محركة كهربائية منتهية e تعارض تدفق الحقل المغنطيسي في صفيحة معدن فائق التوصيل لأن هذا الوجود يعني وجود تيار لامنته في الصفيحة حيث المقاومة R تساوي الصفر. إن ما يعارض تدفق الحقل المغنطيسي في الصفيحة هو وجود قوى محركة كهربائية لامتناهية في الصغر تنتج تيارات مغلقة على شكل دوامات، تكافئ حقولها المغنطيسية الحقل المغنطيسي الداخل وتعدمه. نرى هنا أيضاً التنابذ بين قضيب مغنطيسي أو ملف يمر فيه تيار ومعدن فائق التوصيل على شكل طبق. عندما يمر التيار في الملف يبتعد عن المعدن ويبقى (هو أو القضيب المغنطيسي) معلقاً فوق الطبق. يمكن تصور سكة حديدة فائقة التوصيل وقطار يسير على "مخدة هوائية" فوقها بدون تماس واحتكاك.

التحريض I_s التيار I عندما يكون هذا الأخير متزايداً فيجري في اتجاه معاكس لـ I، ويجري في نفس الاتجاه عندما يكون I متناقصاً ليحد من التناقص. عندما يجري التياران I و I_s في دارتين مختلفتين فجريانهما في اتجاهين متعارضين، الشكل.8



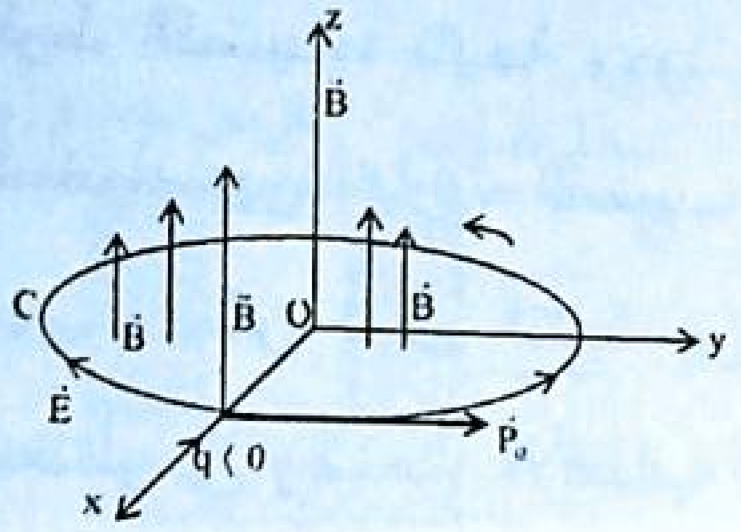
الشكل.8

لنأخذ كمثال على ذلك إسقاط قضيب ممغنط في أنبوب موصل من النحاس أو الألمنيوم : تبطئ دوامات التيار المحرضة في الأنبوب I_s سقوط القضيب، نتيجة وجود تيارات I (على المستوى الذري) في القضيب الممغنط، إن تنابذ العزمين المغنطيسيين لتيارات القضيب الممغنط وتيارات الأنبوب المعدني هو الذي يبطئ سقوط القضيب في الأنبوب. يمكن تمثل التنابذ بين هذين العزمين عندما تكون الدارتان صغيرتين بالتنابذ بين ثنائيي قطب مغنطيسي وضعت الأقطاب "الكتل المغنطيسية" ذات نفس الإشارة مقابل بعضها فتتابذتا. وهذا ما يحدث عندما نضع دارة معدنية، من الألمنيوم، فوق قضيب مغنطيسي أو فوق ملف يجري فيه تيار فيطرد الملف الدارة التي حل فيها تيار تحريض يعارض تغير التدفق بعيداً عنه. تفسر قاعدة لنز انعدام الحقل المغنطيسي داخل المعادن فائقة التوصيل، وهو مفعول يعرف باسم مفعول مايسنر Meissner. سندرس في الفصل الثالث من المجلد الخامس ظاهرة فائقية التوصيل على ضوء ميكانيك الكم مكتفين بالقول هنا إن المقاومة الكهربائية تنعدم في المعادن في درجات حرارة قريبة من الصفر المطلق بحيث يمكن للتيار المولد في دارة صغيرة داخل معدن عديم المقاومة أن يستمر لسنوات عديدة بعد إزالة البطارية التي أنتجته. لكنه يستحيل وجود قوة محركة كهربائية منتهية e تعارض تدفق الحقل المغنطيسي في صفيحة معدن فائق التوصيل لأن هذا الوجود يعني وجود تيار لامنته في الصفيحة حيث المقاومة R تساوي الصفر. إن ما يعارض تدفق الحقل المغنطيسي في الصفيحة هو وجود قوى محركة كهربائية لامتناهية في الصغر تنتج تيارات مغلقة على شكل دوامات، تكافئ حقولها المغنطيسية الحقل المغنطيسي الداخل وتعدمه. نرى هنا أيضاً التنابذ بين قضيب مغنطيسي أو ملف يمر فيه تيار ومعدن فائق التوصيل على شكل طبق. عندما يمر التيار في الملف يبتعد عن المعدن ويبقى (هو أو القضيب المغنطيسي) معلقاً فوق الطبق. يمكن تصور سكة حديدة فائقة التوصيل وقطار يسير على "مخدة هوائية" فوقها بدون تماس واحتكاك.

4.1- مسرع الإلكترونات Betatron

رأينا أن الحقل المغنطيسي الثابت يغير مسار الجسيم المشحون فيعطفه ليصبح دائرياً لكنه لا يغير سرعة الجسيم. لكن تيار التحريض الذي يحدثه الحقل المغنطيسي المتغير مع الزمن يسرع الجسيم (الإلكترون، الجسيم بيتا كما كان يسمى) على النحو التالي : ليكن $\vec{B}$ حقلاً مغنطيسياً ثابت المنحى والاتجاه لكن شدته متغيرة بشكل متجانس (متناظر) بالنسبة للمحور Oz وليكن لدينا إلكتروناً شحنته $q < 0$ واندفاعه $\vec{p}_0$ يدخل مجال الحقل المغنطيسي، الشكل.9، يخضع الإلكترون إلى قوة محركة كهربائية حسب (1.2) و(1.3)

$$\int_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} \qquad (1.9)$$



الشكل.9

ليكن r نصف قطر الدائرة C التي يرسمها الإلكترون حول Oz عند دخوله الحقل $\vec{B}$، ولنعط لهذا الأخير قيمة وسطية $\vec{B}_a$ على سطح الدائرة بحيث نستطيع كتابة الطرف الأخير في (1.9) على الشكل $-\frac{dB_a}{dt}\pi r^2$. إن شدة الحقل الكهربائي ثابتة بالتناظر على الدائرة C، والطرف الأيسر في (1.9) هو $E \cdot 2\pi r$ ومنه

$$E \cdot 2\pi r = -\frac{dB_a}{dt}\pi r^2$$

و

$$E = -\frac{r}{2}\frac{dB_a}{dt} \qquad (1.10)$$

تبين العلاقة (1.9) أن جولان الحقل الكهربائي معاكس لتدفق $\vec{B}$، فهو من اليسار نحو اليمين وبالتالي فإن القوة qE التي يخضع لها الإلكترون هي في الاتجاه المعاكس، اتجاه p_0 ومعادلة حركة الإلكترون هي

$$qE = |q|\frac{r}{2}\frac{dB_a}{dt} = \frac{dp}{dt} \qquad (1.11)$$

وبالمكاملة، انطلاقاً من اللحظة البدائية حيث $p = p_0$ نجد

$$p - p_0 = |q|\frac{r}{2}\left(B_a(t) - B_a(t_0)\right) = |q|\frac{r}{2}\Delta B_a \qquad (1.12)$$

هذه العلاقة صحيحة طبعاً من أجل كل نقاط محيط الدائرة. يخضع الإلكترون في هذه النقاط إلى قوة لورانتس المساوية بالقيمة المطلقة لـ $|q|VB_C$ حيث B_C طويلة الحقل المغنطيسي على محيط الدائرة؛ وهي قوة عمودية على الدائرة واتجاهها مركز الدائرة. نعلم من دروس الميكانيك (((§3.3)،2)،I) أن هذه القيمة الناظمية تساوي لـ $\frac{mV^2}{r}$ وبالتالي فإن

$$|q|B_C = \frac{p}{r} \quad (1.13)$$

ومنه بالمقارنة مع (1.12) تغيرات B_C بين اللحظتين t_0 و t

$$|q|\Delta B_C = \frac{\Delta p}{r} = \frac{|q|}{2}\Delta B_a$$

و

$$\Delta B_a = 2\Delta B_C \quad (1.14)$$

يجب إذاً، لكي يبقى الإلكترون المتسارع على محيط الدائرة التي بدأ حركته على محيطها، أن يزداد الحقل المغنطيسي داخل المسار ضعف تزايده على المسار الدائري.

استعمل البتاترون خلال حوالي سبعين عاماً لتسريع الإلكترونات وإعطائها طاقة تصل إلى ملايين بل ومئات ملايين الإلكترون فولت ($\sim$ 100 MeV) ولكنه لا يستطيع تجاوز هذه الطاقة لأسباب عديدة لعل أهمها أن التناسب بين مشتق الاندفاع ومشتق القيمة الوسطية للحقل المغنطيسي لم يعد صحيحاً، فالعلاقة (1.11) لا تشمل ضياع الطاقة – عندما تكون الطاقات كبيرة جداً – الناتج عن إشعاع الجسيمات المشحونة المعروف باسم إشعاع السانكروترون Synchrotron.

2. التحريض والطاقة المغنطيسية

1.2– معامل التحريض المتبادل

ليكن لدينا ملفان يمر فيهما تياران متغيران مع الزمن نرمز لهما بـ I_1 و I_2، وليكن عدد اللفات فيهما N_1 و N_2، وعدد اللفات في واحدة الطول $n_1 = \frac{N_1}{L_1}$، $n_2 = \frac{N_2}{L_2}$. سنركز انتباهنا في البداية على الحقل المغنطيسي في داخل الملف 1 وسنفرض أن تغيرات التيار I_1 بطيئة، $\frac{dI_1}{dt} = 0$. بحيث يمكن اعتبار الحقل $\vec{B}$ الناتج عن I_1 حقلاً ناتجاً عن تيار مستمر معطى بالعلاقة ((2.11)،2)

$$B = \mu_0 \frac{N_1}{L_1} I_1$$

هذه العلاقة صحيحة طبعاً من أجل كل نقاط محيط الدائرة. يخضع الإلكترون في هذه النقاط إلى قوة لورانتس المساوية بالقيمة المطلقة لـ $|q|VB_C$ حيث B_C طويلة الحقل المغنطيسي على محيط الدائرة؛ وهي قوة عمودية على الدائرة واتجاهها مركز الدائرة. نعلم من دروس الميكانيك (((§3.3).2).I) أن هذه القيمة الناظمية تساوي لـ $\frac{mV^2}{r}$ وبالتالي فإن

$$|q|B_C = \frac{p}{r} \tag{1.13}$$

ومنه بالمقارنة مع (1.12) تغيرات B_C بين اللحظتين t_0 و t

$$|q|\Delta B_C = \frac{\Delta p}{r} = \frac{|q|}{2}\Delta B_a$$

و

$$\Delta B_a = 2\Delta B_C \tag{1.14}$$

يجب إذاً، لكي يبقى الإلكترون المتسارع على محيط الدائرة التي بدأ حركته على محيطها، أن يزداد الحقل المغنطيسي داخل المسار ضعف تزايده على المسار الدائري.

استعمل البتاترون خلال حوالي سبعين عاماً لتسريع الإلكترونات وإعطائها طاقة تصل إلى ملايين بل ومئات ملايين الإلكترون فولت (~ 100 MeV) ولكنه لا يستطيع تجاوز هذه الطاقة لأسباب عديدة لعل أهمها أن التناسب بين مشتق الاندفاع ومشتق القيمة الوسطية للحقل المغنطيسي لم يعد صحيحاً، فالعلاقة (1.11) لا تشمل ضياع الطاقة – عندما تكون الطاقات كبيرة جداً – الناتج عن إشعاع الجسيمات المشحونة المعروف باسم إشعاع السانكروترون Synchrotron.

2. التحريض والطاقة المغنطيسية

1.2– معامل التحريض المتبادل

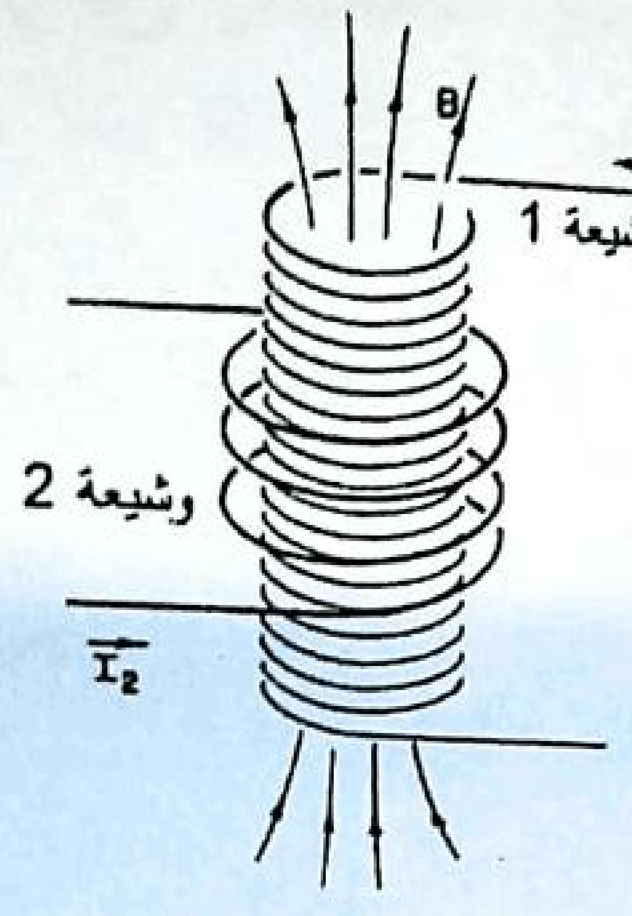
ليكن لدينا ملفان يمر فيهما تياران متغيران مع الزمن نرمز لهما بـ I_1 و I_2، وليكن عدد اللفات فيهما N_1 و N_2، وعدد اللفات في واحدة الطول $n_1 = \frac{N_1}{L_1}$، $n_2 = \frac{N_2}{L_2}$. سنركز انتباهنا في البداية على الحقل المغنطيسي في داخل الملف 1 وسنفرض أن تغيرات التيار I_1 بطيئة، $\frac{dI_1}{dt} \simeq 0$. بحيث يمكن اعتبار الحقل $\vec{B}$ الناتج عن I_1 حقلاً ناتجاً عن تيار مستمر معطى بالعلاقة ((2.11).2)

$$B = \mu_0 \frac{N_1}{L_1} I_1$$

ليكن S_1 مقطع الملف 1. تحدث تغيرات B قوة محركة كهربائية في الملف 2، الشكل.10، هي

$$e_2 = -N_2 \frac{dB}{dt} S_1 = -\frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1}{L_1} \frac{dI_1}{dt} \tag{2.1}$$

$$= m_{21} \frac{dI_1}{dt} \tag{2.1'}$$



الشكل.10

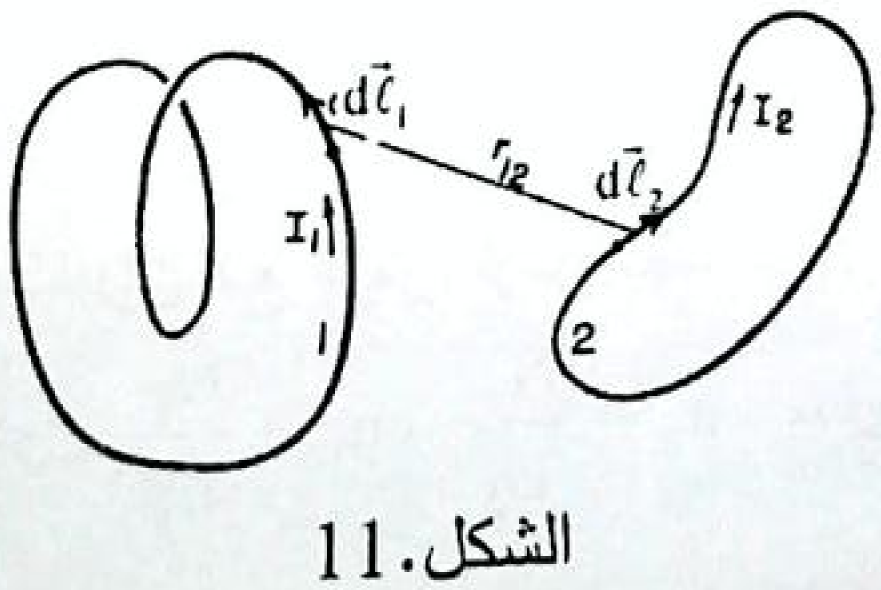
تعريف 2 :

نطلق على المعامل $m_{21} = -\frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1}{L_1}$ ذي الطابع الهندسي البحت اسم معامل التحريض المتبادل Mutual inductance.

ونكون بهذا التعريف قد استبقنا الأمور بقبولنا تساوي m_{21} معامل تحريض الملف 1 على الملف 2 مع m_{12} معامل تحريض الملف 2 على الملف 1 أي أن القوة المحركة الكهربائية في الملف 1 الناتجة عن تغيرات B في الملف 2 هي

$$e_1 = m_{12} \frac{dI_2}{dt} \tag{2.2}$$

سنبقي على شرط التغيير البطيء للتيار وسنفرض أن الدارتين خطيتان ولنحسب m_{12} أي معامل تحريض الملف 2 على الملف 1، الشكل.11



الشكل.11

يحدث التيار I_2 حقلاً مغنطيسياً وتدفقاً على سطح لا على التعيين S يرتكز على الدارة 1 ولدينا

$$e_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

نكتب هذه العلاقة بدليل الكمون المتجهي، $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$، ومبرهنة ستوكس

$$e_1 = -\frac{\partial}{\partial t}\oint_{C_1} \bar{A} \cdot \overline{d\ell_1} \qquad (2.3)$$

حيث C_1 هو محيط الدارة 1 و $\bar{A}$ هو الكمون المتجهي في نقطة ما M من الدارة 1 الناتج عن الدارة 2 و $\overline{d\ell_1}$ عنصر الطول على C_1. كتبنا $\bar{A}$، في حالة التيار المستمر التي سنقبلها هنا، في (2.(2.24)') على الشكل

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{J(2)d\tau_2}{r_{12}} \qquad (2.4)$$

وبما أن التيار في الدارة 2 خطي فيتحول عنصر التكامل الثلاثي $J(2)dS_2\overline{d\ell_2}$ إلى تكامل على C_2 عنصره $I_2\overline{d\ell_2}$ و

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2} \frac{I_2\overline{d\ell_2}}{r_{12}} \qquad (2.4)'$$

نضع هذه المتجهة في (2.3) فنحصل على تكامل على محيطي الدارتين

$$e_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\oint_{C_1}\oint_{C_2} \frac{I_2\overline{d\ell_2}\cdot\overline{d\ell_1}}{r_{12}}$$

I_2 هو المقدار الوحيد التابع للزمن ومستقل عن التكامل على C_2، أي أن

$$e_1 = -\frac{dI_2}{dt}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2} \frac{\overline{d\ell_2}\cdot\overline{d\ell_1}}{r_{12}}\right)$$

$$= m_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

حيث

$$m_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2} \frac{\overline{d\ell_2}\cdot\overline{d\ell_1}}{r_{12}} \qquad (2.5)$$

وهو وضوحاً مقدار متناظر بالنسبة للدارتين و $m_{12} = m_{21}$ وتابع للهيكلة الهندسية للدارتين ولوضعهما إحداهما بالنسبة للأخرى.

2.2– معامل التحريض الذاتي Self inductance

لم ننظر حتى الآن إلا إلى القوة المحركة الكهربائية، e_1، والتيار الذي تحدثه، I_1، نتيجة تحريض تيار آخر I_2 ولم نأخذ بعين الاعتبار حالة وجود تيار متغير في الدارة 1 قبل تحريض الدارة 2 لها. يحدث تغير هذا التيار قوة محركة كهربائية متناسبة مع هذا التغير تضاف إلى القوة المحركة الكهربائية الناتجة عن التيار الآخر. نكتب إذاً من أجل الدارة 1

$$e_1 = m_{12}\frac{dI_2}{dt} + m_{11}\frac{dI_1}{dt} \qquad (2.6)$$

ومن أجل الدارة 2

$$e_2 = m_{21}\frac{dI_1}{dt} + m_{22}\frac{dI_2}{dt} \quad (2.7)$$

$m_{12} = m_{21}$ ونرمز له اختصاراً بـ m. يطلق على m_{11} و m_{22} اسم معامل التحريض الذاتي، وهو سالب دوماً لأن القوة المحركة الكهربائية الناتجة عن التحريض الذاتي تعارض تغير التيار : للتيار عطالة تلزمنا إذا ما أردنا تغيير شدة التيار في ملف ما ربطه بمنبع طاقة تكسر هذه العطالة. نرمز لمعامل التحريض الذاتي بـ $m_{11} = -\mathscr{L}$ ونكتب القوة المحركة الكهربائية الناتجة عنه في دارة لا على التعيين على الشكل

$$e = -\mathscr{L}\frac{dI}{dt} \quad (2.8)$$

الذي يبين أن e تعارض تغير التيار فهي سالبة عندما يكون التيار متزايداً وموجبة عندما يكون متناقصاً. يجب لكي يتحقق تغير التيار أن يزود منبع الطاقة الدارة بفرق كمون V :

$$V = \mathscr{L}\frac{dI}{dt} \quad (2.9)$$

تماثل العلاقة (2.8) التي تعبر عن عطالة التيار الكهربائي – مقاومته للتغيير – العلاقة $-m\frac{d\bar{v}}{dt}$ التي تعبر عن عطالة الجسم – مقاومته للحركة –، مقاومته للانتقال من السكون (الذي يشمل الحركة المستقيمة). يلزم في الميكانيك قوة $\vec{F} = m\frac{d\bar{v}}{dt}$ لتحريك الجسم، لكسر عطالته على غرار فرق الكمون، $V = \mathscr{L}\frac{dI}{dt}$، اللازم لتغيير التيار. وهكذا نجد للمقادير الميكانيكية ما يقابلها في المقادير الكهربائية بدون أن تكون لها نفس الأبعاد الفيزيائية بطبيعة الحال

	فمقابل القوة	$\vec{F}$	فرق الكمون	V
	و السرعة	v	التيار	I
	الكتلة	m	التحريض الذاتي	$\mathscr{L}$
وبما أن	$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$		والتيار	$I = \frac{dQ}{dt}$
	فيقابل الانتقال	$\bar{r}$	الشحنة	Q

وكما أننا نحصل على الطاقة الحركية الميكانيكية بالتكامل $\int \vec{F} \cdot \overline{dr} = \frac{mv^2}{2}$ فإننا نحصل على الطاقة المغنطيسية بالتكامل :

$$\int V \cdot dQ = \int V\,I\,dt = \frac{1}{2}\mathscr{L}I^2$$

أي أن مقابل $\frac{1}{2}mv^2$ هو $\frac{1}{2}\mathscr{L}I^2$

إن

$$U = \frac{1}{2}\mathscr{L} I^2 \tag{2.10}$$

هي الطاقة التي يقدمها المنبع الخارجي لكسر عطالة القوة المحركة الكهربائية ذات المنشأ المغنطيسي لذا سميناها الطاقة المغنطيسية وتماثل عمل القوة الخارجية لكسر عطالة الجسم الميكانيكية.

تجدر الملاحظة أن هذا التماثل بين المقادير الميكانيكية والمقادير الكهربائية وبين المعادلات التفاضلية الخطية التي تخضع لها يتيح إنشاء أجهزة كهربائية تحاكي الظواهر الميكانيكية ودراسة هذه الظواهر في هذه الأجهزة قبل اختبارها الفعلي : محاكاة مقاومة نوابض السيارة على سبيل المثال. تقابل معادلة الهزاز المتخامد والمقسور

$$m\ddot{x} + \gamma x' + kx = F$$

المعادلة التالية التي سنراها في دراسة التيار المتناوب

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = V$$

المقاومة γ (الريح مثلاً) تقابل R والقوة kx المتناسبة مع الانتقال تقابل فرق الكمون $\frac{Q}{C}$، k تقابل $\frac{1}{C}$ سعة المكثفة في الدارة.

3.2– الطاقة المغنطيسية

يمكننا تعميم الطاقة المغنطيسية (2.10) من أجل دراتين يمر فيهما تياران I_1 و I_2، معاملا تحريضهما الذاتي $\mathscr{L}_1$ و $\mathscr{L}_2$ والتحريض المتبادل m. نبدأ بوصل الدارة الأولى التي لا يمر فيه أي تيار بمنبع طاقة مقدماً لها الطاقة $\frac{1}{2}\mathscr{L}_1 I_1^2$. ثم نصل الدارة الثانية التي لا يمر فيها أي تيار بمنبع طاقة آخر فيقدم لها الطاقة $\frac{1}{2}\mathscr{L}_2 I_2^2$. لكن الانتقال من التيار $I_2 = 0$ إلى I_2 يحدث في الدارة الأولى قوة محركة كهربائية هي $m\frac{dI_2}{dt}$ وعملاً بين اللحظتين $t = 0$ حيث $I_2 = 0$ و t حيث يصل التيار إلى المقدار I_2، في حين يبقى التيار في الدارة الأولى ثابتاً ومساوياً لـ I_1، هو

$$\int_{t=0}^{t} mI_1 \frac{dI_2}{dt} = mI_2 I_1$$

وهكذا فإن الطاقة المغنطيسية الكلية للدارتين هي

$$U = \frac{1}{2}\mathscr{L}_1 I_1^2 + \frac{1}{2}\mathscr{L}_2 I_2^2 + mI_2 I_1 \tag{2.11}$$

لنلاحظ كما فعلنا في الفصل السابق (2.§4.3) أن هذه الطاقة ليست الطاقة الكلية. يجب أن ندخل في حساب الطاقة الكلية الطاقة التي تبذلها المصادر الخارجية، منابع الطاقة، ضد القوى المحركة الكهربائية

في حال تحريك الدارات. لنفرض أن الدارة 1 تتحرك بعد أن استقرت شدة التيارين على I_1 و I_2 ولنحسب عمل القوى المغنطيسية التي حركت هذه الدارة آخذين (2.11) بعين الاعتبار

$$\vec{F}_{mag} \cdot \vec{dr} = d\mathscr{C}_{mag} = -dU_{mag} = -I_1 I_2 dm \quad (2.12)$$

يمكننا كتابة العمل المنتهي للقوى المغنطيسية $\Delta\mathscr{C}_{mag}$ المحرك للدارة 1 حسب ((2.(4.4)

$$\Delta\mathscr{C}_{mag} = I_1(\phi_2 - \phi_1) = -I_1 I_2 \Delta m \quad (2.12)'$$

نظراً لأن $d\phi = -m_{12} dI_2$ ولأن معامل التحريض المتبادل هو المتغير الوحيد في هذا الانتقال. وبما أن الطاقة الكلية U هي $-U_{mec}$، كما سميناها في الفصل السابق؛ وهي هنا $-U_{mag}$ المغنطيسية فإن عمل القوى الخارجية هو

$$\vec{F} \cdot \vec{dr} = -dU = dU_{mg} = I_1 I_2 dm \quad (2.13)$$

من الواضح أن الطاقة المغنطيسية للدارتين (2.11) موجبة لأننا بذلنا طاقة للحصول على التيارين I_1 ومن بعده على I_2 انطلاقاً من الصفر وإلا لأمكن الحصول على التيار بشكل عفوي مجاناً. يمكننا كتابة (2.11) على الشكل

$$0 \langle \frac{U}{I_2^2} = \frac{1}{2}\mathscr{L}_1\left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2 + m\left(\frac{I_1}{I_2}\right) + \frac{1}{2}\mathscr{L}_2$$

يجب، لكي يكون ثنائي الحد موجباً مع معامل الحد المربع $0 \langle \mathscr{L}_1$، أن يكون المميز سالباً، أي

$$m^2 - \mathscr{L}_1\mathscr{L}_2 \langle 0$$

وبالتالي $|m| \langle \sqrt{\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2}$.

وضعنا القيمة المطلقة لـ m لأن معامل التحريض المتبادل موجب أو سالب حسب الوضع الهندسي للدارتين الواحدة بالنسبة للأخرى. يكتب عادة

$$m = k\sqrt{\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2} \quad (2.14)$$

ويطلق على k اسم معامل الاقتران وهو موجب أو سالب و $|k| \in [0, 1]$؛ وهو قريب من الواحد عندما يكون ارتباطهما وثيقاً، وقريباً من الصفر إذا كانا مبتعدين عن بعضهما أو كان وضعهما الهندسي لا يتيح نفوذ التدفق بينهما.

تجدر الملاحظة أن الصيغة (2.5) التي أعطيناها كتكامل على خطين مغلقين لحساب معامل التحريض المتبادل لا تصلح لحساب معامل التحريض الذاتي بمطابقة الخطين على بعضهما لأن $r_{12} \to 0$ ونحصل على قيمة لامنتهية لـ $\mathscr{L}$. ويعود السبب في ذلك أننا اعتبرنا السلكين في (2.5) خطيين، مقطعهما $S \to 0$، وتتناهى $\mathscr{L}$ إلى اللانهاية في واقع الأمر بشكل لوغاريتمي عندما يتناهى مقطع السلك إلى الصفر.

نحسب $\mathscr{L}$ انطلاقاً من التقريب الذي لجأنا إليه في كل هذا الفصل باعتبار تغيرات I صغيرة وإهمال كل ما هو من الدرجة الثانية في هذا التغير. سنقبل والحال هذه أن طاقة التيار هي تلك التي حددتها العلاقة (2.(4.17))

$$U = \frac{1}{2}\int_\tau \left(\vec{J} \cdot \vec{dS}\right)\vec{A}\,\vec{d\ell} = \frac{1}{2}\int_\tau \vec{J} \cdot \vec{A}\,d\tau \qquad (2.15)$$

وبالتالي فإن

$$\frac{1}{2}\mathscr{L}\,I^2 = U$$

و

$$\mathscr{L} = \frac{1}{I^2}\int_\tau \vec{J} \cdot \vec{A}\,d\tau \qquad (2.16)$$

لا ننسى أن $\mathscr{L}$ معامل هندسي بحت لا يتبع شدة التيار وتختفي هذه الشدة في هذه العلاقة لأنها تتناسب مع $\vec{J}$ ومع $\vec{A}$ في الصورة وهي I^2 في المخرج.

نكتب U بدليل الحقل المغنطيسي $\vec{B}$ (معادلة ماكسويل $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$)

$$U = \frac{1}{2\mu_0}\int\left[\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{A}\right]d\tau \qquad (2.17)$$

ونفصل مركبات الجداء المختلط على الشكل

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)A_x dxdydz$$

$$\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)A_y dxdydz$$

$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)A_z dxdydz$$

ونكامل هذه الحدود بالتجزئة، لدينا من أجل المشتقين بالنسبة لـ z، الحدين تحت إشارتي التكامل الثنائي والثلاثي

$$(1)\quad \left(\frac{\partial B_x}{\partial z}A_y - \frac{\partial B_y}{\partial z}A_x\right)dzdxdy = \left(B_xA_y - B_yA_x\right)dxdy\ \left(-B_x\frac{\partial A_y}{\partial z} + B_y\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)dxdydz$$

وكذلك من أجل المشتقين بالنسبة لـ x

$$(2)\quad \left(\frac{\partial B_y}{\partial x}A_z - \frac{\partial B_z}{\partial x}A_y\right)dxdydz = \left(B_yA_z - B_zA_y\right)dydz\ \left(-B_y\frac{\partial A_z}{\partial x} + B_z\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)dxdydz$$

وأخيراً من أجل المشتقين بالنسبة لـ y

$$(3)\quad \left(\frac{\partial B_z}{\partial y}A_x - \frac{\partial B_x}{\partial y}A_z\right)dydzdx = \left(-B_xA_z + B_zA_x\right)dzdx\ \left(+B_x\frac{\partial A_z}{\partial y} - B_z\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)dxdydz$$

إن الحد الأول في الطرف الثاني من 2 $\left(\vec{B} \times \vec{A}\right)_x dS_x$ حيث $dS_x = dydz$ هو مسقط عنصر السطح dS على x، وكذلك فالحد الأول في الطرف الثاني في 3 $dS_y = dzdx = \left(\vec{B} \times \vec{A}\right)_y dS_y$

$$dS_z = dxdy = \left(\vec{B} \times \vec{A}\right)_z dS_z$$

وفي I

(استعملنا الخاصة المتجهية لعنصر الحجم $d\tau = \overline{dx} \times \overline{dy} \times \overline{dz}$).

نجمع الحدود التي لم تكامل في الحدود الثانية لأطراف المعادلات الثلاث الثانية التي تقع تحت إشارة التكامل الثلاثي على الشكل

$$B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

ونكون بذلك قد حولنا التكامل على الحجم إلى تكامل على السطح وتكامل على الحجم

$$U = \frac{1}{2\mu_0}\left\{\int\left(\vec{B} \times \vec{A}\right) \cdot \overline{dS} + \int \vec{B} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) d\tau\right\}$$

إن التكامل على السطح هو تكامل على أي سطح يحيط بالحجم، نأخذه كبيراً بحيث يمكن النظر إلى $\vec{B}$ و $\vec{A}$ كمقدارين معدومين على هذا السطح اللامتناهي في الكبر: $\vec{B}$ و $\vec{A}$ معدومان في اللانهاية، لا يبقى إذاً إلا التكامل على الحجم وبما أن $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ فإن

$$U = \frac{1}{2\mu_0}\int \vec{B} \cdot \vec{B}\, d\tau \qquad (2.18)$$

ونكون على هذا النحو قد عبرنا عن كثافة الطاقة المغنطيسية، المستقرة أو الراكدة، في كل نقطة من الفضاء بالعلاقة

$$dU = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

لا ننسى أننا اعتبرنا التيار مستمراً في هذا التقريب. يبدو التماثل بين الطاقة الكهربائية الراكدة والطاقة المغنطيسية الراكدة أكثر وضوحاً عندما نكتب

$$U_{elec} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \vec{E} \cdot \vec{E}\, d\tau \qquad \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 C^2}$$

و

$$U_{mg} = \frac{\varepsilon_0 C^2}{2}\int \vec{B} \cdot \vec{B}\, d\tau$$

لنطبق العلاقة (2.18) لحساب معامل التحريض الذاتي لملف طوله L ونصف قطره r وعدد اللفات في واحدة الطول n. وجدنا أن الحقل المغنطيسي داخل الملف متجانس ويساوي $\mu_0 nI$ وأنه معدوم خارجه، نخرج B^2 من تحت إشارة التكامل ليبقى التكامل على حجم الملف فقط $\pi r^2 L$ و

$$U = \frac{1}{2\mu_0}\mu_0^2 n^2 I^2\ \pi r^2 L = \frac{1}{2}\mathscr{L} I^2 \qquad (2.19)$$

ومنه

$$\mathscr{L} = \mu_0 n^2 \pi r^2 L \qquad (2.20)$$

3. معادلات ماكسويل

1.3 – مبادئ الكهرطيسية

لنعد إلى المعادلات الأربع التي وضعها ماكسويل كمبدأ والتي وجدنا تطابق ثلاث منها مع القوانين التجريبية التي درسناها حتى الآن. أولى هذه المعادلات هي مبرهنة غاوص التي رأيناها في الكهربائية الراكدة والمكافئة لقانون كولون، تناسب القوة عكساً مع مربع المسافة،

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (3.1)$$

رأينا أيضاً أن من نتائج هذه المبرهنة انعدام الشحنة داخل موصل كهربائي في حالة التوازن وأنه من الممكن بوضع مقياس الشحنة داخل كرة كبيرة مشحونة إلى كمون عال جداً التحقق من قانون كولون. فلو كان التناسب هو مع $r^{-2+\varepsilon}$ فإن دقة القياس أدت بماكسويل إلى القول إن $\varepsilon < 10^{-4}$ وقد أعيدت التجربة في القرن الماضي ووجد أن $\varepsilon < 10^{-9}$. يبقى السؤال هل تبقى مبرهنة غاوص صحيحة عندما تتحرك الشحنة ؟ هل تبقى القوة متناسبة عكساً مع مربع المسافة والكمون متناسباً عكساً مع المسافة ؟ سنرى في المجلد القادم أن الجواب هو بنعم في ميكانيك الكم، من أجل مسافات بحدود الفيرمي : 10^{-15} متراً. يمكن طرح السؤال بشكل آخر هل تتغير الشحنة نتيجة الحركة ؟ هل تبقى الصيغة التكاملية لـ (3.1) صحيحة في حالة الحركة ؟

$$\int \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (3.1)'$$

نعلم أن شحنة الجسيم كالكتلة مقدار ثابت يميز الجسيم وأن انحفاظ هذه المقادير ناتج عن وجود زمر تناظر سميناها زمر التناظر الداخلية لنفرق بينها وبين زمر التناظر الهندسية المعبرة عن خواص الفضاء (التجانس والتناحي) وخواص الزمان (التجانس). والجواب على الشق الأول من هذا السؤال هو بلا طبعاً. نتحقق تجريبياً من عدم تأثر الشحنة بالحركة بمقارنة جزيء الهدروجين H_2 المكون من بروتونين يدوران حول بعضهما ببطء على مسافة $7 \cdot 10^{-9}$ متراً (شحنة الجزيء H_2 الكلية معدومة) بذرة الهليوم ${}_2^4He$ حيث يرتبط بروتونا النواة ببعضهما ارتباطاً شديداً تبلغ الطاقة الحركية عدة ملايين إلكترون فولت فلو كان للحركة تأثير على الشحنة لما وجدنا أن شحنة ذرة الهليوم كشحنة جزيء الهدروجين تساوي الصفر. من الواضح إذاً مادامت الشحنة منحفظة ولا تتأثر بالحركة أن الجواب على الشق الثاني هو بنعم : إن '(3.1) ليست سوى التعبير التكاملي عن (3.1).

ليس لدينا ما نضيف إلى معادلة ماكسويل-فارادي الثانية

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (3.2)$$

أو إلى معادلة ماكسويل الثالثة، المعبرة عن انعدام الكتل المغنطيسية على الرغم من التشابه الصوري بين ثنائي القطب الكهربائي المؤلف من شحنتين متعارضتي الإشارة وثنائي القطب المغنطيسي المؤلف من تيار في دارة صغيرة الأبعاد

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (3.3)$$

أما المعادلة الرابعة – ماكسويل–آمبير $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ فقد وجدناها من أجل التيار المستمر $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$، من أجل الحالات المستقرة التي ينعدم فيها تغير كثافة الشحنة مع الزمن. تتواءم هاتان العلاقتان بمعنى أن

$$0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = 0 \qquad (1)$$

أما في الحالة الديناميكية فكثافة الشحنة متغيرة لكن الشحنة الكلية منحفظة، وقد عبرنا عن هذا الانحفاظ بمعادلة الاتصالية ((2.(1.4)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (2)$$

وبما أن (3.1) صالحة في الحالة الديناميكية فإن

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{E}}{\partial t}$$

ونكتب معادلة الاتصالية في الكهرطيسية على الشكل

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0$$

إن تفرق التدوير $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{X}\right)$ معدوم دوماً لذا تصبح معادلة التواءم (1) على الشكل

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \equiv 0$$

وتصبح معادلة ماكسويل–آمبير في الحالة الديناميكية

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (3.4)$$

حيث وضعنا

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{C^2} \qquad (3.5)$$

إن المعادلات الأربع أعلاه (3.1.2.3.4) هي كل ما تنطق به الكهرطيسية؛ أوضحنا الصلة بين المعادلات الثلاث الأولى وقوانين الكهربائية والمغنطيسية الراكدتين والظواهر المستقرة بصورة عامة وبينا أن المعادلة الأولى صحيحة في حالة السكون وحالة الحركة وأن شحنة الجسيمات لا تتغير نتيجة حركتها: شحنة الإلكترون هي $1.6 \cdot 10^{-19}$ كولون سواء أكان ساكناً أو متحركاً بسرعة تقارب سرعة الضوء. أما المعادلة الأخيرة التي وضعها ماكسويل فقد أعطينا تبريراً لها تواءمها مع معادلة الاتصالية، كما أعطينا

أو إلى معادلة ماكسويل الثالثة، المعبرة عن انعدام الكتل المغنطيسية على الرغم من التشابه الصوري بين ثنائي القطب الكهربائي المؤلف من شحنتين متعارضتي الإشارة وثنائي القطب المغنطيسي المؤلف من تيار في دارة صغيرة الأبعاد

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (3.3)$$

أما المعادلة الرابعة – ماكسويل–آمبير $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ فقد وجدناها من أجل التيار المستمر $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$، من أجل الحالات المستقرة التي ينعدم فيها تغير كثافة الشحنة مع الزمن. تتواءم هاتان العلاقتان بمعنى أن

$$0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 \qquad (1)$$

أما في الحالة الديناميكية فكثافة الشحنة متغيرة لكن الشحنة الكلية منحفظة، وقد عبرنا عن هذا الانحفاظ بمعادلة الاتصالية ((2.(1.4)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (2)$$

وبما أن (3.1) صالحة في الحالة الديناميكية فإن

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{E}}{\partial t}$$

ونكتب معادلة الاتصالية في الكهرطيسية على الشكل

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

إن تفرق التدوير $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{X})$ معدوم دوماً لذا تصبح معادلة التواءم (1) على الشكل

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \equiv 0$$

وتصبح معادلة ماكسويل–آمبير في الحالة الديناميكية

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (3.4)$$

حيث وضعنا

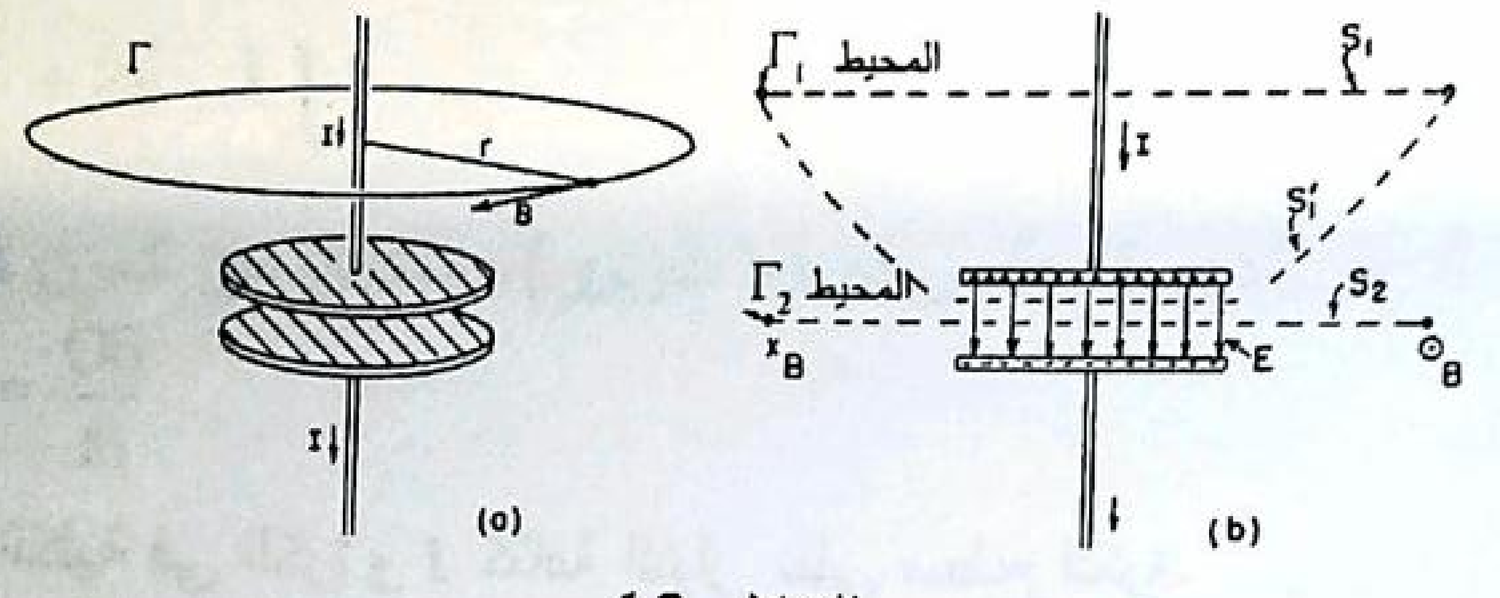
$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{C^2} \qquad (3.5)$$

إن المعادلات الأربع أعلاه (3.1.2.3.4) هي كل ما تنطق به الكهرطيسية؛ أوضحنا الصلة بين المعادلات الثلاث الأولى وقوانين الكهربائية والمغنطيسية الراكدتين والظواهر المستقرة بصورة عامة وبينا أن المعادلة الأولى صحيحة في حالة السكون وحالة الحركة وأن شحنة الجسيمات لا تتغير نتيجة حركتها : شحنة الإلكترون هي $1.6 \cdot 10^{-19}$ كولون سواء أكان ساكناً أو متحركاً بسرعة تقارب سرعة الضوء. أما المعادلة الأخيرة التي وضعها ماكسويل فقد أعطينا تبريراً لها تواءمها مع معادلة الاتصالية، كما أعطينا

تبريراً آخر لها في الفصل الأول، إذ لولا الحد $\frac{1}{C^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ الذي أضافه ماكسويل إلى قانون آمبير ليبين المفعول المغنطيسي لتغيرات الحقل الكهربائي لوقعنا في تناقض صارخ مع الواقع. لنذكر بهذا الأمر من جديد بشيء من التفصيل : ليكن لدينا سلك يمر فيه تيار I لشحن مكثفة مستوية، الشكل.12.

ولنتصور سطحاً دائرياً S_1 نصف قطره r يحيط بالسلك ولنرمز لمحيطه بـ Γ، لا وجود لحقل كهربائي داخل هذا السطح. ولدينا من معادلة ماكسويل (3.4) ومبرهنة ستوكس

$$\int_{S_1}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\cdot\overline{dS} = \oint_{\Gamma}\vec{B}\cdot\overline{d\ell} = \mu_0\int\vec{J}\cdot\overline{dS}$$



الشكل.12

الحقل المغنطيسي متجانس على محيط الدائرة Γ ولدينا

$$2\pi r\left|\vec{B}\right| = \mu_0 I \qquad (3.6)$$

و

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

لنتصور الآن سطحاً آخر S_2 يستند على الدائرة Γ على شكل جذع مخروط يمر بين لبوسي المكثفة. لا يمر عبر هذا السطح أي تيار وسنحصل على حقل مغنطيسي معدوم على Γ لولا الحد $\frac{1}{C^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ داخل المكثفة ولدينا نظراً لأن $\vec{E}$ متجانس بين اللبوسين

$$2\pi r\left|\vec{B}\right| = \int_{S_2}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\cdot\overline{dS} = \frac{1}{C^2}\int\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\overline{dS} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)d\tau \qquad (3.7)$$
$$= \frac{1}{C^2\varepsilon_0}\frac{\partial Q}{\partial t} = \mu_0 I$$

وهي القيمة التي حصلنا عليها عبر السطح S_1 والتي يجب أن تكون مساوية للقيمة عبر السطح S_2 لأن السطح اعتباطي حسب مبرهنة ستوكس. ثم إنه، بغض النظر عن أية محاكمة رياضية، ما من سبب يدعو إلى انعدام الحقل المغنطيسي عندما ينتقل المحيط Γ من حيث يوجد التيار إلى داخل المكثفة حيث ينعدم التيار.

تجري الأمور وكأن تياراً حقيقياً يمر بين لبوسي المكثفة، ولذا يطلق على الحد $\frac{1}{C^2}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ اسم تيار الانتقال أو تيار ماكسويل.

لنأخذ كمثال آخر لتبرير تيار الانتقال هذا كرة نصف قطرها r تحيط بمادة تشع جسيمات مشحونة، يتم الإشعاع بالتناظر في مختلف الاتجاهات ولدينا في الشكل التكاملي على حجم الكرة لمعادلة الاتصالية

$$\int_\tau (\bar{\nabla} \cdot \bar{J}) d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\int \rho d\tau = 0$$

أو

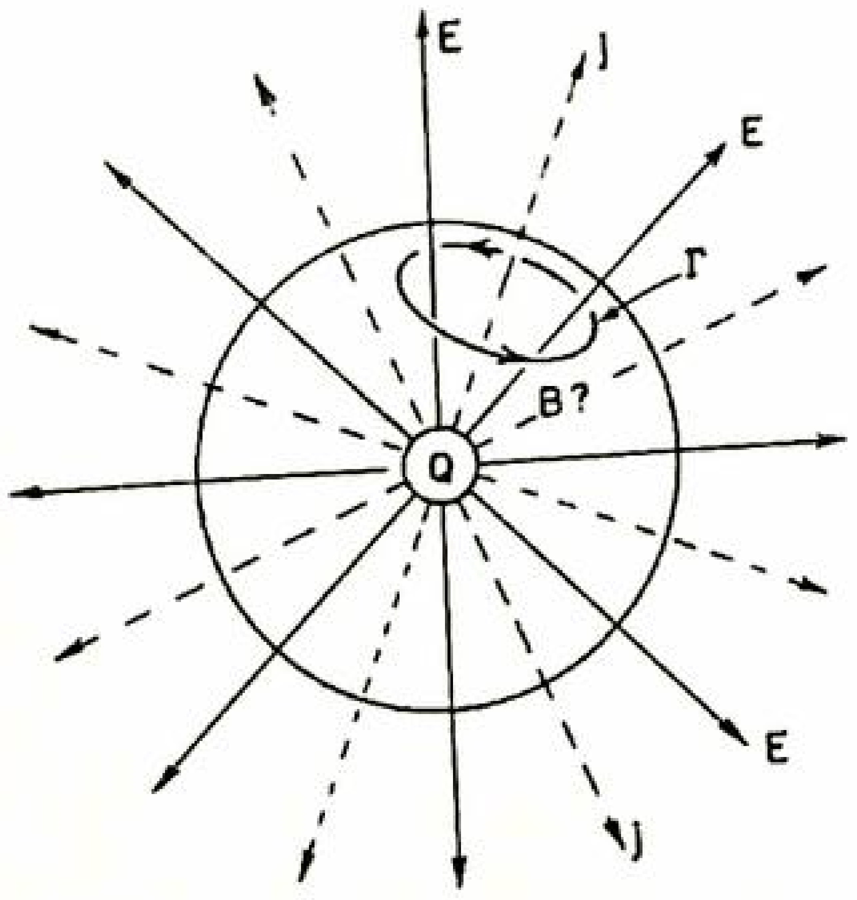
$$\int_\tau \bar{J} \cdot \overline{dS} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

أو

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -4\pi r^2 J \qquad (3.8)$$

حيث Q هي الشحنة الكلية في الكرة و J كثافة التيار على سطح الكرة.

ستنتج كثافة التيار عبر أي دارة على سطح الكرة حقلاً مغنطيسياً على محيطها يكسر التناظر الكروي. يعدم تيار الانتقال هذا الحقل ويعيد التناظر، الشكل.13



الشكل.13

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} + \frac{1}{C^2}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \mu_0 \times \frac{-1}{4\pi r^2}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{C^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

لنكرر قبل متابعة البحث أنه لا يمكن البرهان على مبدأ من مبادئ الفيزياء وإلا لتحولت المبادئ إلى قوانين؛ إن كل ما يمكننا فعله هو أن نستوحيها، في أحيان عديدة، من التجربة أو أن نبررها كما فعلنا في المثالين السابقين لتبرير معادلة ماكسويل-آمبير.

2.3– معادلات الكمونين السلمي والمتجهي

استخلصنا معادلة بواسون في الكهربائية من $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ التي تبين اشتقاق الحقل الكهربائي الراكد من كمون V : $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$، ومن مبرهنة غاوص. لقد خلت المعادلة (3.2) محل انعدام تدوير الحقل الكهربائي ولم يعد الحقل الكهربائي التابع للزمن مشتقاً من كمون. لدينا من (3.2) ومن كون $\vec{B}$ مشتقاً من كمون متجهي

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial}\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \qquad (3.2)'$$

أي أن المقدار $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ هو الذي لا عِقص له (لا تدويري)، المشتق من كمون في هذه الحالة. نرمز لهذا الكمون بـ V ونكتب

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} V$$

أو

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (3.9)$$

رأينا أن مبرهنة غاوص (3.1) تبقى صالحة في الحالة الديناميكية أيضاً؛ لدينا بأخذ تفرق طرفي المعادلة

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} V\right) - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (3.10)$$

رأينا أن $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} X\right) = \nabla^2 X$، كما رأينا أن الكمون المتجهي معرف بإضافة $\vec{\nabla}\psi$ حيث ψ دالة بـ (x, y, z, t) لا على التعيين. سنأخذها، ونقول عندئذ إننا اخترنا معايرة gauge، بحيث تحقق الشرط التالي المعروف باسم شرط لورانتس أو الشرط الإضافي

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad (3.11)$$

نبدل في (3.10) $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ بهذه القيمة التي يحددها شرط لورانتس فنحصل على المعادلة الديناميكية التي تحل محل معادلة بواسون الراكدة

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (3.12)$$

نحصل على معادلة الكمون المتجهي بنفس الشكل انطلاقاً من (3.4) ومن كون $\vec{B}$ مشتقاً من كمون متجهي (3.3) بأن نكتب (3.4) على الشكل

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

لدينا المتطابقة

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A}$$

هذا من جهة، ومن جهة أخرى فقد وضعنا شرط لورانتس (3.11) وحسبنا الحقل الكهربائي في (3.9)، أي أن

$$-\frac{1}{C^2}\vec{\nabla}\frac{\partial V}{\partial t} - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\vec{V} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

وأخيراً

$$\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J} \qquad (3.13)$$

تكافئ هذه المعادلة المتجهية ثلاث معادلات سلمية كتلك التي يخضع لها الكمون السلمي مع استبدال ρ بـ $\mu_0\varepsilon_0 J_i$، $i = x, y, z$. إنها عندما نكتبها بالتفصيل وإضافة (3.12) إليها

$$\begin{cases} \dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} - \left(\dfrac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_i}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_i}{\partial z^2}\right) = \mu_0 J_i \qquad i = 1, 2, 3 \\ \text{و} \\ \dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \left(\dfrac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V_i}{\partial z^2}\right) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \qquad (3.14)$$

لننظر الآن إلى المعادلة التي يجب أن تحققها ψ لكي يتحقق شرط لورانتس. ليكن $\vec{A}'$ الكمون المتجهي الذي لا يحققها و

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla}\psi \qquad (1)$$

الذي يحققها.

إن الانتقال من $\vec{A}'$ إلى $\vec{A}$ يعني أيضاً الانتقال من V' إلى V اللذين يعطيان ذات الحقل الكهربائي وجوباً

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\psi$$

و

$$V = V' - \frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (2)$$

نكتب شرط لورانتس

$$0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{C^2}\frac{\partial V}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\psi\right) + \frac{1}{C^2}\frac{\partial V'}{\partial t} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

وهكذا فالمعادلة التفاضلية التي على الدالة الاعتباطية ψ تحقيقها بالكمونين الجديدين $\vec{A}$ و V المعرفين بـ (1) و(2) انطلاقاً من الكمونين $\vec{A}'$ و V' هي

$$\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \nabla^2\psi = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{C^2}\frac{\partial V'}{\partial t} \qquad (3.15)$$

نسمي المؤثر التفاضلي

هذا من جهة، ومن جهة أخرى فقد وضعنا شرط لورانتس (3.11) وحسبنا الحقل الكهربائي في (3.9)، أي أن

$$-\frac{1}{C^2}\vec{\nabla}\frac{\partial V}{\partial t} - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\vec{V} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

وأخيراً

$$\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J} \qquad (3.13)$$

تكافئ هذه المعادلة المتجهية ثلاث معادلات سلمية كتلك التي يخضع لها الكمون السلمي مع استبدال ρ بـ $\mu_0\varepsilon_0 J_i$، $i = x, y, z$. إنها عندما نكتبها بالتفصيل وإضافة (3.12) إليها

$$\left\{\begin{array}{ll} i = 1, 2, 3 & \dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} - \left(\dfrac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_i}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_i}{\partial z^2}\right) = \mu_0 J_i \\ & \text{و} \\ & \dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \left(\dfrac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V_i}{\partial z^2}\right) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \end{array}\right. \qquad (3.14)$$

لننظر الآن إلى المعادلة التي يجب أن تحققها ψ لكي يتحقق شرط لورانتس. ليكن $\vec{A}'$ الكمون المتجهي الذي لا يحققها و

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla}\psi \qquad (1)$$

الذي يحققها.

إن الانتقال من $\vec{A}'$ إلى $\vec{A}$ يعني أيضاً الانتقال من V' إلى V اللذين يعطيان ذات الحقل الكهربائي وجوباً

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\psi$$

و

$$V = V' - \frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (2)$$

نكتب شرط لورانتس

$$0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{C^2}\frac{\partial V}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\psi\right) + \frac{1}{C^2}\frac{\partial V'}{\partial t} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

وهكذا فالمعادلة التفاضلية التي على الدالة الاعتباطية ψ تحقيقها بالكمونين الجديدين $\vec{A}$ و V المعرفين بـ (1) و(2) انطلاقاً من الكمونين $\vec{A}'$ و V' هي

$$\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \nabla^2\psi = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{C^2}\frac{\partial V'}{\partial t} \qquad (3.15)$$

نسمي المؤثر التفاضلي

$$\Box^2 = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \qquad (3.16)$$

الدالامبرسي، من D'alambert دالامبير والمعادلات التي طرفها الأيسر دالامبرسي معادلات دالامبير أو معادلات أمواج اختصاراً، لأن حلها هو موجات كما سنرى ونكتب المعادلات الثلاث أعلاه اختصاراً على شكل معادلتين

الأولى معادلة الكمون السلمي

$$\Box^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (3.12)'$$

والثانية معادلة الكمون المتجهي

$$\Box^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \qquad (3.13)'$$

المكافئة لثلاث معادلات كما رأينا.

ومعادلة الدالة المحققة لشرط لورانتس

$$\Box^2 \psi = \nabla \cdot A' + \frac{1}{C^2}\frac{\partial V'}{\partial t} \qquad (3.15)'$$

لنلاحظ أن الحقلين الكهربائي والمغنطيسي يخضعان إلى معادلة موجة بدون طرف ثان عندما نقيسهما بعيداً عن الشحنات $(\rho = 0)$ والتيارات $(J = 0)$. لدينا في الواقع من معادلتي ماكسويل الثانية والرابعة، $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ، $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ، لانعدام التيار :

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \equiv \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)$$

و $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ بعيداً عن الشحنات ومنه

$$\Box^2 \vec{E} = 0 \qquad (3.17)$$

لدينا كذلك من المعادلتين الثالثة والرابعة

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \equiv \vec{\nabla}\left(\cancel{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}\right)^{=0} - \nabla^2 \vec{B} = -\frac{1}{C^2}\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

وبالعودة من جديد إلى المعادلة الثانية $\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B}$

نجد

$$\Box^2 \vec{B} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{B} = 0 \qquad (3.18)$$

<u>ملاحظات</u> :

1- بدأنا بكتابة معادلاتي الموجة للكمونين لأنهما أعم من معادلتي الموجة للحقلين الكهربائي والمغنطيسي اللتين لا تصلحا إلا بعيداً عن الشحنات والتيارات. إنهما معادلتا موجة بدون طرف ثان. هذا من جهة، ومن جهة أخرى فالكمون تعبير عن الطاقة في كل الأحوال وقد أشرنا مراراً لأولوية مفهوم الطاقة على مفهوم القوة

والكهرطيسية إلى الذي يختفي إلى حد ما عندما ننتقل من الفيزياء التقليدية : الميكانيك النيوتوني والنسبوي، والكهرطيسية إلى الفيزياء الكمومية موضوع المجلدين القادمين. أضف إلى ذلك أن قيمة الحقلين تشتق من قيمة هذين الكمونين، العلاقة (3.9) و $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ الصحيحة في الظواهر المستقرة والديناميكية، التابعة للزمن.

2- إن منشأ الصلة بين سرعة الضوء والثابتتين ε_0 و μ_0، $\varepsilon_0\mu_0C^2 = 1$ تجريبي بحت وظهور سرعة الضوء في المعادلات الكهرطيسية وفي معادلات الأمواج بشكل خاص هو الدافع الأساسي للنظر إلى الأمواج الضوئية كأمواج كهرطيسية تتميز بتأثيرها على شبكة العين، يقول ماكسويل : "يكاد يكون من المستحيل تجنب الاستنتاج أن الضوء مكون من تموجات عرضانية لنفس الوسط (ويقصد الأثير) المسؤول عن الظواهر الكهربائية والمغنطيسية". وهكذا يكون ماكسويل قد وحد الكهرباء والمغنطيسية والضوء في إطار نظري واحد، بأربع معادلات تعبر عن كل هذه الظواهر. لقد وحد آمبير ومن بعده فارادي وأورستد Oersted الظاهرتين الأولتين منطلقين من التجربة ولكن كهرطيسية ماكسويل تبقى المثل الأعلى الذي تستوحيه نظريات توحيد قوى الطبيعة الأربع : التثاقلية، النووية الضعيفة، الكهرطيسية والنووية القوية. لقد وحد المنوال المعياري القوى الثلاث الأخيرة ولكن توحيدها مع التثاقلية مازال عصياً.

3.3- الكهرطيسية ونظرية النسبية

لابد من التذكير أن النسبية الخاصة هي وليدة الكهرطيسية، أن تغير الحقل الكهرطيسي (الضوء) في الانتقال من مقرن غاليلي إلى آخر حفّز الفيزيائيين على القيام بتجربة ضوئية، تجربة مايكلسون-مورلي تبين حركة النظمة الغاليلية - الأرض - بالنسبة لنظمة غاليلية أخرى مرتبطة بالشمس. لقد أدى فشل هذه التجربة إلى تعميم مبدأ غاليلي القائل باستحالة تحديد حركة نظمة غاليلية بالنسبة لأخرى بتجربة ميكانيكية إلى القول بالاستحالة بأي تجربة فيزيائية أكانت ميكانيكية أو كهرطيسية. تبين أن الفضاء الفيزيائي الحقيقي هو فضاء مينكوفسكي ذو الأربعة أبعاد وأن اتساق العلاقات الفيزيائية يقتضي أن يكون طرفا العلاقة سلميين أو متجهتين (بأربعة أبعاد) في فضاء مينكوفسكي، أو بتعبير آخر أن تكون المعادلة مسايرة التغيير في هذا الفضاء. انظر بشكل خاص (I.(.7§3.1). إن معادلات ماكسويل الأربع متسقة في الفضاء الإقليدي فـ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ و $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ سلميتان و $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\vec{J} + \frac{1}{C^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ متجهية فيه و $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ شبه متجهية تبقى هذه المعادلات على حالها نتيجة الدوران والانسحاب في الفضاء الإقليدي ولكن المعادلتين الأخيرتين لا تبقيان على حالهما نتيجة تحويلات غاليله لوجود المشتق بالنسبة للزمن في طرفهما الثاني. وهذا ما يفسر الأمل الذي كان معقوداً على معادلات ماكسويل لتبيان حركة مقرن غاليلي بالنسبة لآخر.

نكتب معادلتي الموجة للكمون بشكل مساير التغيير – لا يتغير في الانتقال من مقرن غاليلي إلى آخر بتحولات لورانتس – بأن نلاحظ أن الدالامبرسي هو مقدار سلمي نحصل عليه بجداء متجهة مسايرة التغير بمتجهة مضادة التغير

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla}\right) \tag{3.19}$$

حيث $x^0 = Ct$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\vec{\nabla}\right) \tag{3.20}$$

لأن $\frac{\partial}{\partial x^i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}$ $i = 1, 2, 3$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \Box^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2 + \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}) \tag{3.21}$$

و $\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial x_0}$

$$\Box^2 = \frac{1}{C^2 \partial t^2} - \nabla^2$$

سنكتب الكمون رباعي الأبعاد في فضاء مينكوفسكي على الشكل $\left(\frac{V}{C}, \vec{A}\right)$ $(A^0, \vec{A})$ والتيار رباعي الأبعاد على الشكل $(C\rho, \vec{J})$، $(J^0, \vec{J})$.

لا تتغير المعادلة (3.13) في هذه الكتابة أما (3.12) فتأخذ الشكل $\frac{V}{C} = A^0$

$$\Box^2 A^0 = \frac{\rho}{C\varepsilon_0} = \frac{J^0}{C^2 \varepsilon_0} = \mu_0 J^0$$

نجمعها مع

$$\Box^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

في معادلة واحدة

$$\Box^2 A = \mu_0 J \tag{3.22}$$

وهكذا فمعادلة الموجة هي تطبيق مؤثر سلمي في فضاء مينكوفسكي – الدالامبرسي – (المعمم للمؤثر السلمي في الفضاء الإقليدي–اللابلاسي) على كمون متجهي رباعي الأبعاد $\left(\frac{V}{C}, \vec{A}\right)$ والطرف الثاني هو تيار متجهي رباعي الأبعاد $(C\rho, \vec{J})$[1].

---

[1] تجدر الإشارة أن اختيار الثابتتين $\frac{1}{C}$ و C في المركبتين الزمانيتين للكمون المتجهي والتيار المتجهي ليس بالاختيار الوحيد الممكن، لكنه الوحيد الذي يتواءم مع معادلة الاتصالية (الاستمرارية) التي نكتبها بدليل المؤثر المتجهي $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla}$ على شكل جداء سلمي

$$\partial^\mu J_\mu = \frac{\partial C\rho}{C\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

نكتب معادلتي الموجة للكمون بشكل مساير التغيير – لا يتغير في الانتقال من مقرن غاليلي إلى آخر بتحولات لورانتس – بأن نلاحظ أن الدالامبرسي هو مقدار سلمي نحصل عليه بجداء متجهة مسايرة التغير بمتجهة مضادة التغير

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla}\right) \tag{3.19}$$

حيث $x^0 = Ct$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\vec{\nabla}\right) \tag{3.20}$$

لأن $\frac{\partial}{\partial x^i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \Box^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2 + \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}) \tag{3.21}$$

و $\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial x_0}$

$$\Box^2 = \frac{1}{C^2 \partial t^2} - \nabla^2$$

سنكتب الكمون رباعي الأبعاد في فضاء مينكوفسكي على الشكل $\left(\frac{V}{C}, \vec{A}\right)$ $(A^0, \vec{A})$ والتيار رباعي الأبعاد على الشكل $(C\rho, \vec{J})$، $(J^0, \vec{J})$.

لا تتغير المعادلة (3.13) في هذه الكتابة أما (3.12) فتأخذ الشكل $\frac{V}{C} = A^0$

$$\Box^2 A^0 = \frac{\rho}{C\varepsilon_0} = \frac{J^0}{C^2\varepsilon_0} = \mu_0 J^0$$

نجمعها مع

$$\Box^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

في معادلة واحدة

$$\Box^2 A = \mu_0 J \tag{3.22}$$

وهكذا فمعادلة الموجة هي تطبيق مؤثر سلمي في فضاء مينكوفسكي – الدالامبرسي – (المعمم للمؤثر السلمي في الفضاء الإقليدي–اللابلاسي) على كمون متجهي رباعي الأبعاد $\left(\frac{V}{C}, \vec{A}\right)$ والطرف الثاني هو تيار متجهي رباعي الأبعاد $(C\rho, \vec{J})$[1].

---

[1] تجدر الإشارة أن اختيار الثابتتين C و $\frac{1}{C}$ في المركبتين الزمانيتين للكمون المتجهي والتيار المتجهي ليس بالاختيار الوحيد الممكن، لكنه الوحيد الذي يتواءم مع معادلة الاتصالية (الاستمرارية) التي نكتبها بدليل المؤثر المتجهي $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla}$ على شكل جداء سلمي

$$\partial^\mu J_\mu = \frac{\partial C\rho}{C\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

تمكننا هذه العودة السريعة إلى نظرية النسبية من تعيين اللاغرانجي الذي نشتق منه معادلات الحركة، معادلات الموجة؛ فقد رأينا أن لاغرانجي الجسيم الحر النسبوي هو ((I.(7.(3.5)')

$$L = -mC^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} \qquad (3.23)$$

إن المقدار السلمي الوحيد الذي يمكن اقتراحه ليكون لاغرانجي "الطاقة الكامنة" هو جداء الكمون الرباعي $\left(\frac{V}{C}, \vec{A}\right)$ بالتيار الرباعي $(C\rho, \vec{J})$[2]. نكتب هذا الجداء من أجل جسيم شحنته q وكثافة التيار الناشئ عنه $\vec{J} = q\vec{v}$:

$$(Cq, q\vec{v})\left(\frac{V}{C}, \vec{A}\right) = qV - q\vec{v} \cdot \vec{A} \qquad (3.24)$$

نكتب اللاغرانجي الكلي على شكل فرق بين الحدين (3.23) و(3.24)، كلاهما حد سلمي بالمتغيرات $(\vec{r}, \vec{v})$ كما يقتضي الأمر في اللاغرانجي. وضعنا كلمة طاقة كامنة بين معقوفتين لأن لاغرانجي الجسيم الحر النسبوي (3.23) لا يساوي طاقته الحركية، وهكذا فالفعل هو

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\left[-mC^2\left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)^{1/2} - q\left(V - \vec{v} \cdot \vec{A}\right)\right]dt \qquad (3.25)$$

لنذكر أخيراً أننا انتقلنا في الميكانيك النسبوي من مفهوم القوة ثلاثية الأبعاد إلى قوة رباعية الأبعاد

$$g^0 = \frac{1}{C}\frac{dE}{Cdt\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}$$

$$\vec{g} = \frac{1}{C\sqrt{\ }}\frac{dP}{dt} = \frac{1}{C\sqrt{\ }}F$$

أي أن العلاقة $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ تبقى صحيحة في النسبية الخاصة. عندما ننتقل من مقرن غاليلي مرتبط بالشحنة حيث القوة كهربائية صرفة $\vec{F}' = q\vec{E}'$ إلى مقرن آخر يسير بسرعة v بالنسبة له نحول g حسب تحويلات لورانتس لنجد أن المركبة المكانية لـ g، $\vec{g}$ قد أصبحت، ((I.(7.(4.23)

$$\vec{g} = \frac{q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)}{C\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}$$

ومنه قوة لورانتس التي تبين أن المغنطيسية مفعول نسبوي.

[2] جدير بالذكر أن شفارتزشيلد هو من اقترح هذه الصيغة عام 1903 قبل ظهور نظرية النسبية وست سنوات قبل أن يضع مينكوفسكي الصيغة رباعية الأبعاد للنسبية.

4.3- معادلة الموجة

نشير بـ c لسرعة انتشار الموجة؛ إنها سرعة الضوء في الحالة التي تعنينا ولكنها مختلفة عنها عندما لا تكون الموجة كهرطيسية (انظر 5.3) أو عندما لا تنتشر الموجة الكهرطيسية في الفضاء الخاوي.

قضية 1 :

إن حلول معادلة الموجة السلمية، بدون طرف ثان ولنرمز لها بـ ψ هي من الشكل

$$\psi(\vec{r}, t) = f(\vec{r} - ct) + g(\vec{r} + ct) \qquad (3.26)$$

كتبنا كلمة سلمية لأن معادلات الأمواج، سواء كانت معادلة الكمون رباعي الأبعاد بعيداً عن الشحنات والتيارات، (3.22) بدون طرف ثان، أو معادلة الحقل الكهربائي والحقل المغنطيسي (3.17) و(3.18)، تكافئ معادلات سلمية، أربع معادلات في حالة الكمون وثلاث في حالة الحقلين الكهربائي والمغنطيسي.

لنبدأ البرهان (3.26) ببعد واحد للتوضيح ولتكن لدينا المعادلة

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x, t) = 0$$

ولنكتبها بالمتغيرين $\xi = x - ct$ و $\eta = x + ct$ عوضاً عن المتغيرين الأصليين t، x لدينا

$$\frac{\partial}{c\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{c\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{c\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta}$$

و

$$\frac{\partial \psi}{c\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \qquad (1)$$

ومنه

$$\frac{\partial^2 \psi}{c^2\partial t^2} = +\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}$$

ولدينا كذلك

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = +\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}$$

وأخيراً

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi = -4\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \qquad (3)$$

إن أي دالة تابعة للمتغير ξ وحده أو لـ η وحده تحقق هذه المعادلة ولذا فالحل العام هو مجموع هذين الحلين الخاصين و

$$\psi(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \qquad (4)$$

وهو المطلوب.

لا يتغير محتوى البرهان بثلاثة أبعاد عن هذا البرهان، نستبدل المتغيرين $\vec{r}$ و ct بالمتغيرين $\vec{\xi} = \begin{cases} x-ct \\ y-ct \\ z-ct \end{cases}$ و $\vec{\eta} = \begin{cases} x+ct \\ y+ct \\ z+ct \end{cases}$ فيأخذ الاشتقاق (1) الشكل

$$\frac{\partial\psi}{c\partial t} = -\vec{\nabla}_{\xi}\psi + \vec{\nabla}_{\eta}\psi = -\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \qquad (1)'$$

والاشتقاق (2) الشكل

$$\vec{\nabla}_{r}\psi = \left(\vec{\nabla}_{\xi} + \vec{\nabla}_{\eta}\right)\psi \qquad (2)'$$

نكتب الدالامبرسي آخذين '(1) و'(2) بعين الاعتبار على شكل جداء (3.19) بـ (3.20)

$$\Box^2\psi = \left(\partial_{\mu}\partial^{\mu}\right)\psi = \left[\left(-\vec{\nabla}_{\xi} + \vec{\nabla}_{\eta}\right), \ \vec{\nabla}_{\xi} + \vec{\nabla}_{\eta}\right)\right]\left[\left(-\vec{\nabla}_{\xi} + \vec{\nabla}_{\eta}\right), -\left(\vec{\nabla}_{\xi} + \vec{\nabla}_{\eta}\right]\psi$$

يعطينا هذا الجداء كما في (3)

$$\Box^2\psi = -4\vec{\nabla}_{\xi}\vec{\nabla}_{\eta}\psi \qquad (3)'$$

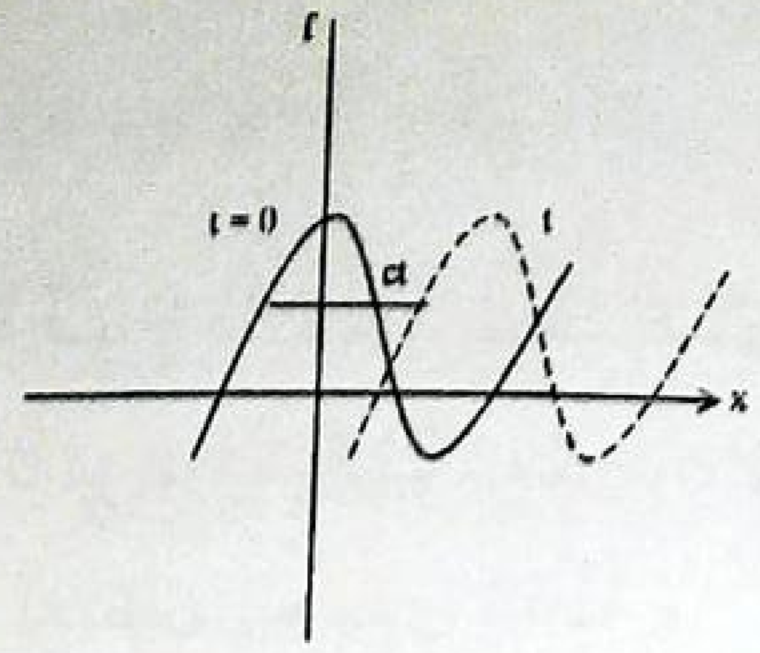
ومنه

$$\psi = f(\xi) + f(\eta)$$

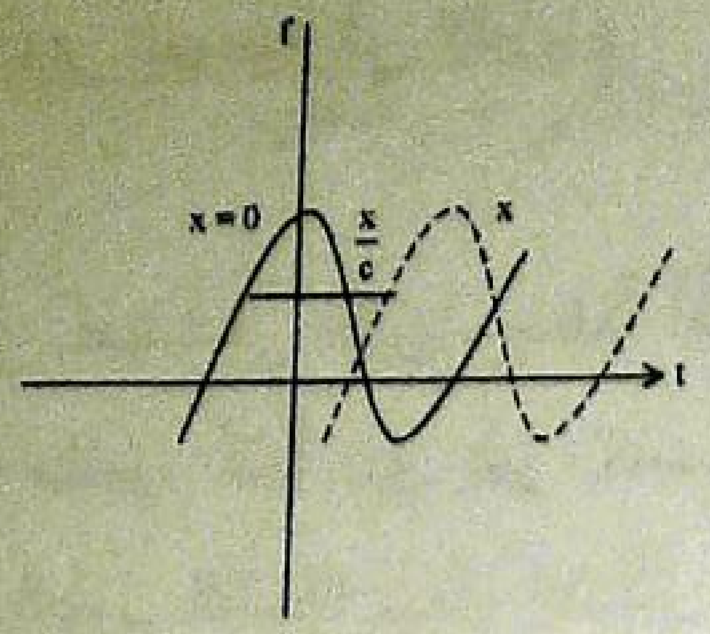
$$\psi(\vec{r},t) = f(\vec{r}-ct) + g(\vec{r}+ct) \qquad (4)'$$

ملاحظة :

كتبنا الدالامبرسي $\Box^2$ على خلاف الرمز الشائع بوضع إشارة مربع عليه لنبين أنه مؤثر سلمي، جداء مؤثرين متجهيين رباعي الأبعاد في فضاء مينكوفسكي على غرار المؤثر السلمي $\nabla^2 X$، اللابلاسي، جداء مؤثرين متجهين في الفضاء الإقليدي $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}X$. لنعد تسهيلاً إلى الموجة ببعد واحد وللحل $f(x-ct)$. إنه حل دوري بالمتغيرين x و t في آن واحد بمعنى أننا إذا نظرنا إليه كمتغير بـ x وحده ورسمنا تغيراته في اللحظة $t=0$ فإن المنحني الناتج سيتكرر دون تغيير في اللحظة t على مسافة تبعد ct عن المنحني الأول، الشكل.14، وعلى نفس النحو فإن منحني تغيراته كمتغير بـ t وحده في النقطة $x=0$ سيتكرر دون تغيير في النقطة x التي تبعد زمناً قدره $\frac{x}{c}$ عن المنحني الأول، الشكل.15.



الشكل.14



الشكل.15

ليكن T الدور بالنسبة للزمن و λ الدور بالنسبة للمسافة، يجب لكي يكون هذان الدوران متسقين أن يكون

$$f\left[x+\lambda-c\left(t+T\right)\right]=f\left(x-ct\right)$$

أو

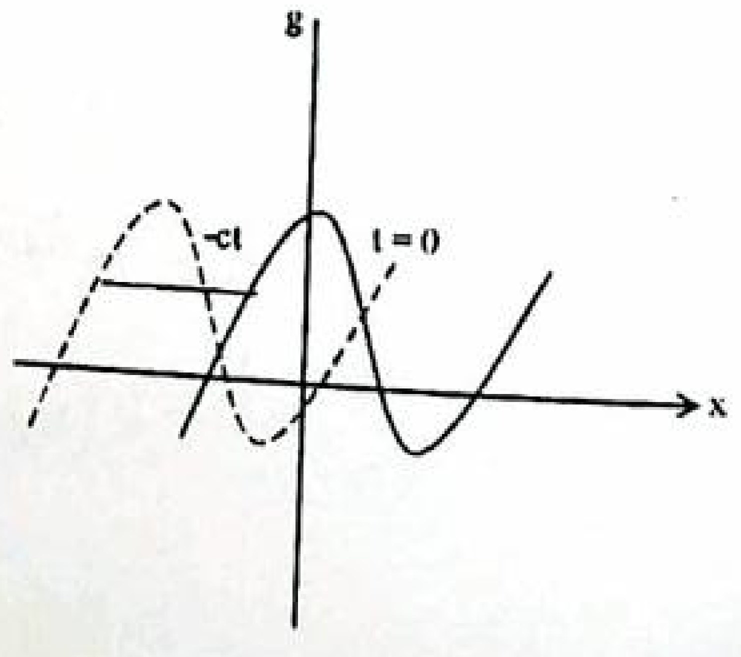
$$\lambda=cT \tag{3.27}$$

يطلق على الدور المكاني λ اسم طول الموجة وتبين العلاقة بين الدورين أن الموجة تنتشر في اتجاه Ox الموجب بسرعة c، هي كما رأينا سرعة الضوء.

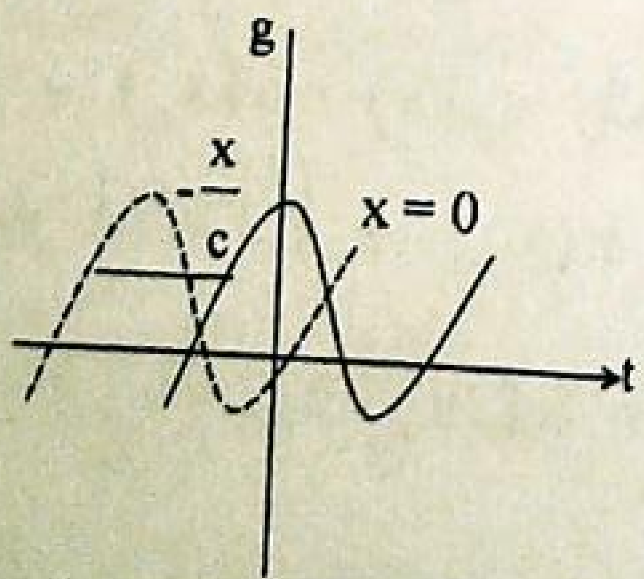
تعريف 2 :

نقول عن الأمواج من الشكل $f(x-ct)$ وبصورة عامة من الشكل $f(\vec{r}-ct)$ إنها أمواج صادرة من المنبع تنتشر في الاتجاه الموجب $x \rangle 0$ وعن الأمواج من الشكل $g(x+ct)$، وبصورة عامة من الشكل $g(\vec{r}+ct)$ إنها أمواج واردة تنتشر في الاتجاه السالب $x \langle 0$، الشكل.'14، نقول عنها أيضاً إنها موجات خارجة أو داخلة على الترتيب.

نرى كذلك الأمر نفسه بالنسبة للزمن فالأمواج الصادرة هي تلك التي تنتقل في الاتجاه الموجب للزمن $t \rangle 0$ والواردة هي التي تنتقل في الاتجاه السالب $t \langle 0$، الشكل.'15



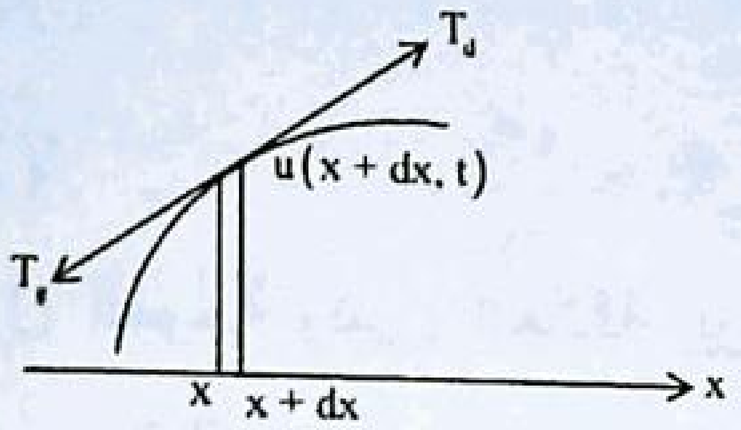
الشكل.'14



الشكل.'15

5.3- الظواهر الموجية في الفيزياء

تأخذ ظواهر عديدة في الفيزياء شكلاً اهتزازياً تعبر عنه معادلة أمواج دالامبير. لنأخذ كمثال أول حركة وتر (حبل) مشدود أفقياً (أي غير خاضع لقوى التثاقل) تحت تأثير قوة شاقولية. لتكن ρ كثافة الكتلة، كتلة واحدة الطول الثابتة؛ نهمل الانتقال الطولاني للوتر ونرمز للانتقال العمودي لنقطة ما x من الوتر في اللحظة t بـ $u(x,t)$ إن ما يحرك النقطة $u(x,t)$ هو توتر الوتر، المماس للمنحني الذي يرسمه الوتر والمساوي للفرق بين هذا التوتر في النقطة المجاورة لـ x، $u(x+dx,t)$، وبين هذا التوتر في الاتجاه المعاكس في النقطة x $T(x,t)$. سنقبل أن هذا التوتر خاضع لقانون هوك $\vec{T} = k\vec{\nabla}u$. ومنه قانون حركة قطعة الوتر ذات الطول dx



$$\rho dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T(x+dx,t) - T(x,t)$$

أو

$$= k\left(\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)$$

إن الحد بين القوسين هو المشتق الثاني لـ u بالنسبة لـ x مضروباً بـ dx، ومنه معادلة اهتزاز الوتر

$$\frac{\rho}{k}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (3.28)$$

إنها معادلة موجة عرضانية : الانتقال عمودي على الوضع، سرعة انتشارها $v = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$.

لنأخذ كمثال ثان الحركة الاهتزازية لذرات، أو جزئيات، جسم صلب بلوري حول وضع التوازن تحت تأثير الذرات المجاورة بقوة متناسبة مع الانزياح. لنأخذ سلسلة خطية من الذرات، ذات الكتلة m والبعيدة عن بعضها مسافة ثابتة d، على المستقيم Ox، لنرمز هنا أيضاً للانزياح الطولاني للذرة n ذات وضع التوازن x_n بـ $u_n(x) = u(x_n)$ وللقوة بـ $k\Delta x$. تخضع الذرة n لقوتين متعارضتين كما أعلاه على اليمين واليسار أولاهما $k(x_{n+1} - x_n)$ والثانية $k(x_{n-1} - x_n)$ وبالتالي فإن معادلة حركة الذرة $u(x_n)$ هي

$$m\frac{\partial^2 u(x_n)}{\partial t^2} = k(u_{n+1} - u_n) + k(u_{n-1} - u_n) = -k(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1})$$

ننشر الدالتين $u(x_n \pm d) = u_{n\pm1}$ في جوار x_n متوقفين عند الحد الثاني من النشر

$$u(x_n \pm d) = u(x_n) \pm d\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_n} + \frac{1}{2}d^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_n}$$

نبدل في معادلة الحركة، فنحصل على

$$m\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = kd^2\frac{\partial u}{\partial x^2} \qquad (3.29)$$

إنها معادلة موجة طولانية : الانتقال في اتجاه الوضع، سرعة الموجة $v = \sqrt{\frac{k}{m}}\, d$. لا تختلف هذه السرعة عن سرعة الوتر إذا نظرنا إلى $\frac{m}{d}$ ككثافة الكتلة.

يمكن تعميم هذين المثالين إلى موجات غشاء مشدود ببعدين أو أكثر وإلى الذرات التي تحتل مراكز توازن معينة في الجسم الصلب (البلوري) ببعدين أو أكثر.

مثالنا الثالث هو معادلة تمدد قضيب مرن. عندما يكون التمدد صغيراً فلا تتناسب القوة مع الاستطالة حسب قانون هوك كما في المثال السابق، وإنما مع الاستطالة النسبية. نكتب تغير التوتر على الشكل

$$\Delta T = YS\frac{\Delta \ell}{\ell}$$

حيث Y ثابتة تعرف باسم طويلة يونغ Young و S مقطع القضيب، ليس لـ ΔT إشارة هنا لأن القضيب قد يتمدد أو ينضغط. ونكتب قانون هوك على الشكل

$$T = YS\partial_x u$$

حيث $\partial_x u$ هو مشتق الدالة التي تحدد الانتقال الطولاني لنقطة x في اللحظة t، $u(x,t)$. نحصل كما في المثال الأول على معادلة موجة

$$\frac{\rho}{YS}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (3.30)$$

سرعة الموجة هنا هي $v = \sqrt{\frac{Y}{\tau}}$ حيث $\tau = \frac{\rho}{S}$ هي كثافة الكتلة (في واحدة الطول).

مثالنا الأخير هو سرعة الصوت في أنبوب يجري فيه سائل متجانس غازي أو مائع. إن الضغط p هو $-\frac{T}{S}$، هذا من جهة، ومن جهة ثانية فإن تغير الضغط معرف بمعامل الانضغاطية χ. وهكذا فإن

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta p}{p} = -\frac{1}{\chi}\frac{\Delta V}{V}$$

حيث تغير الحجم النسبي هو تغير الطول النسبي $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \ell}{\ell}$ ؛ لدينا $\Delta p = -\frac{p}{\chi}\frac{\Delta \ell}{\ell} = -\frac{\Delta T}{S}$، وبعبارة أخرى فطويلة يونغ، بالمقارنة مع المثال السابق، هي $Y = \frac{p}{\chi}$. سرعة الموجة الصوتية هي إذاً

$$v = \sqrt{\frac{p}{\chi\tau}}$$

لدينا بشكل خاص من أجل غاز كامل كظوم $pV^{\gamma} =$ ثابتـــة، ومنه $\chi = \frac{1}{\gamma}$ وسرعة الصوت

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\tau}}$$

يمكننا إعطاء معادلة الموجة الصوتية بصورة عامة بالعودة إلى معادلتي ديناميك الغاز المعبرتين عن انحفاظ الكتلة والاندفاع ((II.(5.(2.36)')) و((II.(5.(2.36)$_2$))، معادلة أولر، وكتابتهما بشكل خطي حول وضع التوازن $\rho = \rho_0 + O_1$، $V = 0 + O_2$ حيث O_1 و O_2 لامتناهيان في الصغر، ثم جمع هاتين المعادلتين إلى بعضهما للحصول على معادلة موجة الصوت.

لا نريد الخوض في هذا الموضوع الخارج عن إطار الكهرطيسية ومعادلات موجاتها، فكل ما أردنا تبيانه في هذا الاستطراد هو أن الظواهر الموجية عامة في الفيزياء وأنها تعبر عن حركات اهتزازية للمادة. هذا في حين تعبر الموجة الكهرطيسية عن تغير الحقل، حقل الكمون أو الحقل الكهربائي أو المغنطيسي في المكان والزمان دون أن يكون لهذه الاهتزازات حامل مادي في الفيزياء التقليدية، خلافاً لما هو حال الأمثلة التي أشرنا إليها وحال مئات غيرها. لذا فقد تصور فيزيائيو القرن التاسع عشر حاملاً مادياً سموه الأثير ينقل هذه الاهتزازات. إلا أنهم لم يستطيعوا تحديد صفاته ولا البرهان على وجوده، إلى أن جاءت النسبية الخاصة، ابنة الكهرطيسية، لتبين عدم الحاجة لهذا الحامل المادي. لكن الميكانيك الكمومي، الذي أشرك بكل جسيم موجة (وقد سمي لهذا السبب بالميكانيك الموجي)، ومن بعده نظرية الحقول المكممة (التي جمعت بين ميكانيك الكم والنسبية الخاصة، بين ميكانيك الكم والكهرطيسية على سبيل المثال) التي أشركت بكل موجة جسيماً وحدّا هذين المفهومين. وهكذا فالموجة الكهرطيسية تعبر عن جسيم "مادي"، عن حامل مادي لها هو الفوتون. ينتشر الفوتون بسرعة الضوء بطبيعة الحال مما يجعل كتلته مساوية للصفر، وهذا ما دعانا إلى وضع كلمة مادي بين معقوفتين، لكن هذا لا ينفي صفة الجسيم عنه؛ خاصة وأن الفوتونات تتفكك إلى إلكترونات وبوزونات والعكس بالعكس كما يتبين في الكهرديناميك الكمومي. يجب أن يبقى في أذهاننا أن حامل الموجة الكهرطيسية هو الفوتون وإن كنا لن نتعرض إلى نظرية الحقول المكممة في هذا الكتاب.

4. حلول معادلات الموجة الكهرطيسية

<u>1.4- حل معادلات ماكسويل ببعد واحد بعيداً عن الشحنات والتيارات</u>

لنفرض أن الحقلين الكهربائي والمغنطيسي $\vec{E}$، $\vec{B}$ تابعان للمتغير المكاني x وللزمن t : $\vec{E} = \vec{E}(x, t)$، $\vec{B} = \vec{B}(x, t)$، ينتج عن مبرهنة غاوص $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ أن $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ أي أن E_x ثابت بالنسبة للمكان،

ونقول عنه إنه متجانس. ترينا معادلة ماكسويل امبير $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ مادام $\vec{B}$ لا يتبع إلا لـ x، ان

$$0 = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{1}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{2}$$

$$0 = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{3}$$

أي أن E_x ثابت بالنسبة للزمن، أنه منحفظ فهو إذاً حقل كهربائي راكد يمكن إهماله ما دمنا ندرس الحقل الناتج عن الشحنات المتحركة وكتابة $E_x = 0$. وهكذا فالحقل الكهربائي $\vec{E}(x,t)$ عمودي على المحور x. نرمز لاتجاهه في اللحظة t بـ Oy – فهو محور عمودي على Ox دوماً ولكن اتجاهه متغير بين لحظة وأخرى. اخترنا إذاً $E_z = 0$ في اللحظة t وعلى الدوام (3). ترينا معادلة ماكسويل فارادي $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$، نظراً لأن $\vec{E}$ هو $\vec{E}(x,t)$ و $E_x = E_z = 0$، أن

$$0 = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \tag{4}$$

$$0 = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \tag{5}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - 0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \tag{6}$$

وهكذا فإن مركبتي الحقل المغنطيسي B_x، B_y ثابتتان وتمثلا، كما هو حال المركبة الكهربائية E_x، حقلاً مغنطيسياً راكداً يمكن إهماله، $\vec{B} = (O, O, B_z)$، والحقل المغنطيسي عمودي على الحقل الكهربائي في اللحظة t. تأخذ المعادلة (2) الشكل

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{2'}$$

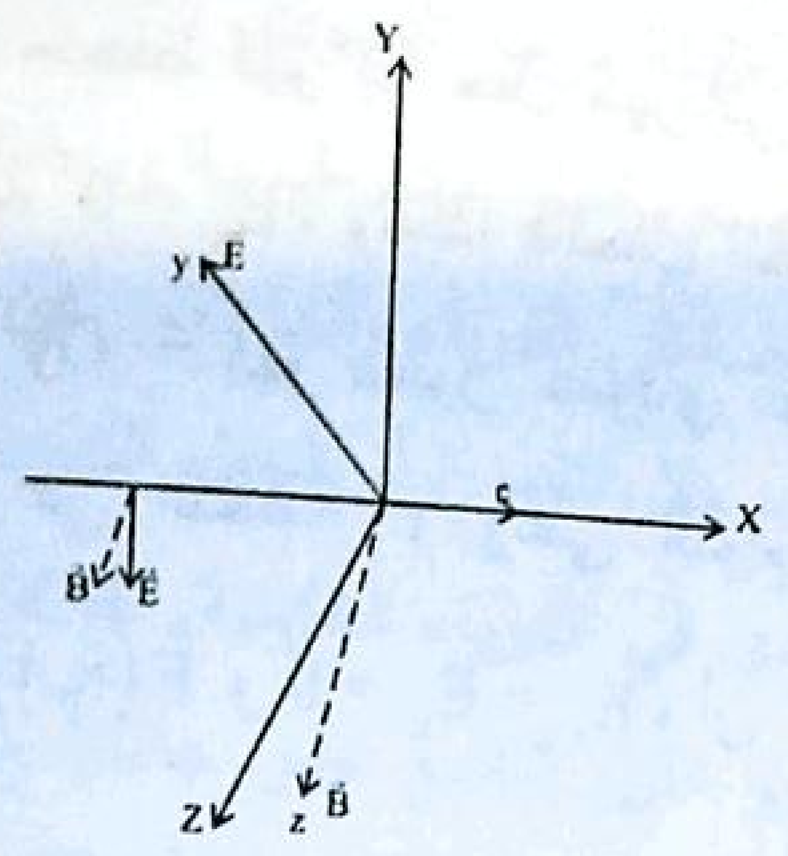
نشتق طرفي المعادلة (6) بالنسبة لـ x و'(2) بالنسبة لـ t فنحصل بالتخلص من الحد $\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}$ في هاتين المعادلتين على معادلة الموجة الكهربائية ببعد واحد

$$\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = 0 \tag{4.1}$$

ونحصل بنفس الطريقة باشتقاق (6) بالنسبة لـ t و'(2) بالنسبة لـ x على معادلة الموجة المغنطيسية

$$\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = 0 \tag{4.2}$$

تتكون الموجة الكهرطيسية ببعد واحد x من حقلين، كهربائي ومغنطيسي، متعامدين فيما بينهما على الدوام وعموديين على اتجاه انتشار الموجة OX، الشكل.16. إن Oy و Oz متغيرا الاتجاه على الدوام (الاتجاه تابع لـ t) ولكنهما يقعان في المستوى YZ العمودي على OX. نقول عن الموجة إنها مستوية. لنفرض أن الموجة تتجه في الاتجاه الموجب لـ OX، رأينا أن حل معادلة الموجة ولتكن معادلة الحقل الكهربائي هي من الشكل $E_y = f(x - ct)$:



الشكل.16

ولدينا، بالرمز لـ x - ct بـ X،

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -c\frac{\partial f}{\partial X} \quad , \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X}$$

أو بعبارة أخرى

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad (7)$$

ومن '(2)

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = c\frac{\partial B_z}{\partial x}$$

و

$$E_y = cB_z \qquad (4.3)$$

أي أن حل معادلة الحقل المغنطيسي هو

$$B_z = \frac{1}{c}f(x - ct) \qquad (4.4)$$

نرى بنفس المحاكمة أنه عندما يكون حل معادلة الحقل الكهربائي من الشكل $E_y = g(x + ct)$ فإن

$$B_z = -\frac{1}{c}g(x + ct) \qquad (4.5)$$

تبين هذه العلاقة أن تغير اتجاه الانتشار من x إلى x- يقلب اتجاه الحقل المغنطيسي بالنسبة للحقل الكهربائي ولكن الثلاثية $\vec{E}, \vec{B}, \vec{C}$، حيث $\vec{C}$ هو اتجاه الانتشار، ثلاثية مباشرة. وتبين في ذات الوقت

طبيعة المتجهة الشبيهة $\vec{B}$ التي يتغير اتجاهها عندما ننتقل بالتناظر في المرآة من XYZ إلى XYZ-؛ الشكل.16، إن الحل العام للمعادلتين (4.1) و(4.2) هو

$$\begin{cases} \vec{E} = (0, E_y, 0) = f(x - ct) + g(x + ct) \\ \vec{B} = (0, 0, E_z) = \frac{1}{c}\left(f(x - ct) - g(x + ct)\right) \end{cases} \quad (4.6)$$

أعطينا هذين الحلين بأخذ المحورين $Oy(t)$، $Oz(t)$ المتحركين بالنسبة للمحورين الثابتين OY، OZ.

يمكننا إعطاء الحل بإسقاط E_y و E_z على المحورين الثابتين ليصبح الحل

$$\begin{cases} \vec{E} = (0, E_Y, E_Z) = \left[0, f(x - ct) + g(x + ct), F(x - ct) + G(x + ct)\right] \\ c\vec{B} = (0, B_Y, B_z) = \left[0, -F(x - ct) + G(x + ct), f(x - ct) - g(x + ct)\right] \end{cases} \quad (4.6)'$$

نحصل على B_Y انطلاقاً من E_Z بملاحظة أن (7) صحيحة من أجل أي مركبة لأي حقل ولدينا من (5)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial E_Z}{\partial x} = \frac{\partial B_Y}{\partial t} = -c\frac{\partial B_Y}{\partial x}$$

ومنه $cB_y = -F$، الخ.

2.4- الأمواج المستوية بثلاثة أبعاد

لنعد إلى معادلة دالامبير العامة بدون طرف ثان، معادلة الكمون الرباعي بعيداً عن الشحنات والتيارات المتحركة أو معادلة الحقلين الكهربائي والمغنطيسي ولنلاحظ أن المعادلة صامدة، لا تتغير بالانعكاس الزماني $t \to -t$، شأنها في ذلك شأن كل قوانين الفيزياء التقليدية والكمومية على حد سواء، نظراً لوجود المشتق الثاني بالنسبة للزمن. وهذا ما يعبر عنه وجود الحل (ببعد واحد) $g(x+ct)$ إلى جوار الحل $f(x-ct)$. كما أنها لا تتغير نتيجة الانعكاس المكاني $x \to -x$ لوجود المشتق الثاني بالنسبة لـ x وهكذا فإن الحل $f(-x-(-ct))$ الذي يجمع الانعكاسين هو حل أيضاً. نكتبه على الشكل $f(ct-x)$.

نضرب المتغير $ct - x$ بالمقدار $\frac{\omega}{c}$ المرتبط بالدورين الزماني والمكاني

$$\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{Tc} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4.7)$$

لنكتب حل معادلة الموجة ببعد واحد على الشكل

$$f\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad (4.8)$$

تعريف 3 :

نسمي المقدار $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}x$ فرق الطور ونكتب الدالة الدورية بالمتغيرين x و t كدالة مثلثاتية $f_0\cos(\omega t - \varphi)$ أو $f_0\sin(\omega t - \varphi)$

$$\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = \cos\left[\omega(t+T) - \frac{2\pi}{\lambda}(x+\lambda)\right]$$

أو بجمع الحلين معاً، على شكل عقدي

$$f = f_0 e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)} \quad (4.8)'$$

تعريف 4 :

نسمي f_0 سعة الموجة، دورها $T = \frac{2\pi}{\omega}$، طول موجتها $\lambda = cT$ ووضعها في اللحظة t هو x. نكتب معادلتين مماثلتين من أجل موجة تابعة لـ y أو لـ z لها نفس الدور T وطول الموجة λ.

نكتب الموجة التابعة لـ y وحدها على نفس الشكل كتابع لـ $\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}y$ ولـ z على الشكل $\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}z$ فنحصل بالتوضيع، ما دامت المعادلات خطية، على معادلة موجة مستوية طورها هو مجموع هذه الأطوار الثلاثة

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{2\pi}{\lambda}y + \frac{2\pi}{\lambda}z \quad (4.9)$$

يمكن كتابة الطور على شكل جداء لمتجهة تعين اتجاه انتشار الموجة في الفضاء نرمز لها بـ $\vec{k}$، طويلتها $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ ولدينا بتعيين وضع الموجة في اللحظة t بـ $\vec{r} = (x, y, z)$

$$\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r} \quad (4.10)$$

وهكذا فالموجة بثلاثة أبعاد، الحقل الكهربائي مثلاً، هي من الشكل

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \quad (4.11)$$

تعريف 5 :

نسمي المتجهة $\vec{k}$ التي تعين اتجاه الموجة المستوية $\vec{E}$ في اللحظة t والنقطة $\vec{r}$ بمتجهة الموجة. إن الموجة $\vec{E}$ هي توضيع لثلاث موجات تنتشر في الاتجاهات الثلاثة OX، OY، OZ.

ملاحظة هامة :

إن $(ct, \vec{r})$ متجهة رباعية الأبعاد في فضاء مينكوفسكي ولذا يمكن تصور $\left(\frac{\omega}{c}, -\vec{k}\right)$ متجهة رباعية

الأبعاد في ثنوي هذا الفضاء بحيث يصبح الجداء $\left(\frac{\omega}{c}, -\vec{k}\right)(ct, \vec{r}) = \omega t - \vec{k}\vec{r}$ مقداراً سلمياً مساير التغيير. تلعب هذه الملاحظة دوراً هاماً في الميكانيك الكمومي حيث $\left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$ مضروباً بثابتة بلانك $\hbar$ هو $\left(\frac{\varepsilon}{c}, \vec{p}\right)$، متجهة الطاقة–الاندفاع في النسبية الخاصة. وكما رمزنا لـ ct بـ x^0 فإننا سنرمز لـ $\frac{\omega}{c}$ بـ k_0 ومتجهة الطاقة–الاندفاع في الفضاء الثنوي هي $k_i = -k^i$ $(k_0, -\vec{k})$.

نحصل في نقطة من الفضاء $\vec{r}$ ولحظة معينة t، في النقطة $(ct, \vec{r})$ من فضاء مينكوفسكي على كل الموجات الممكنة بالمكاملة رباعية الأبعاد على كل التواترات وكل أطوال الموجة وكل اتجاهاتها وهكذا فالأمواج المستوية في النقطة $(ct, \vec{r})$ هي

$$\int e^{i(k_0 t - \vec{k}\cdot\vec{r})} dk^0 dk^1 dk^2 dk^3 \qquad (4.12)$$

ونكتب الحقل الكهربائي في هذه النقطة بدليل محول فوريي $\vec{E}(k_0, \vec{k})$ على الشكل

$$\vec{E}(ct, \vec{r}) = \int \vec{E}(k_0, \vec{k}) e^{i(k_0 t - \vec{k}\cdot\vec{r})} dk \qquad (4.13)$$

حيث $dk^0 dk^1 dk^2 dk^3 = dk$.

هذا فيما يخص الأمواج الصادرة عن المنبع، الحلول من الشكل $f(x - ct)$، ولدينا من أجل الأمواج الواردة إلى المنبع $g(x + ct)$ على غرار (4.11)

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t + \vec{k}\cdot\vec{r})} \qquad (4.11)'$$

لنلاحظ أن النتائج الفيزيائية هي قيم حقيقية ولا فرق عندئذ من الحساب انطلاقاً من E في (4.11) و'(4.11) أو من مرافقة العقدي $\vec{E}$ أي بوضع إشارة ناقص أمام i في هاتين العلاقتين. إن الانتقال من $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ إلى $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ هو الانتقال من الحل $f(ct - \vec{r})$ إلى $f(-ct - (-\vec{r}))$ الذي يجمع الانعكاسين الزماني والمكاني. لنلاحظ أن المقدار $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ يعبر عن موجة ($\vec{k}$ معينة) تنتشر في الفضاء، انطلاقاً من نقطة معينة O في الاتجاه الموجب للشعاع المتجه $\vec{r}$، فهي موجة مبتعدة عن O (صادرة عنها)، في حين يعبر المقدار $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ عن موجة متجهة نحو O (واردة إليها) وهكذا فإن $e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ هي الموجة الصادرة و $e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ الواردة.

3.4– الأمواج الكروية

لنفرض أن منبع الأمواج الكهرطيسية شحنة نقطية، تصدر هذه النقطة في كل لحظة أمواجاً تنتشر على شكل سطوح كروية نظراً لتناحي الفضاء الذي لا يميز بين اتجاه وآخر. إن إلقاء حجر في بحيرة ما ساكنة ينشر أمواجاً دائرية (المسألة هنا ببعدين) مركزها نقطة سقوط الحجر. نكتب دالة الموجة السلمية – دالة

أي مركبة من مركبات الحقل مثلاً – على شكل $\psi(r,t)$، عوضاً عن $\psi(x,y,z,t)$، حيث r بعد سطح الموجة عن مصدرها. نكتب اللابلاسي بدليل مشتقي ψ بالنسبة لـ r $\psi'(r)$، $\psi''(r)$، لدينا من أجل أي من المتغيرات x, y, z بـ x_i، $i = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial \psi(r)}{\partial x_i} = \psi'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = \psi'(r)\frac{x_i}{r}$$

و

$$\frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial x_i^2} = \psi''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \psi'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)$$

ومنه

$$\nabla^2 \psi(r) = \psi''(r) + \frac{2}{r}\psi'(r) \equiv \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\psi) \tag{4.14}$$

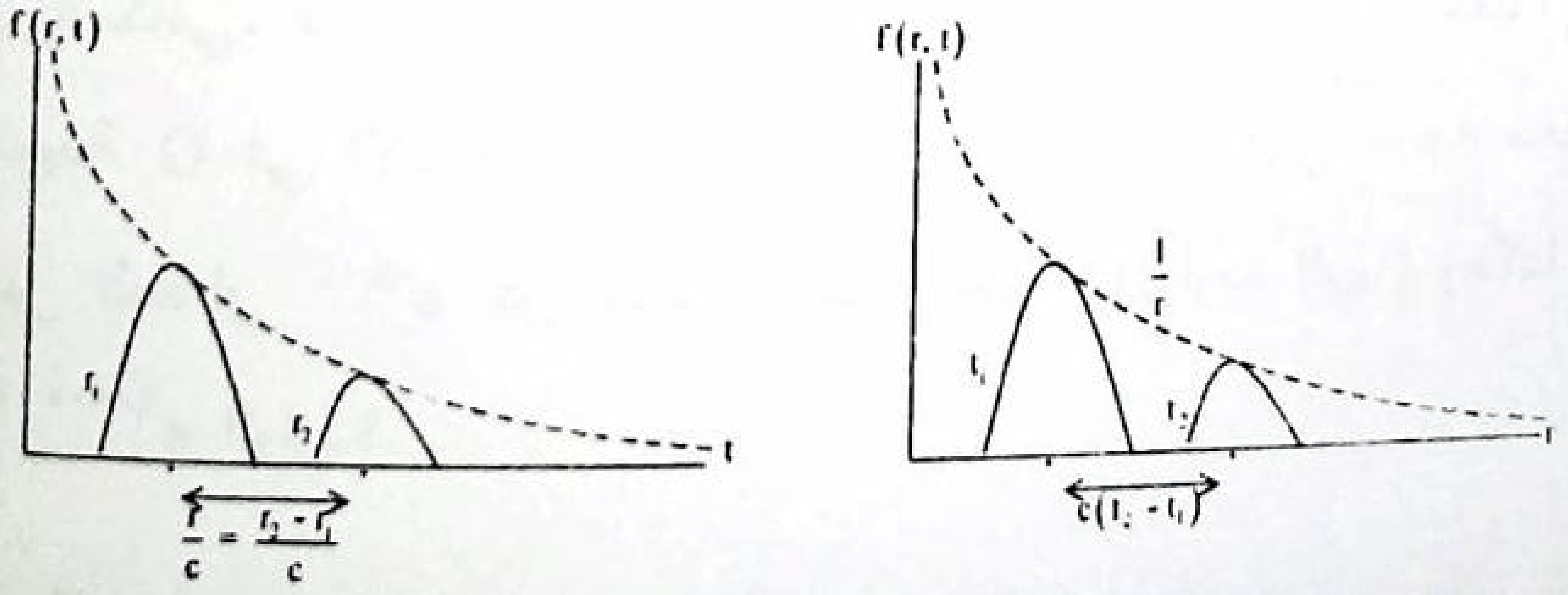
كتبنا المتطابقة الأخيرة لأنها تتيح وضع معادلة الموجة على الشكل

$$\frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial t^2} = 0 \tag{4.15}$$

أي أن $r\psi(r,t)$ هي موجة سلمية ببعد واحد، أحد حليها هو $f(ct - r)$ الذي كتبناه على الشكل $f\left(t - \frac{r}{c}\right)$ لا تختلف قيمة $\psi(r,t)$ الكروية عن ψ المستوية إلا بوجود المخرج $\frac{1}{r}$:

$$\psi(r,t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \tag{4.16}$$

إنها بطبيعة الحال دورية بالنسبة للمكان والزمان ولكن سعة الموجة تتناقص مع الزمن ومع الابتعاد عن المصدر لوجود فرع القطع الزائد $\frac{1}{r}$، الشكل.17



الشكل.17

لنلاحظ أمرين، أولهما أن الموجة الكروية لا تصلح إلا بعيداً عن مصدرها، فهي معادلة بدون طرف ثان، بدون شحنات أو تيارات متحركة ولذا تتناهى إلا اللانهاية عندما تتناهى r إلى الصفر، وثانيهما أن تناسب سعتها مع $\frac{1}{r}$، تناسب كثافة طاقتها على سطح الكرة مع $\frac{1}{r^2}$ يعبر عن انحفاظها. فالطاقة الموزعة على سطح كرة نصف قطرها r_1 في اللحظة t_1 هي ذات الطاقة الموزعة على سطح كرة نصف قطرها

في اللحظة t_2 حيث $t_2 - t_1 = \frac{r_2 - r_1}{c}$. لتكن E هذه الطاقة، $S_1 = \frac{E}{4\pi r_1^2}$ هي كثافتها على سطح الكرة r_1 و $S_2 = \frac{E}{4\pi r_2^2}$ و $\frac{S_2}{S_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$.

عندما نبتعد كثيراً عن المصدر فمن الممكن النظر إلى سطح الموجة ككرة بلغ نصف قطرها اللانهاية أي كمستوي؛ وهكذا فالموجة المستوية تقريب للموجة الكروية البعيدة عن المصدر وعدم توقف سعتها على r يعني أننا نهمل تغيرات r ، Δr أمام r $\Delta r << r$ ونهمل بالتالي تغيرات الطاقة بين النقطتين r_1 و r_2 : ننظر إلى طاقة الموجة المستوية كمقدار ثابت.

لم نعالج في حالة الموجات الكروية إلا الموجات الصادرة عن الشحنات المتحركة في لحظة ما، t_0 والمحدثة للأمواج المتتالية في اللحظات $t_2 > t_1 > t_0$، الخ. إن الموجات الواردة عليها في هذه الحالة هي موجات آتية من بعيد، من اللانهاية قبل اللحظة t_0 بزمن بعيد جداً لتصل إلى جوار هذه الشحنات في لحظة قريبة جداً من t_0 قبل بدأ حركتها : $t'_2 < t'_1 < t_0 ...$ هذا هو محتوى الانعكاس الزماني. لا توجد في الكهرطيسية موجات كروية واردة ولذا اعتبر الحل الذي يعكس الزمن $g(x + ct)$ غير فيزيائي. ولكن القول إنه غير فيزيائي يناقض ما قلناه عن تناظر الماضي والمستقبل، عن عدم تغير قوانين الفيزياء التقليدية والكمومية على حد سواء بالانتقال من t إلى $-t$. سنرى في المجلد القادم أن هذا التناظر يبقى قائماً وأن انعكاس الزمن يقابل الانتقال من المادة إلى المادة المضادة، من الإلكترون إلى البوزيترون، وإن كنا لا نستطيع في إطار هذا الكتاب ككل الدخول في تفاصيل تعالجها نظرية الحقول المكممة.

4.4– الحل العام لمعادلات ماكسويل، الكمون المؤخر

تسعى معادلة الموجة الكروية عندما يتناهى البعد عن المصدر، r، إلى الصفر نحو الشكل التالي

$$\psi(t, r) = \frac{f(t - r\,c)}{r} \underset{r\to 0}{\rightarrow} \frac{f(t)}{r} \qquad (4.17)$$

وعلينا اختيار الدالة $f(t)$ بحيث تتيح لنا التوفيق بين الحل قريباً من المصدر والحل بعيداً عنه : تتناهى $\psi(t, r)$ إلى اللانهاية عندما نقترب من المصدر؛ هذا يعني أن مشتقاتها بالنسبة للإحداثيات المكانية تزداد بمقادير كبيرة جداً بالنسبة لمشتقها بالنسبة للزمن الذي يتغير ببطء لأننا لا نستطيع إعطاء تسارع غير منته للشحنات في المصدر. نهمل إذاً الحد $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ أمام المشتقات الأخرى لتأخذ معادلة دالامبير بطرف ثان $\Box^2 \psi = -s$، حيث s هو المصدر، كثافة شحنة متحركة، شكل معادلة بواسون، معادلة كمون كهربائي راكد من الشكل

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

r_2 في اللحظة t_2 حيث $t_2 - t_1 = \frac{r_2 - r_1}{c}$. لتكن E هذه الطاقة، $S_1 = \frac{E}{4\pi r_1^2}$ هي كثافتها على سطح الكرة r_1 و $S_2 = \frac{E}{4\pi r_2^2}$ و $\frac{S_2}{S_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$.

عندما نبتعد كثيراً عن المصدر فمن الممكن النظر إلى سطح الموجة ككرة بلغ نصف قطرها اللانهاية أي كمستوي؛ وهكذا فالموجة المستوية تقريب للموجة الكروية البعيدة عن المصدر وعدم توقف سعتها على r يعني أننا نهمل تغيرات r، Δr أمام r $\Delta r << r$ ونهمل بالتالي تغيرات الطاقة بين النقطتين r_1 و r_2: ننظر إلى طاقة الموجة المستوية كمقدار ثابت.

لم نعالج في حالة الموجات الكروية إلا الموجات الصادرة عن الشحنات المتحركة في لحظة ما، t_0 والمحدثة للأمواج المتتالية في اللحظات $t_2 > t_1 > t_0$، الخ. إن الموجات الواردة عليها في هذه الحالة هي موجات آتية من بعيد، من اللانهاية قبل اللحظة t_0 بزمن بعيد جداً لتصل إلى جوار هذه الشحنات في لحظة قريبة جداً من t_0 قبل بدأ حركتها : $t_2' < t_1' < t_0$ ... هذا هو محتوى الانعكاس الزماني. لا توجد في الكهرطيسية موجات كروية واردة ولذا اعتبر الحل الذي يعكس الزمن $g(x+ct)$ غير فيزيائي. ولكن القول إنه غير فيزيائي يناقض ما قلناه عن تناظر الماضي والمستقبل، عن عدم تغير قوانين الفيزياء التقليدية والكمومية على حد سواء بالانتقال من t إلى $-t$. سنرى في المجلد القادم أن هذا التناظر يبقى قائماً وأن انعكاس الزمن يقابل الانتقال من المادة إلى المادة المضادة، من الإلكترون إلى البوزيترون، وإن كنا لا نستطيع في إطار هذا الكتاب ككل الدخول في تفاصيل تعالجها نظرية الحقول المكممة.

4.4– الحل العام لمعادلات ماكسويل، الكمون المؤخر

تسعى معادلة الموجة الكروية عندما يتناهى البعد عن المصدر، r، إلى الصفر نحو الشكل التالي

$$\psi(t,r) = \frac{f(t - r\,c)}{r} \underset{r\to 0}{\rightarrow} \frac{f(t)}{r} \quad (4.17)$$

وعلينا اختيار الدالة $f(t)$ بحيث تتيح لنا التوفيق بين الحل قريباً من المصدر والحل بعيداً عنه : تتناهى $\psi(t,r)$ إلى اللانهاية عندما نقترب من المصدر؛ هذا يعني أن مشتقاتها بالنسبة للإحداثيات المكانية تزداد بمقادير كبيرة جداً بالنسبة لمشتقها بالنسبة للزمن الذي يتغير ببطء لأننا لا نستطيع إعطاء تسارع غير منته للشحنات في المصدر. نهمل إذاً الحد $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ أمام المشتقات الأخرى لتأخذ معادلة دالامبير بطرف ثان $\Box^2\psi = -s$، حيث s هو المصدر، كثافة شحنة متحركة، شكل معادلة بواسون، معادلة كمون كهربائي راكد من الشكل

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

هي ((3.15)-1) r المسافة $d\tau$ عنصر الحجم M تبعد عن ذات الحل في نقطة

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho d\tau}{r} \qquad (2)$$

حيث $Q = \int \rho d\tau$ هي الشحنة الكلية في المصدر.

وهكذا فإن القول إن معادلة دالامبير تأخذ شكل معادلة بواسون،

$$\nabla^2\psi = -s \qquad (3)$$

يعني أن

$$\psi(t, r) = \frac{f(t - r/c)}{r} = \frac{1}{4\pi}\int\frac{s d\tau}{r} \qquad (4)$$

أو بعبارة أخرى أن مفعول المشتق الثاني لـ ψ بالنسبة للزمن هو إدخال "التأخر" $t - r/c$ على الكمون الكولومبي الذي قارناه بـ ψ

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{f(t - r/c)}{r} = \frac{1}{4\pi}\int\frac{s(t - r/c)d\tau}{r} \qquad (4.18)$$

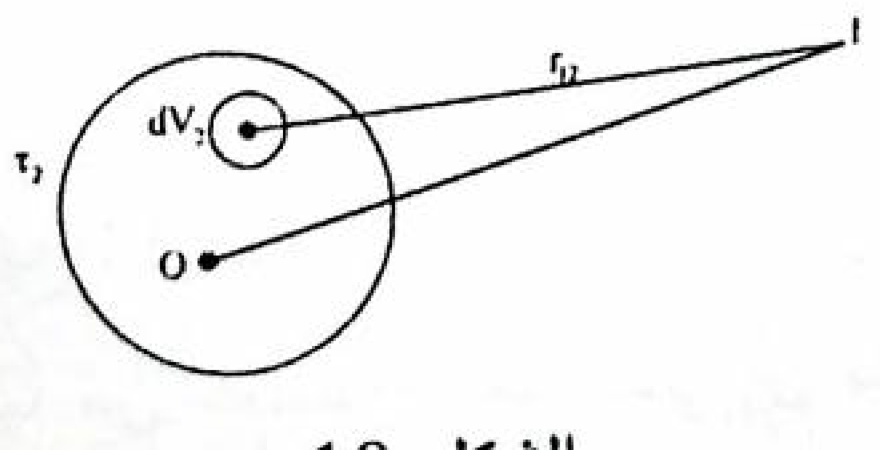
إن (4.18) هي حل معادلة دالامبير بوجود كثافة مصدر s في كل حجم بدائي محيط بالنقطة O التي اعتبرناها مبدأ حساب المسافة r.

لنرمز للتوضيح لوضع النقطة التي نحسب الحقل فيها بـ 1، لوضع النقطة التي اعتبرناها مصدراً بـ 2، بـ r_{12} للمسافة بين هاتين النقطتين ولحجم المصدر الكلي τ_2، الشكل.18؛ لنكتب العنصر التفاضلي للحقل في النقطة 1 والزمن t على الشكل

$$d\psi(1, t) = \frac{s(2, t - r_{12}/c)d\tau_2}{4\pi r_{12}}$$

وبالتوضيع

$$\psi(1, t) = \int_{\tau_2}\frac{s(2, t - r_{12}/c)}{4\pi r_{12}}d\tau_2 \qquad (4.19)$$



الشكل.18

وهكذا فإذا كان الحقل المقصود هو الكمون السلمي فإن $s = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ وإذا كان الكمون المتجهي فإن $s = \mu_0\vec{J}$ ويأخذ الكمون عندئذ على الترتيب الشكل

$$V(1, t) = \int_{\tau_2}\frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}d\tau_2 \qquad (4.20)$$

أو

$$\vec{A}(1,t) = \int_{\tau_2} \frac{\mu_0 \vec{J}(2, t - r_{12}/c)}{4\pi r_{12}} d\tau_2 \qquad (4.21)$$

ونحصل على الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ انطلاقاً من هاتين العلاقتين (من (3.9) و $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$). تبين هاتان العلاقتان أن الكمون في النقطة 1 ولحظة ما t ناشيء عن الشحنات التي كانت موجودة على مسافة تبعد عن 1 المسافة r_{12} في لحظة سابقة هي $t - r_{12}/c$. نصيغ هذه النتيجة على شكل قضية.

قضية 2 :

ليس مفعول الشحنات آنياً وإنما يحتاج إلى زمن هو المسافة مقسومة على سرعة الضوء كي تشعر به شحنة التجربة الموجودة في النقطة 1.

لقد وضع مفهوم انتشار الموجة الكهرطيسية بسرعة منتهية (وحدية) c نهاية لمفهوم التفاعل الآني أو التفاعل عن بعد السائد في الميكانيك النيوتوني.

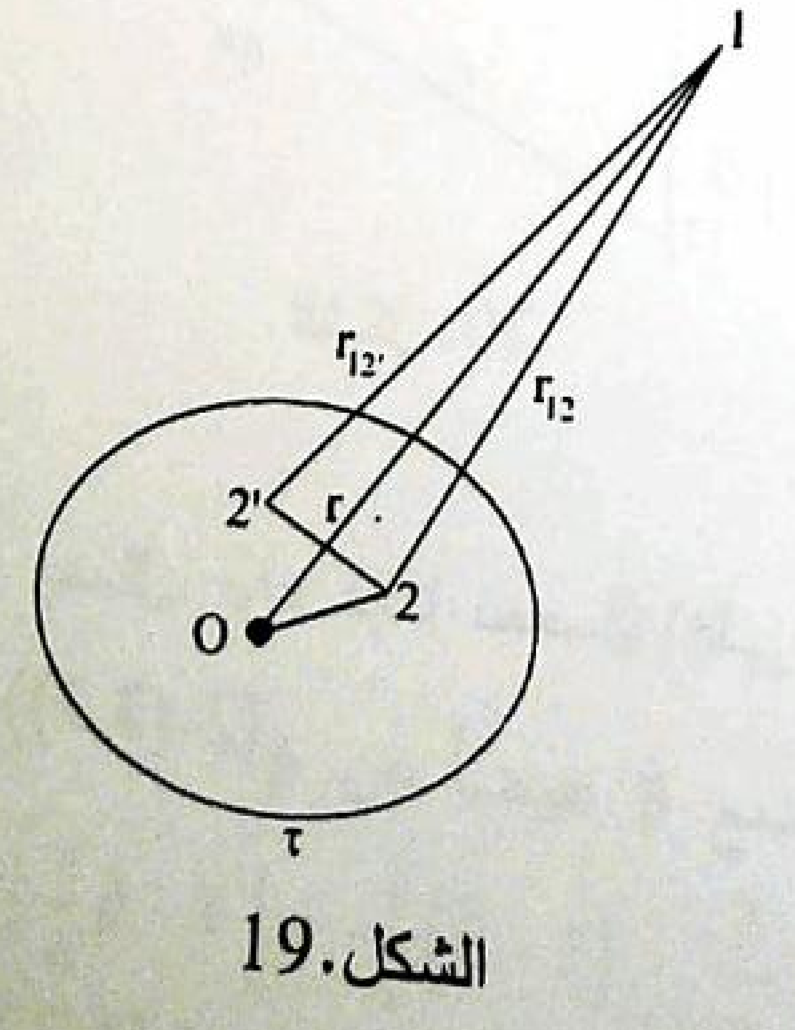
يسمى الكمون تحت إشارة التكامل في (4.20) و(4.21) بالكمون المؤخر.

نحصل عندما نأخذ الحل مع الانعكاس الزماني $g(x+ct)$ غير المقبول في نظرية الكهرطيسية كما نعرضها هنا، على كمون يسمى الكمون المسبق : نشعر بمفعوله قبل وقوعه !

ثنائي قطب هرتز :

لنعط مثالاً لحساب الحقلين الكهربائي والمغنطيسي الناتجين عن ثنائي قطب هزاز : اهتزاز شحنة q في جوار شحنة أخرى مساوية لها بالقيمة المطلقة نفرضها ثابتة، حركة الكترون في جوار ذرته المؤينة؛ لتكن d المسافة الفاصلة بين الشحنتين، نأخذ اتجاه حركة q كمحور Oz. سنفرض النقطة 1 التي نحسب الحقول فيها بعيدة بقدر كاف عن الشحنة q بحيث نستطيع إهمال اختلاف أبعادها r_{12} عن بعد وسطي r؛ $r_{12} \approx r_{12'} \cong r$، الشكل.19.

نخرج r_{12} الثابتة من تحت إشارة التكامل في (4.21).



الشكل.19

في حساب الزمن في الصورة في (4.21)، نهمل الزمن 2 و $2'$ سنهمل أيضاً الفرق بين أي وضعين $t-\frac{r}{c}$ مما يعني أننا $\vec{J}$ المأخوذ عندئذ في نفس اللحظة $\Delta t = (O2' - O2)/v$ في حساب كثافة التيار ويساوي لكثافة $\bar{J} = \vec{J}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ ننظر إلى v كمقدار صغير جداً أمام سرعة الضوء والحساب لانسبوي. الشحنة مضروباً بسرعتها $\vec{v}$، يصبح $\vec{A}$ في هذين التقريبين

$$\vec{A}(1,t) = \frac{\mu_0 \vec{v}}{4\pi r}\int \rho(t - r/c)d\tau$$

إن التكامل هو الشحنة الكلية q و $\vec{v}q$ هو مشتق عزم ثنائي القطب بالنسبة للزمن نرمز له بـ $\dot{p}$ في اللحظة $(t - r/c)$، اتجاهه Oz.

$$\vec{A} = (0, 0, A_z) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}(t - r/c) \qquad (4.22)$$

ومنه الحقل المغنطيسي

$$B_x(1,t) = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-y\frac{\dot{p}}{r^3} - \frac{y\ddot{p}}{cr^2}\right]_{t-\frac{r}{c}} \qquad (4.22)'$$

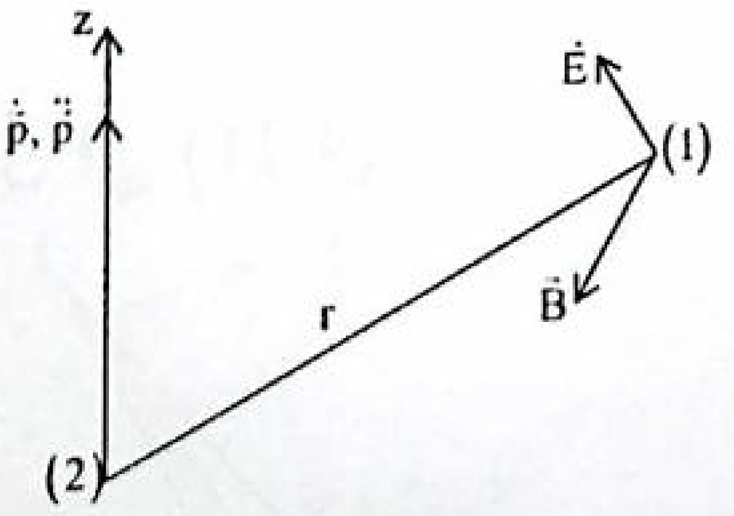
حيث $\ddot{p}$ هو المشتق الثاني لعزم ثنائي القطب بالنسبة للزمن والكل محسوب في اللحظة $t - r/c$، لحظة الكمون المؤخر كذلك

$$B_y(1,t) = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[x\frac{\dot{p}}{r^3} + \frac{x\ddot{p}}{cr^2}\right]_{t-\frac{r}{c}} \qquad (4.22)''$$

$$B_z = 0$$

نكتب $\vec{B}$ على شكل جداء متجهي لـ $\dot{\vec{p}}$ و $\ddot{\vec{p}}$ بـ $\vec{r} = (x, y, z)$، الشكل.20

$$\vec{B} = \frac{\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\dot{\vec{p}} + \frac{r}{c}\ddot{\vec{p}}\right)_{t-r/c} \times \vec{r}}{r^3} \qquad (4.23)$$



الشكل.20

عندما يكون r صغيراً بحيث يمكن إهمال r/c فإننا نحصل على $\vec{B}$ الآني، على الحقل المغنطيسي الراكد الذي يعطيه قانون بيو-سافار ((2.(3.7))

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3}$$

ذلك أن صغر r/c يسمح لنا بنشر (4.23) في جوار t

$$\dot{p}(t - r/c) = \dot{p}(t) - \frac{r}{c}\ddot{p}(t)$$

و

$$\ddot{p}(t - r/c) = \ddot{p}(t)$$

حيث نهمل اللامتناهي في الصغر من الدرجة الثانية بـ r/c وهكذا لا يبقى في (4.23) إلا $\dot{\vec{p}}(t)$.

لا نستطيع الاكتفاء بنفس التقريب في حساب الكمون السلمي V في (4.20) لأنه سيعطينا الكمون السلمي الراكد $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int \rho d\tau$ ، ولابد إذاً من حساب الفروق من الدرجة الثانية لـ $\Delta r = r - r_{12} \neq 0$.

لعل الأفضل هو استعمال شرط لورانتس (3.11). لدينا كما في '(4.22)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{-z\dot{p}}{r^3} - \frac{z\,\ddot{p}}{cr^2}\right]_{t-\frac{r}{c}}$$

وبما أن $\dot{p}$ و $\ddot{p}$ في اتجاه المحور Oz و $\vec{r}(x, y, z)$ فإن

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\dot{\vec{p}} + \frac{r}{c}\ddot{\vec{p}}\right) \cdot \vec{r} \qquad (4.24)$$

وهو يساوي $-\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}$ حسب شرط لورانتس، ($\mu_0 = \frac{1}{c^2\varepsilon_0}$)، ومنه

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\vec{p} + \frac{r}{c}\dot{\vec{p}}\right] \cdot \vec{r} \qquad (4.25)$$

حيث أهملنا ثابتة التكامل المقابلة لكمون حقل كهربائي راكد في حال وجود شحنات ثابتة. ولدينا أخيراً من (3.9)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

لا ينطوي الحساب على طوله على أي صعوبة تذكر إذا ما لاحظنا أن اشتقاق عزم ثنائي القطب بالنسبة للإحداثيات هو عبر المتغير $t - r/c$؛ وهكذا فإن مركبات غراديان $\vec{p} \cdot \vec{r}$ على سبيل المثال هي، نظراً لأن $\vec{\nabla}r = \frac{\vec{r}}{r}$ ،

$$\vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{r})_x = -\frac{\dot{p}x^2}{cr} + p_x$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

و

$$\vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{r}) = -\frac{(\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r})\vec{r}}{cr} + \vec{p} \qquad (1)$$

كذلك، بأخذ (1) بعين الاعتبار ووضع $\dot{\vec{p}}$ عوضاً عن $\vec{p}$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{r}{c}\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}\right) = -\frac{r}{c}(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \cdot \frac{\vec{r}}{cr} + \frac{r}{c}\dot{\vec{p}} + \frac{\vec{r}}{cr}(\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \qquad (2)$$

وغراديان المجموع مضروباً بـ r^{-3} مضافاً إليه جداءه بـ $\vec{\nabla}r^{-3}$ هو

$$-3r^{-5}\left(\vec{p}\cdot\vec{r}+\frac{r}{c}\dot{\vec{p}}\cdot\vec{r}\right)\vec{r}+\frac{1}{r^3}(1+2)$$

والحد $\vec{\nabla}V$- في الحقل الكهربائي هو

$$(3)\qquad -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\vec{p}+\frac{r}{c}\dot{\vec{p}}-\frac{3\left(\vec{p}\cdot\vec{r}+\frac{r}{c}\dot{\vec{p}}\cdot\vec{r}\right)\vec{r}}{r^2}-\frac{\left(\ddot{\vec{p}}\cdot\vec{r}\right)\vec{r}}{c^2}\right]_{t-\frac{r}{c}}$$

نكتب مشتق الكمون المتجهي (4.22) على الشكل

$$(4)\qquad \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left.\frac{\ddot{\vec{p}}}{r}\right|_{t-\frac{r}{c}}=\frac{\ddot{\vec{p}}r^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}$$

يدخل هذا الحد مع إشارة + بين المعقوفتين في 3 ونكتب $\ddot{\vec{p}}(\vec{r}\cdot\vec{r})-(\ddot{\vec{p}}\cdot\vec{r})\vec{r}$ على شكل جداء متجهي مزدوج لنحصل على الشكل التالي لـ $\vec{E}$

$$(4.26)\qquad \vec{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\left(\vec{p}+\frac{r}{c}\dot{\vec{p}}\right)-\frac{3\left(\vec{p}\cdot\vec{r}+\frac{r}{c}\dot{\vec{p}}\cdot\vec{r}\right)\vec{r}}{r^2}+\frac{1}{c^2}\left(\ddot{\vec{p}}\times\vec{r}\right)\times\vec{r}\right]_{t-\frac{r}{c}}$$

لنلاحظ أن $\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{r}{c}\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)$ هو تقريب لعزم ثنائي قطب محسوب في اللحظة t، التي نقيس فيها الحقل $\vec{E}$: $\vec{p}(t)=\vec{p}\left(X+\frac{r}{c}\right)=\vec{p}(X)+\frac{r}{c}\dot{\vec{p}}(X)$ حيث $X=t-\frac{r}{c}$. رأينا من جهة أخرى، العلاقة الأولى في ((1.(3.10)، أن مركبتي الحقل الكهربائي في اتجاه العزم لثنائي القطب الراكد – المحسوب في ذات اللحظة – هما الحدان الأولان في (4.26)؛ وهكذا فإن الموجة الكهرطيسية، $\vec{E}$، متناسبة مع تسارع الشحنة والحد المعبر عنها المتناسب مع $\frac{1}{r}$ هو الطاغي من أجل المسافات الكبيرة r بالنسبة للحدين الراكدين المتناسبين مع $\frac{1}{r^3}$ و $\frac{1}{r^5}$ لا يبقى إذاً إلا الحدين المتناسبين مع $\ddot{p}$، الحقل الكهربائي عمودي على $\vec{r}$ في المستوى $(\vec{p},\vec{r})$، طويلته

$$(4.26)'\qquad \left|\vec{E}\right|=\left|\vec{E}_0\right|=\frac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\ddot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

والمغنطيسي عمودي على المستوي،

$$(4.23)'\qquad \left|\vec{B}\right|=\left|B_\perp\right|=\frac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 cr}\ddot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)=\frac{1}{c}|E|$$

ومنه

<u>قضية 3</u> :

تصدر الشحنات المتسارعة إشعاعاً يفقدها جزءاً من طاقتها.

لقد بنينا الميكانيك الكمومي في المجلد الرابع على دحض مفهوم المسار الذي يعتمده الميكانيك النيوتوني. وأخذنا كمثال على ذلك حركة الإلكترون حول البروتون في ذرة الهدروجين؛ فلو كانت هذه الحركة مماثلة لحركة كوكب حول الشمس وكان مسار الإلكترون قطعاً ناقصاً لتسارع الإلكترون حسب قانون كبلر الثاني فاقداً جزءاً من طاقته على شكل إشعاع في كل دورة ولانتهى الأمر به إلى الوقوع على البروتون جاعلاً من ذرة الهدروجين ذرة غير مستقرة، خلافاً لما هي عليه في الواقع.

5.4- الكمون الناتج عن شحنات متحركة : الحل العام لـ ليناردـفيشرت Liénard-Wiechert

لتكن لدينا شحنة q، أبعادها صغيرة وتحتل حجماً $\Delta\tau = \Delta X \Delta Y \Delta Z$، مكعباً على سبيل المثال، تتحرك بسرعة ما v في اتجاه المحور Oz. لن نفرض السرعة صغيرة أمام سرعة الضوء، كما في المثال السابق، بل ما من مانع من اقترابها من سرعة الضوء. نريد حساب الكمون الناتج عنها في اللحظة t وفي نقطة P تبعد عنها مسافة كبيرة جداً بالنسبة لأبعادها، لتكن NM، N_1M_1، N_2M_2 أوضاع ΔZ في اللحظات $t > t_1 > t_2$ على الترتيب. نعين وضع P بالنسبة لـ M_1 بـ R_1 ونفرض، مهملين $\Delta Z \ll R$، أنه ذاته بالنسبة لـ N_1؛

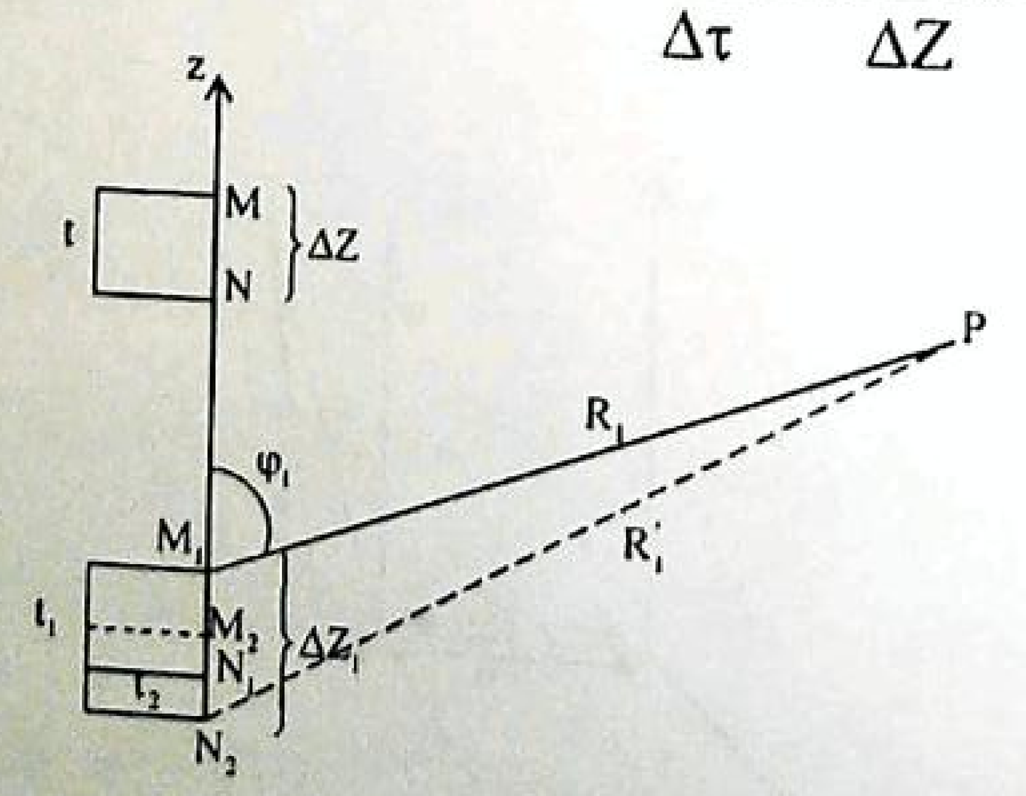
$$M_1P = R_1 = c(t - t_1) \tag{4.27}$$

لننظر إلى الشرط الذي يجب أن تحققه النقطة N_2 في اللحظة t_2 لكي تصل إلى P في اللحظة t، الشكل.21.

$$R_1' = c(t - t_2) \tag{4.28}$$

فإذا تحقق هذا فإن كل الحجم $\Delta X \Delta Y \Delta Z_1 = \Delta\tau_1$ يحل محل $\Delta X \Delta Y \Delta Z$ في حساب الشحنة أي أننا أضفنا لـ ΔZ الطول $N_2N_1 = M_2M_1 = v(t_1 - t_2)$:

$$\frac{\Delta\tau_1}{\Delta\tau} = \frac{\Delta Z_1}{\Delta Z} = \frac{\Delta Z + v(t_1 - t_2)}{\Delta Z} \tag{4.29}$$



الشكل.21

لدينا من (4.27) و(4.28) والشكل

$$t_1 - t_2 = \frac{R'_1 - R_1}{c} = \frac{\Delta Z_1 \cos\varphi_1}{c}$$

و $$\frac{\Delta Z_1}{\Delta Z} = 1 + \frac{v}{c}\frac{\Delta Z_1}{\Delta Z}\cos\varphi_1$$

نبدل في (4.29) فنجد

$$\frac{\Delta Z_1}{\Delta Z}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi_1\right) = 1$$

وهكذا $\Delta\tau_1$ ، t_1 في اللحظة t_1 إنما هي بكثافة الشحنة في النقطة P في الشحنة q وهكذا فالكمون الذي تنتجه الشحنة q في النقطة P إنما هي بكثافة الشحنة في اللحظة t_1 ، $\Delta\tau_1$

فالكمون السلمي هو

$$V(t) = \frac{\rho\Delta\tau_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{\rho\Delta\tau\frac{\Delta Z_1}{\Delta Z}}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{\rho\Delta\tau}{4\pi\varepsilon_0 R_1\left(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi_1\right)}$$

نكتب هذا الكمون بدليل المتجهتين $\vec{v}$ و $\vec{R}_1$ في اللحظة $t_1 = t - \frac{R_1}{c}$ على الشكل

$$V(t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left[\left(R_1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{R}_1}{c}\right)\right]_{t-\frac{R_1}{c}}} \tag{4.30}$$

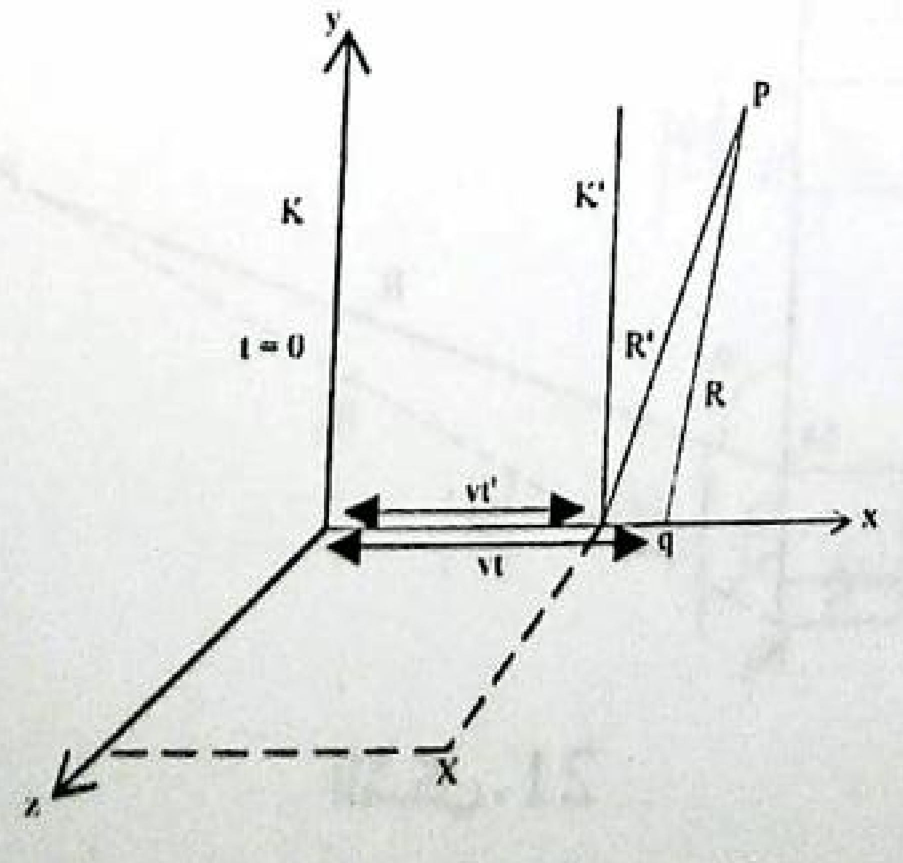
ولدينا علاقة مماثلة من أجل الكمون المتجهي

$$\vec{A}(t) = \frac{q\vec{v}}{4\pi\varepsilon_0 c^2\left[\left(R_1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{R}_1}{c}\right)\right]_{t-\frac{R_1}{c}}} \tag{4.31}$$

إنهما كمونان لينارد–فيشرت؛ نستخلص منهما الحقلين الكهربائي والمغنطيسي بالطريقة المعتادة (3.9) و $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

نطبق العلاقة (4.30) لحساب الكمون الناتج عن شحنة نقطية تسير بسرعة منتظمة v على مستقيم، نأخذه كمحور Ox ، في نقطة ما P إحداثياتها x, y, z .

ليكن R' بعد الشحنة عن P في اللحظة t' و R بعدها في اللحظة اللاحقة t. فاصلة R' هي X = vt' ، الشكل.22.



الشكل.22

لدينا

$$R' = \sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2} \qquad (1)$$

والزمن المؤخر t' معرف بـ

$$t' = t - \frac{R'}{c} \qquad (2)$$

أو

$$R'^2 = c^2(t - t')^2 \qquad (2)'$$

نربع (1) ونضع '(2) في الطرف الأيسر فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية بـ t'، نأخذ المميز مع إشارة - لأن $t' < t$ فنجد

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t' = t - \frac{vx}{c^2} - \frac{1}{c}\sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)} \qquad (4.32)$$

نضع مخرج العلاقة (4.30) بدليل (2)

$$R' - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}'}{c} = c(t - t') - \frac{v(x - vt')}{c} = c\left[t - \frac{vx}{c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t'\right]$$

وبتبديل $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t'$ بالقيمة المعطاة في (4.32)، نرى من (4.30) أن

$$V(t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}}$$

أو بإخراج $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ من تحت إشارة الجذر

$$V(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left(\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 + (y^2 + z^2)\right)^{1/2}} \qquad (4.33)$$

تعود النسبية الخاصة إلى الظهور في كمون ليناردـفيشرت، رغم أننا لم نستعمل لإثباته أي أداة من أدوات النسبية الخاصة. صحيح أن ΔZ في اللحظة t أقصر من ΔZ_1 في اللحظة t_1 مما يذكر بتقلص لورانتس في النسبية الخاصة ولكن (4.33) تنتج عن النسبية الخاصة مباشرة : قلنا إن $\left(\frac{V}{c}, \vec{A}\right)$ متجهة رباعية في فضاء مينكوفسكي وأعطينا في (((4.13).7).I) علاقات تغيرها عند الانتقال من مقرن غاليلي K إلى مقرن آخر K' يتحرك بالنسبة له بسرعة مستقيمة منتظمة (وبالعكس من K' إلى K إذ يكفي تغير اتجاه السرعة) وجدنا أن

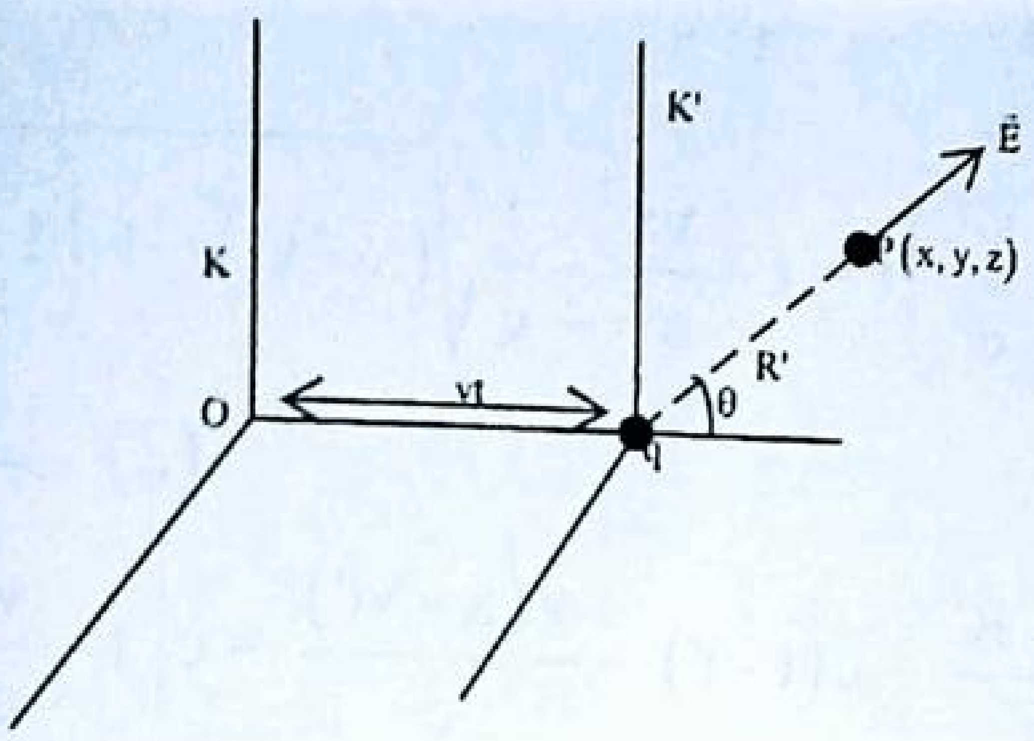
$$V' = \frac{V - vA'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

والعكس طبعاً هو

$$V = \frac{V' + vA''}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

إن الكمون السلمي V' في المقرن K' المرتبط بالشحنة، أي حيث الشحنة ثابتة، الشكل.23، هو

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R'}$$



الشكل.23

ومن جهة أخرى نعرف من (((I.(7.(2.17)')) أن المركبة x' الواقعة في اتجاه حركة K' بالنسبة لـ K هي

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

في حين تبقى المركبتان y' و z' ثابتتين $y' = y$ و $z' = z$.

أما الكمون المتجهي فهو معدوم لانعدام التيار ومركبته $A'' = 0$ وهكذا فإن V هو المعطى بـ (4.33)

$$V = \frac{V'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 + (y^2 + z^2) \right)^{1/2}}$$

ولدينا من أجل الكمون المتجهي في K (4.34)

$$A_x = \frac{qv}{4\pi\varepsilon_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 + (y^2 + z^2) \right)^{1/2}}$$

$$A_y = A_z = 0$$

نحسب من (4.34) الحقلين الكهربائي والمغنطيسي لنجد أن

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{x-vt}{\left[\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} \tag{4.35}$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{y}{\left[\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} \tag{4.36}$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{z}{\left[\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} \tag{4.37}$$

لنلاحظ في حساب $\vec{B}$، من (4.34) أن

$$A_x = \frac{v}{c^2}V \tag{4.38}$$

أي أن

$$B_x = 0$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{v}{c^2}\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{v}{c^2}E_z$$

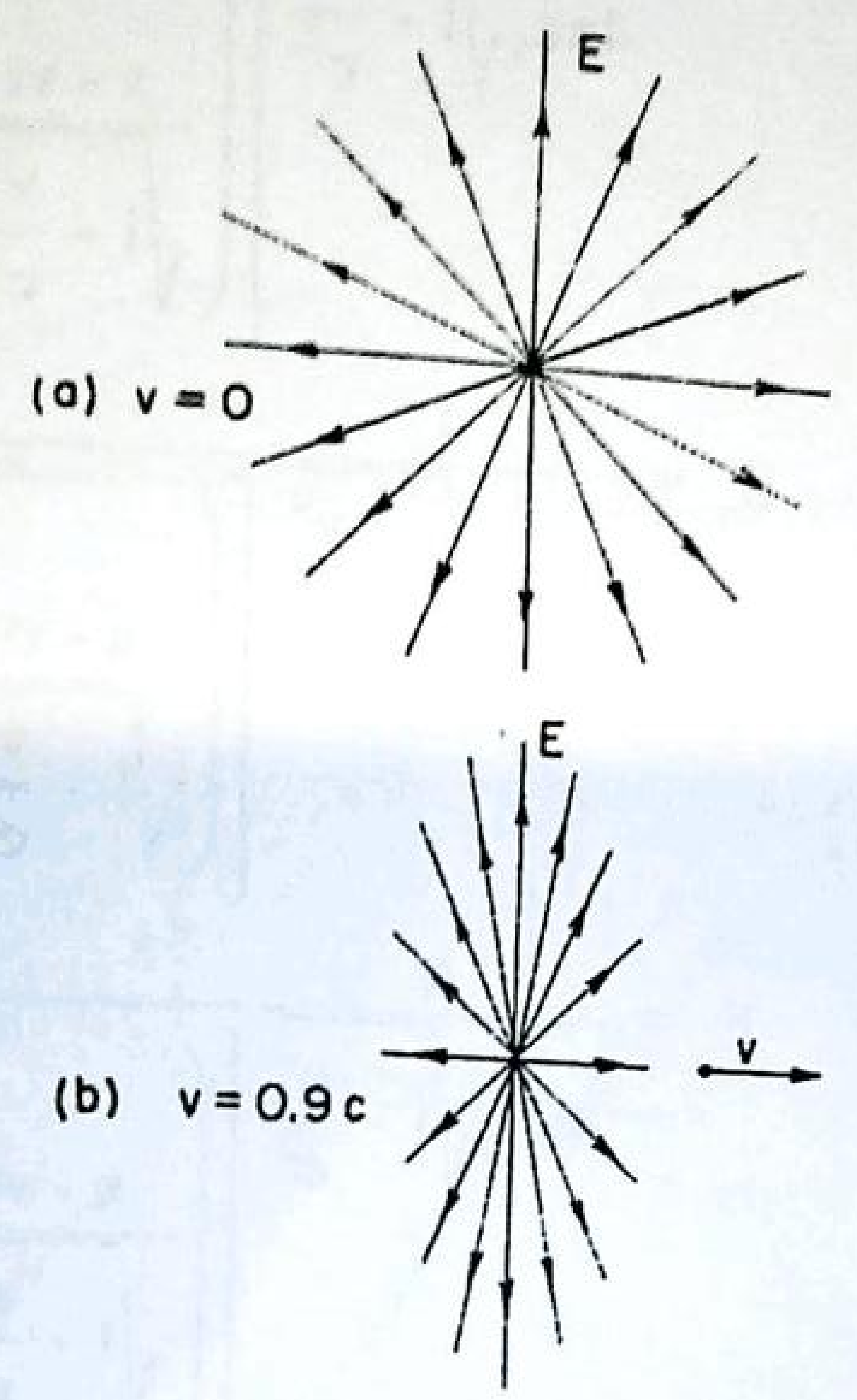
$$B_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y} = -\frac{v}{c^2}\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{v^2}{c^2}E_y$$

تتيح لنا هذه العلاقات كتابة المتجهة $\vec{B}$ على شكل جداء متجهي $\vec{v} = (v_x, 0, 0)$:

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E} \tag{4.39}$$

تبين قيم مركبات $\vec{E}$ أنه على استقامة qP، وضع النقطة P بالنسبة لوضع الشحنة في اللحظة t؛ P نقطة لا على التعيين. وهكذا فإن خطوط الحقل الكهربائي تنطلق من الشحنة q المتحركة على غرار ما تفعله عندما تكون ثابتة. يكمن الفرق بين الحالتين في شدة الحقل في اتجاه الحركة إذ "يتقلص" البعد x بالمقدار $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ويضعف بالتالي الحقل في هذا الاتجاه، بالنسبة للاتجاهين الآخرين؛ ولما كنا قد تعارفنا على الرمز لشدة الحقل بعدد الخطوط التي تمثله فستبدو الخطوط متباعدة في اتجاه Ox لتتجمع

في الاتجاهين الآخرين، الشكل.24، حيث يمثل الشكل a الحقل الكولومبي و b الحقل من أجل شحنة سريعة جداً $v = 0{,}9c$



الشكل.24

نرى من (4.36)، (4.37) أن شدة الحقل عندما يكون في المستوي yz هي

$$\sqrt{E_y^2 + E_z^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{1}{y^2 + z^2}$$

بينما تساوي في اتجاه Ox، $y = z = 0$ حسب (4.35)

$$E_x = \frac{q\left(1 - v^2/c^2\right)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(x - vt)^2}$$

فالحقل في الاتجاه العمودي على Ox متناسب مع $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\left(y^2 + z^2\right)}$ كالحقل الكولومبي، ولكنه أكبر من الحقل الكولومبي نظراً لوجود المقدار $\sqrt{1 - v^2/c^2}$، الأصغر من الواحد في المخرج؛ أما في الاتجاه Ox فالحقل متناسب مع $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0(x - vt)^2}$ كالحقل الكولومبي (بعد النقطة P عن q هو $x - vt$) ولكنه أقل منه بالمقدار $1 - v^2/c^2$ الموجود في الصورة والصغير جداً عندما تقترب سرعة الشحنة من سرعة الضوء.

5. الطاقة والكتلة الذاتية

1.5- كثافة الطاقة وتدفقها

تفقد الشحنات المتحركة بسبب إشعاعها جزءاً من طاقتها هي طاقة الموجة الكهرطيسية التي تصدرها، طاقة الفوتونات التي تحملها؛ نعلم على سبيل المثال أن الشمس تفقد جزءاً من طاقتها – المتجددة، ولكن هذا موضوع آخر – على شكل حرارة يتلقاها سطح الأرض وأن كل الطاقات التي نعرفها ماعدا النووية منها هي تحويل لطاقة الإشعاع هذه. نعلم من جهة أخرى أن انحفاظ الطاقة، طاقة الكون ككل، مبدأ أساسي في الفيزياء ناتج عن تصورنا لخواص المكان–الزمان، عن تجانس الزمان تحديداً. والسؤال المطروح الآن هو هل يمكن التعبير عن هذا المبدأ موضعياً ؟ هل توجد معادلة اتصالية تبين أن تغير كمية الطاقة الكهرطيسية مع الزمن، تغير كثافة الطاقة يساوي تماماً للطاقة التي تمر عبر هذا الحجم في واحدة الزمن ما يخرج من الحجم منقوصاً بما يدخل إليه ؟ أو بكلمة أخرى هل نستطيع تحديد تدفق للطاقة على غرار تدفق الشحنة الذي يحدد انحفاظ كمية الشحنة موضعياً ؟ لنرمز لكثافة الطاقة (الطاقة في واحدة الحجوم) بـ u ولتدفقها بـ $\vec{S}$ ولمعادلة الانحفاظ الموضعية، لمعادلة الاتصالية بـ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 \tag{5.1}$$

هذا في حال الفضاء الخاوي، أما في حال وجود المادة في واحدة الحجوم فإن الحقل الكهرطيسي $(\vec{E}, \vec{B})$ يعمل في شحنات هذه المادة وعمله في واحدة الزمن هو

$$\frac{d\mathscr{C}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \rho\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v}$$

حيث ρ كثافة المادة. إن الحقل الكهربائي هو الوحيد الذي يعمل نظراً لانعدام الجداء المختلط و

$$\frac{d\mathscr{C}}{dt} = \rho\vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{J} \cdot \vec{E} \tag{5.2}$$

قد يكون هذا العمل موجباً أو سالباً ولذا نكتب معادلة الاتصالية بوجود المادة على الشكل

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 \tag{5.3}$$

نكتب $\vec{E} \cdot \vec{J}$ حسب معادلة ماكسويل الرابعة $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ؛ $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = \vec{E}\left(\varepsilon_0 c^2\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \tag{5.4}$$

نحول الحد الأول من الطرف الثاني بأن نتحقق من المتطابقة

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{E}\right) = \vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) - \vec{B}\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \tag{5.5}$$

يكفي أن نكتب مركبات الطرف الأيسر، فالمركبة الأولى هي

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(B_yE_z - B_zE_y\right) = \frac{\partial B_y}{\partial x}E_z - \frac{\partial B_z}{\partial x}E_y + B_y\frac{\partial E_z}{\partial x} - B_z\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

وأن نجمع ونرتب مختلف الحدود حسب مركبات $\vec{E}$ و $\vec{B}$ لنجد على الترتيب المركبات

$$\left(\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{E}\right)_{x,y,z} - \left(\vec{B} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)\right)_{x,y,z}$$

ثم إن $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ حسب معادلة ماكسويل الثانية أي أن تبديل $\vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)$ بقيمتها في المتطابقة (5.4)

وأخذ معادلة ماكسويل الثانية بعين الاعتبار يعطينا في

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = \varepsilon_0 c^2\left[\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{E}\right) - \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right] - \varepsilon_0\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$= \varepsilon_0 c^2\, \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{E}\right) - \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\frac{\partial B^2}{\partial t} - \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial t}$$

نرى عندما نضع هذا المقدار في معادلة الاتصالية (5.3) أن المشتق بالنسبة للزمن هو مشتق كثافة الطاقة وأن تدفق الطاقة هو

$$\vec{S} = \varepsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} \qquad (5.6)$$

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}B^2 \qquad (5.7)$$

يطلق على المتجهة $\vec{S}$، على تدفق الطاقة اسم متجهة بوينتنغ Pointing، اسم مكتشفها وهي متجهة عمودية على $\vec{E}$ و $\vec{B}$ وتتجه في حالة الموجات المستوية في اتجاه انتشار الموجة وبما أن $|B| = \frac{E}{c}$ فإن الطاقة التي تعبر واحدة السطوح في واحدة الزمن هي

$$S = \varepsilon_0 c E^2 \qquad (5.8)$$
$$= cu$$

كتبنا الحقل الكهربائي للموجة المستوية على شكل دوري بـ T و λ : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ وهكذا فالطاقة التي تعبر واحدة السطوح في واحدة الزمن متناسبة مع مربع سعة الموجة $|E_0|^2$ الثابت وتسمى عندئذ، في حالة الضوء، شدة الضوء.

أما الطاقة ذاتها فإنها مجموع طاقتي الحقلين الكهربائي والمغنطيسي مثيلتي الحالة الراكدة. وهكذا نكون قد أجبنا على السؤال المطروح عن إمكانية التعبير موضعياً عن انحفاظ الطاقة بإعطاء كثافتها وتدفقها. قد تبدو الطريقة التي اتبعناها للحصول على التباعد $\vec{\nabla}$. ومقابلته بتباعد $\vec{S}$ اصطناعية إلى حد ما، وهي كذلك وليست بالتالي الطريقة الوحيدة. تعطي طرق أخرى نتائج مختلفة بأن تدخل في الحساب المشتقات من الدرجة الثانية أو مربع المشتقات من الدرجة الأولى ولا يتميز المقداران (5.6) و(5.7) اللذان حصلنا عليهما عن المقادير الأخرى التي تعطيها الطرق الأخرى سوى ببساطتهما. يمكننا اعتبار عدم تعارضهما مع النتائج التجريبية معياراً لصحتهما؛ مع أنه لا توجد طريقة تجريبية لتعيين كثافة الطاقة الكهرطيسية.

يمكن تصور هذه الطريقة في إطار النسبية العامة – نظرية التثاقل لآنشتاين – فهي تبين أن الطاقة مصدر للتجاذب التثاقلي، وانعطاف الأشعة الضوئية عند اقترابها من الشمس برهان على ذلك. يجب بالتالي معرفة كثافة الطاقة بدقة لتحديد الانعطاف الناتج عن القوى التثاقلية.

2.5– تدفق الطاقة والاندفاع

كتبنا في النسبية الخاصة المتجهة رباعية الأبعاد، الطاقة – الاندفاع، ذات الطويلة الثابتة لجسم ما $\left(\frac{U}{c}, \vec{p}\right)$ على الشكل (I.(7.(§3.3))

$$U = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2)$$

طويلتها

$$\frac{U^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2c^2 \qquad (3)$$

(وضعنا هنا U عوضاً عن E في دروس النسبية).

ليكن لدينا عدد من الجسيمات كثافتها (عددها في واحدة الحجوم) n، ولنحسب تدفق الطاقة عبر واحدة السطوح العمودية على اتجاه سرعة الجسيمات $\vec{v}$، إنها نظراً لـ (1)

$$n\vec{v}U = \frac{nc^2m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \vec{S} \qquad (5.9)$$

نرى بالمقارنة مع (2) أن هذا التدفق يساوي لـ $c^2n\vec{p}$، لكثافة الاندفاع مضروبة بـ c^2 ولدينا :

<u>قضية 4</u> :

إن كثافة الاندفاع في النسبية الخاصة تساوي لتدفق الطاقة مقسومة على c^2

$$n\vec{p} = \frac{\vec{S}}{c^2} \qquad (5.10)$$

قلنا إن جسيم الموجة الكهرطيسية هو الفوتون، كتلته تساوي الصفر حتى يكون لطاقته في (1) معنى وبالتالي فإن اندفاعه حسب (3) هو طاقته مقسومة على سرعة الضوء

$$|\bar{p}| = \frac{U}{c} \qquad (5.11)$$

لنحصل في الطرف الثاني على كثافة (عدد الفوتونات في واحدة الحجوم) n نضرب طرفي هذه العلاقة بـ

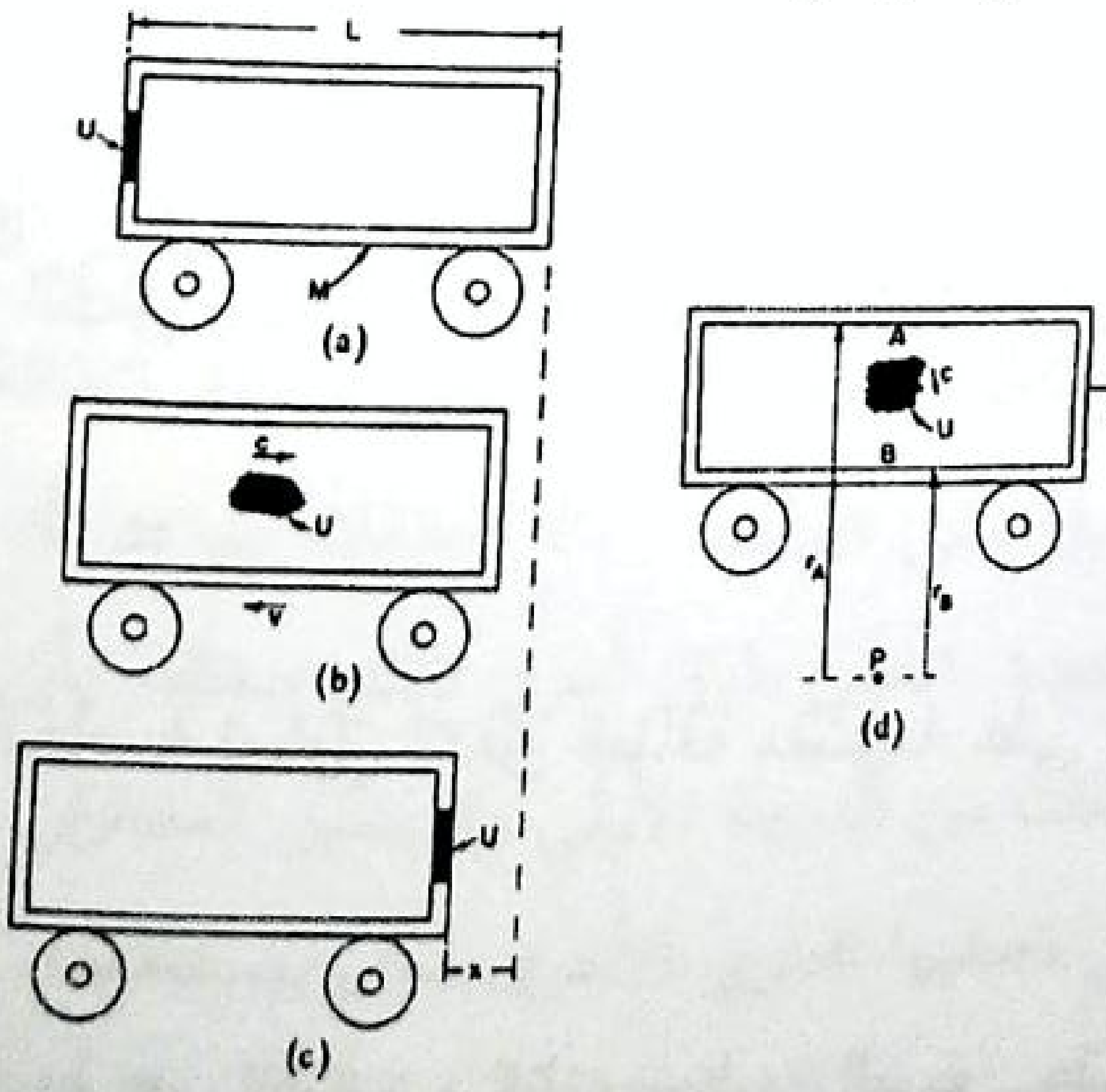
الطاقة $\frac{u}{c}$

$$n|\bar{p}| = \frac{u}{c} = \frac{S}{c^2}$$

نتحقق حسب العلاقة (5.8) من توازم متجهة بوينتنغ مع العلاقة العامة التي تربط بين كثافة الاندفاع وتدفق الطاقة.

لقد كتبنا (5.8) في حالة الموجات المستوية، لكن الموجة المستوية هي تقريب لأي سطح موجة في لحظة ما بالمستوى المماس لهذا السطح وبناظمه الذي يعين اتجاه انتشار الموجة في نقطة التماس : بعبارة أخرى إن كل نقطة من نقاط سطح الموجة هي في واقع الأمر منبع نقطي يصدر موجة جديدة وهذا ما يجعل الموجة الكهرطيسية تشع في كل الاتجاهات. هذا هو محتوى مبدأ هويغنز فيما يخص الضوء.

لجأ آنشتاين إلى وسيلة الإيضاح التالية لتبيان تأثير اندفاع الموجة الكهرطيسية وهي وسيلة تصح على أي طاقة في واقع الأمر. لنتصور عربة قطار ثابتة على خط السكة الحديدية وكمية من الطاقة تنتقل من طرف العربة الأيسر إلى الأيمن حيث تتوقف : ومضات ضوئية في حالة الكهرطيسية على سبيل المثال، الشكل.25. وبما أن الطاقة تساوي كتلة حسب علاقته الشهيرة فمعنى ذلك أن مركز كتلة العربة قد انزاح من وسط العربة نحو اليمين بدون تأثير قوة خارجية وهو أمر مستحيل، كما أنه من المستحيل تغير العزم الزاوي إذا تصورنا أن الطاقة تنتقل من سقف العربة المتحركة بسرعة $\bar{V}$ إلى أرضها، من A إلى B ، الشكل.25d، $u\overline{OA} \times \bar{V} \neq u\overline{OB} \times \bar{V}$. إن وجود الاندفاع هو الذي يبقي مركز الكتلة ثابتاً في نهاية المطاف ولكنه يجعل العربة تندفع نحو الوراء عندما تنتقل الطاقة من يسار العربة نحو يمينها، الشكل.25b، وإلى الأمام عندما تصطدم بحائط العربة الأيمن، هذا في المثال الأول، وهو الذي ينقذ مبدأ انحفاظ العزم الزاوي في المثال الثاني. ليكن L طول العربة و M كتلتها، ولتكن U الطاقة المنتقلة من الطرف الأيسر نحو الأيمن.



الشكل.25

يرجع القطار إلى الوراء بمقدار x باندفاع p معاكس لاندفاع الطاقة عند بدء الانتقال وينعدم اندفاع الطاقة عند اصطدامها بالطرف الأيمن. لدينا إذاً

$$Mx = \frac{U}{c^2} L$$

حيث $\frac{U}{c^2}$ كتلة الطاقة حسب علاقة آنشتاين. يرجع القطار إلى الوراء باندفاع $\vec{p}$ سنرى أنه اندفاع الطاقة (اندفاع الفوتونات) وتدوم حركته الزمن اللازم لوصول الطاقة (الكهرطيسية) إلى الطرف الأيمن $t = \frac{L}{c}$

أي أن

$$x = vt = \frac{|\vec{p}|}{M} \frac{L}{c}$$

ومنه

$$p = \frac{U}{c}$$

وهي العلاقة (5.11).

يلعب اندفاع الفوتونات (ضغطها) دوراً أساسياً في بنية الشمس وغيرها من النجوم اللامعة. إن ما يحدد هذه البنية هو التوازن بين ضغط الفوتونات وضغط الغاز الترموديناميكي. ويفسر كذلك بقاء الجسيمات المضيئة في الهالة التاجية المحيطة بالشمس. وانتشار أذناب النجوم المذنبة في اتجاه معاكس للشمس.

3.5- شحنة الإلكترون وكتلته

اعتبرنا في مطلع هذه الدروس الكهرطيسية، على النحو الذي صاغه ماكسويل للظواهر الكهربائية والمغنطيسية، مثالاً يحتذى لجمع النتائج التجريبية لظواهر متنوعة لا تربطها صلة مباشرة بعضها ببعض – الكهرباء والضوء مثلاً – في إطار نظري جامع شامل يفسرها، يتنبأ بظواهر جديدة ويفتح المجال أمام تصورات ومفاهيم لم تكن لتوجد بدونه، نقصد بذلك النسبية الخاصة. لكن هذا الوضع المثالي ونجاح الكهرطيسية العلمي والتكنولوجي لا يعني اتساقها التام، أي خلوها من تناقضات يقع على عاتق النظريات القادمة التخلص منها، كما لا يعني حلها لكل المشاكل المطروحة ولذا يمكن عنونة هذا الرقم : ما بعد الكهرطيسية.

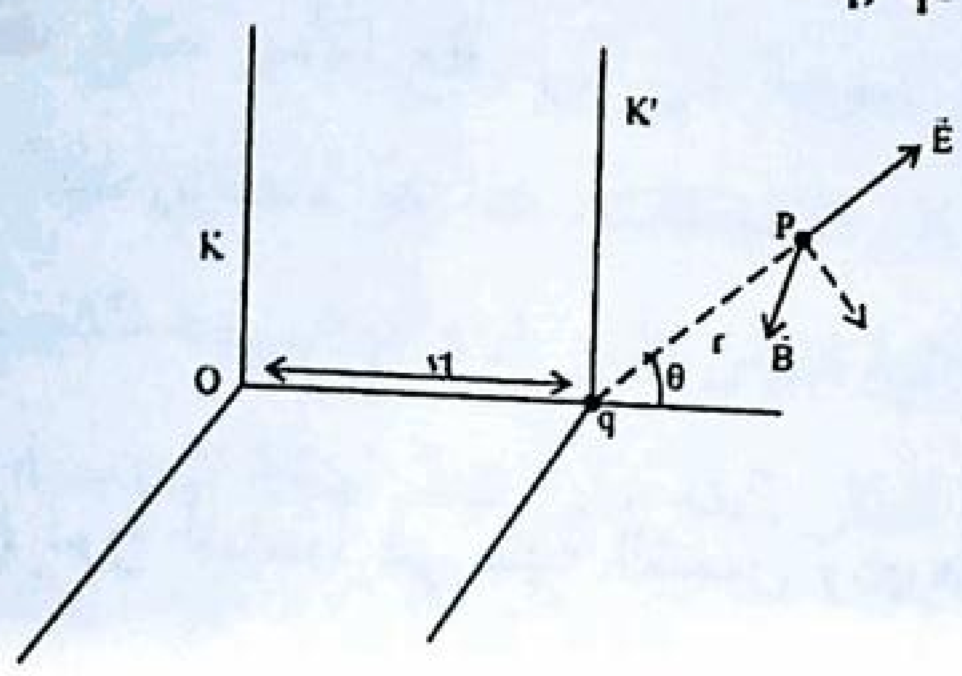
رأينا في الكهربائية الراكدة أن كمون الشحنة النقطية غير منته ونرى هنا أيضاً عندما نكامل كثافة طاقة شحنة راكدة $(\vec{B} = 0)$، شدة حقلها $|\vec{E}| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ على كل الفضاء، حسب (5.7)

$$U = \int u d\bar{r} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_a^{\infty} |E|^2 \, 4\pi r^2 dr$$

حسبنا عنصر الحجم بالإحداثيات الكروية (r, θ, φ) وكاملنا على φ و θ، يبقى التكامل على r حيث وضعنا a نصف قطر الشحنة، نجد

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \quad (5.12)$$

وهي طاقة لامنتهية عندما نجعل نصف القطر a يتناهى نحو الصفر لتصبح الشحنة نقطية. إن الفيزياء قياس ورصد ولا معنى لقياس أو رصد مقادير لامتناهية في الكبر، فطاقة لامتناهية ليست بالأمر الخطير إن لم يكن لها مفعول رصود، تغيراتها نتيجة حركة الشحنة مثلاً. فلنحسب اندفاعها إذاً انطلاقاً من حساب كثافة طاقة الشحنة المتحركة بسرعة $\vec{v}$ في المقرن K' المرتبط بالشحنة. رأينا أن $\vec{E}$ واقع في اتجاه qP، حيث P النقطة التي نحسب (نرصد) الحقل فيها، الشكل.26، و $\vec{B}$ عمودي عليه ويساوي $\frac{vE\sin\theta}{c^2}$ حسب (4.39) $\theta = \widehat{Oq, qP}$.



الشكل.26

إن طويلة متجهة بوينتنغ هي

$$S = \varepsilon_0 v E^2 \sin\theta$$

وكثافة الطاقة هي

$$u = \frac{S}{c}$$

وكثافة الاندفاع العمودية على $\vec{E}$ و $\vec{B}$ $\quad \vec{p} = \frac{\vec{S}}{c^2}$

$$p = \frac{S}{c^2} = \frac{\varepsilon_0 v}{c^2}E^2\sin\theta$$

ومسقط $\vec{p}$ على اتجاه الحركة هو $\frac{\varepsilon_0 v}{c^2}E^2\sin^2\theta$.

نحسب كما فعلنا في حالة الطاقة الاندفاع الكلي بمكاملة هذه العلاقة على كل الفضاء في الإحداثيات الكروية $d\vec{r} = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta dr$، ونعوض E بقيمته في النقطة P من المقرن K' $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ مهملين، في (4.35) وما بعدها سرعة الشحنة أمام سرعة الضوء $v \ll c$ لنجد بعد التكامل على θ

$$-\int_{\pi}^{0}\sin^3\theta d\theta = \int_{\pi}^{0}\left(1-\cos^2\theta\right)d\cos\theta = \frac{4}{3}$$

والمكاملة على r في المجال $[a, \infty[$، الاندفاع الكلي

$$p = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{v}{ac^2} \qquad (5.13)$$

نكتب في وحدات يأخذ المقدار $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ فيها القيمة واحد[3] و q القيمة e $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} = e^2$، الاندفاع الكلي على الشكل

$$p = \frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2}v \qquad (5.14)$$

إنه مقدار متناسب مع سرعة الشحنة v ويقابل اندفاع كتلة هي $\frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2}$.

<u>تعريف 6</u> :

نطلق على هذا المقدار اسم الكتلة الكهرطيسية ونكتب

$$m_{e\cdot m} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2} \qquad (5.15)$$

وهكذا نرى أن الشحنة المتحركة بإحداثها حقلاً كهرطيسياً، موجة كهرطيسية، تنتج كتلة تضاف إلى كتلتها العطالية m_{mec} التي تحددها العلاقة $\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}$ حيث $\bar{p} = m_{mec}\bar{v}$ عندما تكون السرعة v صغيرة أمام سرعة الضوء. إن كتلة الإلكترون هي مجموع هاتين الكتلتين، الميكانيكية والكهرطيسية وهي كتلة كالطاقة تسعى إلى اللانهاية عندما يتناهى نصف قطر الإلكترون نحو الصفر. تحدد لنا الكتلة الكهرطيسية أبعاد الإلكترون إذا أردنا أن تكون منتهية. تعطي العلاقة (5.15) "نصف قطر الإلكترون التقليدي" الذي نكتبه على الشكل

$$r_0 = \frac{e^2}{m_{e\cdot m}c^2}$$

$r_0 = 2{,}82\cdot10^{-15}$ متر.

لم نأخذ بعين الاعتبار العامل $\frac{2}{3}$ في تقدير نصف قطر الإلكترون لأن هذا العامل تابع لصورة الحجم الذي نريد إعطاءه للإلكترون، كروية، بيضاوية، الخ فهو يساوي في الحالة الكروية لـ $\frac{4}{5}$.

أجرينا الحساب حتى الآن من أجل $v \ll c$ مهملين الحد $\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ في حساب الحقلين $\bar{E}$ و $\bar{B}$ في (4.35) وما يليها. يعود هذا الحد إلى الظهور من أجل السرع الكبيرة ونحصل على p في (5.14) على الشكل

[3] انظر الرقم القادم.

$$p = \frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_{e\cdot m}v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.16)$$

ملاحظات :

1- لقد اكتشفت العلاقة (5.15) قبل ظهور نظرية النسبية الخاصة عام 1905 القائلة بتناسب الكتلة مع الطاقة $m = \frac{U}{c}$ وهكذا فيجب أن تكون الكتلة الكهرطيسية ولنرمز لها بـ $m'_{e\cdot m}$ حسب (5.12) في الوحدات الجديدة

$$m'_{e\cdot m} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{ac} \neq m_{e\cdot m}$$

$$m'_{e\cdot m} = \frac{3c}{4} m_{e\cdot m}$$

أو

$$U = \frac{3}{4} m_{e\cdot m}c^2 \quad (5.17)$$

وهي العلاقة التي تعطينا (5.12) و(5.15) كذلك، وقد اكتشفت قبل ظهور النسبية الخاصة وتسببت بمشاكل عدة لعدم توافقها مع العلاقة $E = mC^2$ الشهيرة.

لقد دفع وجود صيغ عديدة اكتشفت قبل النسبية، كصيغة لينارد–فيشرت وما ينتج عنها بعض الفيزيائيين إلى الدعوة إلى الاستغناء عن هذه النظرية وعن المفاهيم الجديدة المتعارضة مع المفاهيم التقليدية.

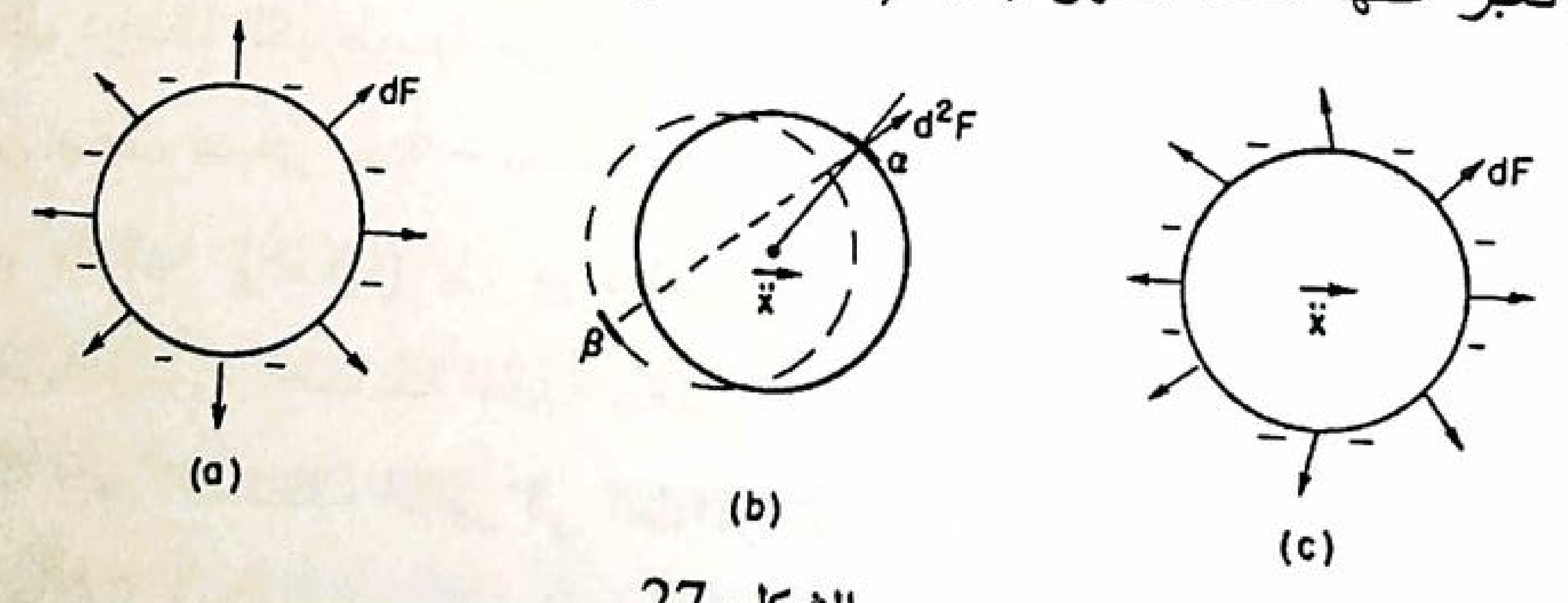
2- تبدو الكتلة الكهرطيسية في (5.16) متغيرة بتغير السرعة على خلاف الكتلة الميكانيكية التي تميز الجسيم وتبقى ثابتة. يكتب فيزيائيون عديدون الكتلة النسبوية على الشكل $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ويطلقون على m_0 اسم الكتلة الساكنة–المقيسة في مقرن مرتبط بالجسيم. نفضل القول إن الكتلة مقدار ثابت يميز الجسيم وإن المتغير مع السرعة هو الاندفاع – الذي لا يساوي $m_0\vec{V}$ كما في الميكانيك التقليدي وإنما $m_0 \cdot \frac{\vec{V}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. ليست المسألة في إزاحة الجذر من مخرج الكتلة إلى مخرج السرعة أو في وضعه كمخرج للجداء بدون تمييز، وإنما في اتساق التعاريف : فإذا كانت الكتلة m_0 هي الكتلة المقيسة في مقرن مرتبط بالجسيم – في جملة مادية مؤلفة من ثلاث مساطر متعامدة – فهل يوجد مقرن يسير بسرعة الضوء لنقول إن الفوتون ساكن فيه وكتلته تساوي الصفر ؟ طبعاً لا لأن طاقته ستكون لامتناهية في الكبر وبالتالي فإن كتلة الفوتون مقدار ثابت يساوي الصفر وكذا بالنسبة لكل كتل الجسيمات المعروفة.

3- ترينا العلاقة (5.16) أن اندفاع الطاقة الكهرطيسية متناه في الكبر عندما يتناهى البعد a نحو الصفر، حاله حال طاقة الشحنة النقطية، أو أن الكتلة الكهرطيسية "الساكنة" (5.15) ونرمز لها بـ $m_{0_{e\cdot m}}$

قد أصبحت لامنتهية. والخلاصة إذاً أن الشحنة النقطية تضيف إلى مشكلة الطاقة والكتلة الكهرطيسية اللامنتهيتين مشكلة أخرى تتمثل في عدم التساوي بين الطاقة والكتلة (وجود العامل $\frac{3}{4}$ في (5.17)) خلافاً لما تنص النسبية الخاصة عليه والمحقق تجريبياً (Lebedew).

إن إعطاء أبعاد للإلكترون، تصوره على شكل كرة مثلاً يحل مشكلة الطاقة والكتلة الكهرطيسية اللامنتهيتين ويحل أيضاً مشكلة العامل $\frac{3}{4}$ (عوضاً عن 1) بين الكتلة والطاقة ليوفق بين الكهرطيسية والنسبية الخاصة. وذلك بأخذه بعين الاعتبار للقوة الميكانيكية الإضافية اللازمة لإبقاء الإلكترون متماسكاً بمعارضتها لقوى التنابذ الكهربائية بين مختلف الشحنات المكونة للإلكترون. يطلق على هذه القوى الضاغطة على الشحنات اسم إجهادات Stresses بوانكاريه. ولكن ما هي هذه القوى ؟ ما هو منشؤها وكيف تتبدى مفاعليها ؟ لم يجب أحد عن هذه الأسئلة.

يبين إعطاء حجم للإلكترون منشأ الكتلة الكهرطيسية التي تعبر عن مقاومته للحركة نتيجة شحنته، نتيجة تفاعله الكهرطيسي كما تعبر الكتلة الميكانيكية عن عطالة الجسم، عن مقاومته للتسارع نتيجة تطبيق قوة خارجية عليه. تعدم قوى التنابذ الكهربائي بين مكونات الإلكترون ولنفرضه كروي الشكل بعضها بعضاً زوجاً زوجاً عندما يكون الإلكترون ساكناً، الشكل.27، إلا أنه من المستحيل الإبقاء على هذا التقاص عند تسارع الإلكترون ذلك أن التناظر بين عنصري سطح α و β قد انكسر. فتأثير السطح β على السطح α في اللحظة t هو عندما كان الإلكترون في اللحظة $t-\Delta t$ المؤخرة وهكذا فقد تغير اتجاه القوة وشدتها، الشكل.27، ولم يعد مجموع هذه القوى يساوي الصفر، وهكذا يمارس الإلكترون على ذاته قوة تعارض التسارع تعبر عنها الكتلة الكهرطيسية (المتناهية في الكبر من أجل الشحنة النقطية).



الشكل.27

لقد جرت محاولات عديدة لتعديل نظرية الكهرطيسية بحيث تتواءم مع مفهوم الشحنة النقطية باءت كلها بالفشل[4]. لن نتعرض لهذه المحاولات لأننا نعلم أن ما بعد كهرطيسية ماكسويل تأتي النظرية الكمومية التي تجمع بين ميكانيك الكم والنسبية الخاصة وتجعل من المقادير الفيزيائية، الكمون رباعي الأبعاد على

[4] يمكن أخذ فكرة عن هذا الموضوع بقراءة كل الفصل 28 من المجلد الثاني The Feynman Lectures on Physics وبخاصة الفقرة 5-28 وهو ككل ما يكتب فاينمان عميق ووافٍ.

الإلكتروديناميك الكمومي في الحالة التي سبيل المثال، مؤثرات. وبالفعل تحل نظرية الحقول المكممة – الإلكتروديناميك الكمومي في الحالة التي تعنينا – مسألة المقادير اللامنتهية، مسألة تفاعل الإلكترون الذاتي المسماة طاقة الإلكترون الذاتية باللجوء إلى تقنية رياضية صارمة تدعى إعادة التنظيم تعطي نتائج تتفق مع النتائج التجريبية ولكنها لا ترضي أحد مؤسسي هذه النظرية – ديراك – الذي يتساءل غاضباً عن هذه التقنية، الاصطناعية في نظره : كيف يجرؤون ؟!

يبقى سؤال أخير حول كتلة الإلكترون : هل هي مجموع كتلتين أولاهما ميكانيكية والثانية كهرطيسية أم إنها كهرطيسية صرفة ؟ وإن كانت كهرطيسية صرفة فكيف نفسر فرق الكتلة الهائل (أكثر من مئتي مرة) بين ليبتونين لهما نفس الشحنة الكهربائية هما الإلكترون والميوون ؟ ثم إن للجسيمات الحيادية كتلة أيضاً يستحيل أن يكون منشؤها كهرطيسي ونقصد هنا جسيمات أولية كالجسيم Z^0 أحد وسطاء التفاعلات النووية الضعيفة، وليس النوترون المكون من ثلاثة كواركات الذي لا نعتبره جسيماً أولياً. لقد شغل موضوع منشأ الكتلة الفيزيائيين النظريين لمدة طويلة فقد اقترحت منذ 1964 آلية لتزويد الجسيمات بكتلها تشبه تفاعل الجسيمات المشحونة مع الحقل الكهرطيسي الذي تحدثه وعُرف هذا الحقل المولّد للكتل باسم بوزون هيغز Higgs. وقد اكتشف هذا البوزون فعلاً في صيف عام (2012) في مصادم الهدرونات الكبير (LHC) التابع للمركز الأوربي للبحوث النووية في جنيف.

4.5– نظم الوحدات الكهرطيسية

لقد انطلقنا في كل دراستنا الكهرطيسية من المستوى المجهري، الذري وتحت الذري، من الشحنات النقطية أو المنحصرة في مجال صغير جداً – نصف قطر الإلكترون مثلاً. ولذا فإن استعمال نظمات واحدات، السنتمتر والغرام والثانية (CGS) بل وواحدات أصغر منها أمر طبيعي في هذه الدراسة. ولكن الكهرطيسية الجهرية والثورة الصناعية الثانية جعلا استعمال الوحدات الأكبر، المتر والكيلوغرام، MKS، أمراً شائعاً ومحبذاً رغم الاختلاف الكبير في الظواهر التي تعالجها الكهربائية الراكدة (الحالات المستقرة) والكهرطيسية (الحالات المتغيرة مع الزمن). تدخل في معالجة الكهربائية الراكدة فروق كمون عالية وكميات صغيرة من الشحنات؛ هذا في حين تتعامل الكهرحركية، التيارات، مع فروق كمون صغيرة أو معتدلة وكميات كبيرة من الشحنات. بحيث يمكننا تشبيه الشرارة الكهربائية التي ترافق إفراغ المكثفة بهبوط كمية صغيرة من سائل ما من ارتفاع عال (كمون كبير) والتيار بنهر، كمية السائل فيه كبيرة وانحداره ضئيل؛ إن مقارنة الكهرطيسية بميكانيك السوائل ليست كيفية فقط وإنما كمية أيضاً. علينا إذاً أن نستعمل وحدات شحنة صغيرة في الحالة الأولى وكبيرة في الحالة الثانية : إنها كما سنرى $\frac{1}{3\cdot10^9}$ كولون في السكونية الكهربائية الراكدة و10 كولون في الحالة الكهرطيسية، النسبة بينهما هي سرعة الضوء

$c = 3\cdot10^{10}$. وعلى العكس نستعمل وحدات كمون (أو وحدات حقل كهربائي) كبيرة في الحالة الأولى وصغيرة في الحالة الثانية، تقل عن الأولى بـ c. إنها $300 \frac{\text{فولت}}{\text{سنتمتر}}$ في الحالة الأولى و $10^{-8} \frac{\text{فولت}}{\text{سنتمتر}}$ في الحالة الثانية.

إن الشحنة الكهربائية Q في نظمة الوحدات MKS هي وحدة أساسية لا تختلف في شيء عن الوحدات الميكانيكية المتر والكيلوغرام والثانية؛ فالنظمة الأساسية رباعية الأبعاد MKSQ واحدة الشحنة فيها الكولون، أبعاده في MKSQ هي 0,0,0,1. وهي نظمة منطقة Rational إذ تأخذ بعين الاعتبار وضع $\frac{1}{4\pi}$ في تعريف الكمون حسبما تقتضيه مبرهنة غرين ((1.(3.27)) وتتيح كتابة القوة على الشكل $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon r^2}$، $\varepsilon = \varepsilon_0$ في الخلاء.

تعتمد الوحدات السغثية في الكهربائية الراكدة على قانون كولون حيث نكتب قوة التفاعل بين شحنتين متماثلتين على الشكل

$$F = k\frac{e^2}{r^2} \tag{5.18}$$

وننظر إلى k كثابتة لا أبعاد لها، تأخذ الشحنة عندئذ أبعاداً غريبة

$$[e] = L \cdot M^{1/2} \cdot L^{1/2}T^{-1} = [L]^{3/2}\cdot[M]^{1/2}\cdot[T]^{-1}$$

وتساوي $(\text{دينـه} \cdot \text{سـم}^2)^{1/2}$. وهي الكولون Q حددنا $4\pi\varepsilon_0$

أما في الوحدات MKSQ فتساوي $(10^5 \text{دينـه} \times 10^4 \text{سـم}^2) \times 4\pi\varepsilon_0$ بـ $9\cdot10^9$، ومنه فإن

$$\frac{e_{e\cdot s}}{Q} = (9\cdot10^{18})^{-1/2} = \frac{1}{3\cdot10^9} \tag{5.19}$$

كما أعلنا.

لقد أشرنا مرات عديدة إلى التماثل الشكلي بين المغنطيسية والكهربائية، ونريد هنا أن نذهب بهذا التماثل بعيداً بأن نكتب قانوناً مماثلاً لقانون كولون في المغنطيسية. نستعيض في مقارنة الظاهرتين عن تماثل $\vec{B}$ و $\vec{E}$ بتماثل $\vec{H}$ و $\vec{E}$ حيث $\vec{H}$ حقل يعبر عن الحقل $\vec{B}$ داخل المادة، $\vec{B} = \mu\vec{H}$. فنستعيض عن $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ التي تعبر عن عدم وجود الكتلة المغنطيسية، وحيد القطب المغنطيسي، بعلاقة $\vec{H}$ يحققها تماثل العلاقة $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \sim \rho$ حيث ρ كثافة الشحنة الكهربائية. لدينا العلاقة

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \mu\vec{H} \equiv \vec{\nabla}\mu \cdot \vec{H} + \mu\vec{\nabla} \cdot \vec{H}$$

التي تعطينا كثافة الكتلة المغنطيسية

$$\rho_m = -\frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\mu \cdot \vec{H} = \vec{H}\vec{\nabla}Ln\frac{\mu_0}{\mu}$$

لأن $\vec{\nabla} L n \mu_0 = 0$. وهكذا فالحقل $\vec{H}$ مشتق من كمون كالحقل E ويساوي من أجل كتلة مغنطيسية

$$m = \int \rho_m d\tau \quad (5.20)$$

$$H = \frac{m}{4\pi r^2}$$

والقوة التي تتنابذ بها كتلتان (وحيدا قطب) هي من الشكل

$$F = mB = m\mu H = \frac{m^2 \mu}{4\pi r^2} \quad (5.21)$$

تقابل هذه القوة قانون كولون $F = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon r^2}$. تصبح وحدة ثانوية أبعادها غريبة إن الكتلة المغنطيسية وحدة أساسية في هذه العلاقة على غرار الكولون. كالشحنة الكهربائية عندما نكتب قوة التفاعل بين كتلتين مغنطيسيتين على الشكل

$$F' = k' \frac{m^2}{r^2} \quad (5.22)$$

ونأخذ $k' = 1$.

ولكن ما هي أبعاد الكتلة المغنطيسية ؟ لنعد إلى التشابه بين العزم المغنطيسي (ثنائي القطب المغنطيسي) وعزم القطب الكهربائي $p = Qd$ فالشحنة الكهربائية هي $\dfrac{p}{d}$، وعليه فالكتلة المغنطيسية هي $\dfrac{M}{d}$ و $M = IS$ وأبعادها هي $\dfrac{[Q]}{[T]}\dfrac{[L]^2}{[L]} = [Q][L][T]^{-1}$ وتساوي حسب (5.22) $(\text{دينه سم}^2)^{1/2}$. أما في الوحدات MKSQ فتساوي حسب (5.21) في الفضاء الخاوي $\left(\dfrac{4\pi}{\mu_0} \times 10^5 \text{ دينه}\right)^{1/2}$. ونحصل كما في (5.19) على

$$\frac{e_{e\cdot m}}{Q} = \left(10^5 \times 10^{-7}\right)^{-1/2} = 10 \quad (5.23)$$

حيث رمزنا للشحنة في النظمة المغنطيسية بـ $e_{e\cdot m}$. نرى من هذه العلاقة ومن (5.19) أن

$$\frac{e_{e\cdot m}}{e_{e\cdot s}} = c = 3\cdot 10^{10} \quad (5.24)$$

يمكن أن نرى ذلك مباشرة بملاحظة أن مقلوب هذه النسبة هو جذر $\dfrac{1}{c^2} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \times 4\pi\varepsilon_0$.

نستنتج من معرفة $e_{e\cdot m}$ و $e_{e\cdot s}$ بالنسبة للكولون الوحدات المغنطيسية الأخرى. لدينا على سبيل المثال واحدة الكمون في هاتين النظمتين، إنها واحدة الطاقة على شحنة $[V] = \dfrac{[E]}{Q}$؛

$$\frac{\text{أرغه}}{e_{e\cdot s}} = [V] = \frac{10^{-7}\ \text{جول}}{\frac{1}{3.10^9}\ \text{كولون}} = \frac{300\ \text{جول}}{\text{كولون}} = 300\ \text{فولت أو}$$

لأن $\bar{\nabla} Ln\mu_0 = 0$. وهكذا فالحقل $\bar{H}$ مشتق من كمون كالحقل E ويساوي من أجل كتلة مغنطيسية $m = \int \rho_m d\tau$

$$H = \frac{m}{4\pi r^2} \quad (5.20)$$

والقوة التي تتنابذ بها كتلتان (وحيدا قطب) هي من الشكل

$$F = mB = m\mu H = \frac{m^2\mu}{4\pi r^2} \quad (5.21)$$

تقابل هذه القوة قانون كولون $F = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon r^2}$.

إن الكتلة المغنطيسية وحدة أساسية في هذه العلاقة على غرار الكولون. تصبح وحدة ثانوية أبعادها غريبة كالشحنة الكهربائية عندما نكتب قوة التفاعل بين كتلتين مغنطيسيتين على الشكل

$$F' = k'\frac{m^2}{r^2} \quad (5.22)$$

ونأخذ $k' = 1$.

ولكن ما هي أبعاد الكتلة المغنطيسية ؟ لنعد إلى التشابه بين العزم المغنطيسي (ثنائي القطب المغنطيسي) $M = IS$ وعزم القطب الكهربائي $p = Qd$ فالشحنة الكهربائية هي $\frac{p}{d}$، وعليه فالكتلة المغنطيسية هي $\frac{M}{d}$ وأبعادها هي $\frac{[Q]}{[T]}\frac{[L]^2}{[L]} = [Q][L][T]^{-1}$ وتساوي حسب (5.22) $(\text{دينـه سـم}^2)^{1/2}$. أما في الوحدات MKSQ فتساوي حسب (5.21) في الفضاء الخاوي $\left(\frac{4\pi}{\mu_0} \times 10^5 \text{ دينـه}\right)^{1/2}$. ونحصل كما في (5.19) على

$$\frac{e_{e\cdot m}}{Q} = \left(10^5 \times 10^{-7}\right)^{-1/2} = 10 \quad (5.23)$$

حيث رمزنا للشحنة في النظمة المغنطيسية بـ $e_{e\cdot m}$. نرى من هذه العلاقة ومن (5.19) أن

$$\frac{e_{e\cdot m}}{e_{e\cdot s}} = c = 3\cdot 10^{10} \quad (5.24)$$

يمكن أن نرى ذلك مباشرة بملاحظة أن مقلوب هذه النسبة هو جذر $\frac{1}{c^2} = 4\pi\varepsilon_0 \times \frac{\mu_0}{4\pi}$.

نستنتج من معرفة $e_{e\cdot m}$ و $e_{e\cdot s}$ بالنسبة للكولون الوحدات المغنطيسية الأخرى. لدينا على سبيل المثال واحدة الكمون في هاتين النظمتين، إنها واحدة الطاقة على شحنة $[V] = \frac{[E]}{Q}$؛

$$\frac{\text{أرغه}}{e_{e\cdot s}} = [V] = \frac{10^{-7}\ \text{جول}}{\frac{1}{3.10^9}\ \text{كولـون}} = \frac{300\ \text{جول}}{\text{كولـون}} = 300\ \text{فولـت أو}$$

$$\text{أرغه}/e_{e\cdot m} = [V] = \frac{10^{-7}}{10} = 10^{-8} \text{ فولت}$$

عبرنا عن أبعاد الحقل المغنطيسي بشكلين $\frac{[F]}{[Q][L][T]^{-1}}$ هذه الوحدة هي التسلا Tesla أو بالأبعاد الكهربائية $\frac{[V][T]}{L^2}$ وسمينا هذه الوحدة الفيبر/مترمربع. وهكذا فإن أبعاد هذا الحقل في النظمة الكهربائية الراكدة هي

$$[B] = \frac{\text{ثانية} \times \text{دينه}}{\text{سنتمر} \times e_{e\cdot s}} = \frac{10^{-5}}{10^{-2} \times \frac{1}{3\cdot 10^{9}}} = 3\cdot 10^{6} \text{ تسلا}$$

وفي النظمة الكهرطيسية

$$[B] = \frac{\text{ثانية} \times \text{دينه}}{\text{سنتمر} \times e_{e\cdot m}} = \frac{10^{-5}}{10^{-2} \times 10} = 10^{-4} \text{ تسلا}$$

وتسمى هذه الوحدة الغاوص.

أما وحدة الحقل $H = \frac{B}{\mu_0}$ في النظمة الكهرطيسية وتسمى الأورستيد Oersted فهي

$$\frac{10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = \frac{1}{4\pi} 10^{3} \cdot$$

أبعاد H في النظمة MKSQ هي

$$\frac{\frac{[F]}{[Q][L][T]^{-1}}}{\frac{[F]}{[Q]^2 [T]^{-2}}} = \frac{[Q][T]^{-1}}{[L]} = \frac{\text{آمبير}}{\text{متر}}$$

نترك للقارئ إتمام الجدول التالي

المقدار	الواحدة الدولية	قيمتها CGS(e·s)	في CGS(e·m)	أبعادها شحنة Q	زمن T	كتلة M	طول L
الشحنة الكهربائية	الكولون C	$3\cdot10^9$	10^{-1}	1	0	0	0
التيار الكهربائي	الأمبير A	$3\cdot10^9$	10^{-1}	1	-1	0	0
الكمون الكهربائي	الفولت V	$\frac{1}{300}$	10^8	-1	-2	1	2
الحقل الكهربائي	الفولت/متر	$\frac{1}{3\cdot10^4}$	10^6	-1	-2	1	1
الحقل المغنطيسي B	تسلا T أو فيبر/مترمربع	$\frac{1}{3\cdot10^6}$	10^4 غاوص	-1	-1	1	0
الحقل H	آمبير/متر	$12\pi\cdot10^7$	$4\pi\cdot10^{-3}$ أورستيد	1	-1	0	-1
المقاومة الكهربائية	الأوم Ω	$\frac{1}{9\cdot10^{11}}$	10^9	-2	-1	1	2
السعة الكهربائية	الفاراد F	$9\cdot10^{11}$	10^{-9}	2	2	-1	-2
التدفق المغنطيسي	الفيبر φ	$\frac{1}{300}$	10^8 غاوص×سنتمتر^2	-1	-1	1	2
التحريضية	الهنري H	$\frac{1}{9\cdot10^{11}}$	10^9	-2	0	1	2

من الواضح أن الانتقال من نظمة وحدات إلى أخرى، ونظمة الوحدات لا تقتصر على النظمات الثلاث التي أوليناها عنايتنا، يغير شكل معادلات ماكسويل. لنكتب على سبيل المثال هذه المعادلات في النظمة السغثية (الكهرراكدة) CGS(e·s). لدينا في هذه النظمة $4\pi\varepsilon_0 = 1$، يجب إذاً استبدال $\frac{1}{\varepsilon_0}$ بـ 4π واستبدال μ_0 بـ $\frac{4\pi}{c^2}$ لأن $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$. أضف إلى ذلك أننا نقيس الحقل المغنطيسي B في هذه النظمة بالغاوص، واحدة الحقل B مقيساً بالغاوص في هذه النظمة هي $c = 10^4 \times 3\cdot10^6$. يجب بالتالي استبدال $\vec{B}$ في معادلات ماكسويل بـ $\frac{\vec{B}}{c}$ واستبدال الكمون المتجهي معها بـ $\frac{\vec{A}}{c}$. وهكذا فإن معادلة ماكسويل الأولى هي

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -4\pi\rho \quad \text{عوضاً عن} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (5.25)$$

والثانية هي

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{عوضاً عن} \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (5.26)$$

تبقى الثالثة بدون تغيير

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (5.27)$$

والرابعة

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{c} = \frac{4\pi}{c^2}\vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{أو} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

عوضاً عن

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (5.28)$$

نكتب قوة لورانتس على الشكل الأكثر اتساقاً الذي يعطي لـ $\vec{E}$ و $\vec{B}$ نفس الأبعاد

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B}\right) \quad \text{عوضاً عن} \quad q\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right) \qquad (5.29)$$

وغيرها من العلاقات، سنكتفي هنا، فيما يخص هذه الفقرة، بإعطاء متجهة بوينتغ وكثافة الطاقة عوضاً عن (5 .7,6)

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi} c\vec{E} \times \vec{B} \qquad (5.30)$$

$$u = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + B^2\right) \qquad (5.31)$$

أما معادلة الكمون رباعية الأبعاد (3.22)

$$\Box^2 A = \mu_0 J$$

حيث مركبات المتجهة رباعية الأبعاد A هي $\left(\overset{\circ}{A} = \frac{V}{c}, \vec{A}\right)$ ومركبات التيار رباعي الأبعاد هي $\left(\overset{\circ}{J} = c\rho, \vec{J}\right)$ فتأخذ في النظمة السغثية الشكل

$$\Box^2 A = \frac{4\pi}{c} J \qquad (5.32)$$

مركبات A هنا هي $\left(\overset{\circ}{A} = V, \vec{A}\right)$ وتبقى مركبات التيار رباعي الأبعاد دون تغيير. لا ننسى أن $\vec{B}$ هنا مقيس بالغاوص أي أن مركبات A في النظمة السغثية هي المركبات في النظمة MKSQ مضروبة بـ c وهو ما يفسر اختفاء c في مخرج $\mu_0 = \frac{4\pi}{c^2}$. نكتب (5.32) بدليل المركبات

$$\begin{cases} \Box^2 V = 4\pi\rho \quad \text{المقابلـــة لـــ} \quad \Box^2 V = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \text{و} \\ \Box^2 \vec{A} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{J} \quad \text{المقابلـــة لـــ} \quad \Box^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \end{cases} \qquad (5.33)$$

الفصل الرابع

نظرية الإشعاع

1- معادلة الحركة........................ 185

2- إشعاع الشحنات المتحركة عن بعد 199

3- حالات الإشعاع الأخرى..................... 210

الفصل الرابع: نظرية الإشعاع

عالجنا في الفصلين الأول والثاني حركة الجسيمات المشحونة في الحقلين الكهربائي والمغنطيسي المستقلين عن الزمن (الراكدين). نريد في هذا الفصل، بعد أن درسنا معادلات ماكسويل، النظر في حركة جسيم مشحون ما تحت تأثير الحقل الكهرطيسي $(\vec{E}, \vec{B})$، أي تفاعله مع الموجة الكهرطيسية التي تحدثها مجموعة من الشحنات، المتحركة أو الساكنة، في موضع رصد الجسيم المشحون. نستطيع معالجة هذه المسألة بالقيام بتقريبات متتالية ننشر فيها كمون الحقل الكهرطيسي $(V, \vec{A})$ في جوار قيمة وسطية $\vec{R}_0$ لبعد نقطة الرصد عن مجموعة الشحنات محدثة الحقل، وتقريبات أخرى للزمن المؤخر $t - \frac{r}{c}$ في جوار الزمن الآني t. وننظر إلى هذه التقريبات كاضطرابات للكمون $(V, \vec{A})(t, \vec{R}_0)$. هذا فيما يخص الحقل الكهرطيسي أما معادلة الجسيم المشحون المتفاعل معه، فهي معادلة نسبوية، نشتقها من مبدأ الفعل الأصغر يحدد لنا لاغرنجي الحركة، تأخذ شكلاً تقليدياً - نيوتونياً - عندما تكون سرعة الجسيم صغيرة أمام سرعة الضوء $v \ll c$. وهو ما سنفعله عندما يكون الجسيم ذرة نتمثلها بهزاز توافقي متخامد ومقسور يصدر موجة كهرطيسية مختلفة عن الموجة التي يتلقاها مما يفسر زرقة السماء ولون الغيوم وظواهر أخرى. أشرنا أكثر من مرة إلى أن الجسيمات الصغيرة، الذرة ومكوناتها والجسيمات الأولية (تحت الذرية) تخضع إلى الميكانيك الكمومي وأن الإطار الملائم لدراسة حركة هذه الجسيمات عندما تصبح سرعتها نسبوية (قريبة من سرعة الضوء) هو نظرية الحقول المكممة التي تجمع بين ميكانيك الكم والنسبية الخاصة. تصبح مركبات الحقل الكهرطيسي $(V, \vec{A})$ في اللاغرنجي الذي سنحدده مؤثرات، ومعها طبعاً $\vec{E}$ و $\vec{B}$ في النظرية الجديدة الخارجة عن إطار هذا الكتاب.

1. معادلة الحركة

1.1- معادلة الحركة رباعية الأبعاد

عرفنا في الميكانيك النسبوي ((I.(7.§3.5) معادلة الحركة رباعية الأبعاد، التي تعمم قانون نيوتن $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$، على النحو التالي

$$\frac{dp}{ds} = g \qquad (1.1)$$

حيث p المتجهة رباعية الأبعاد، p_0 ، $\vec{p}$ ، الطاقة–الاندفاع : $\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ، $\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

و $ds = \frac{cdt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. وبينا كما في الميكانيك النيوتوني الصلة بين p ومتجهة السرعة رباعية الأبعاد

$$p = mcu \tag{1.2}$$

$$u = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{1.3}$$

كتبنا معادلة الحركة بدليل التسارع رباعي الأبعاد :

$$g = \frac{dp}{ds} = mc\frac{du}{ds} = mc\frac{d^2x}{ds^2} \tag{1.1'}$$

مركب g الزماني، g^0 هو

$$g^0 = \frac{dp^0}{ds} = \frac{1}{c}\frac{d\varepsilon}{cdt\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}\vec{F} \cdot \vec{v} \tag{1.4}$$

حيث رمزنا للطاقة بـ ε و $\frac{d\varepsilon}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ هي الاستطاعة التقليدية، والمركب المكاني هو

$$\vec{g} = \frac{d\vec{p}}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}\vec{F} \tag{1.5}$$

حيث وضعنا تعريفاً

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}$$

تأخذ معادلتا الحركة (1.4) و(1.5) لشحنة q في حقل كهرطيسي الشكل التالي :

$$g^0 = \frac{1}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

لأن القوة المغنطيسية لا تعمل كما رأينا، والقوة هي قوة لورانتس

$$\vec{g} = \frac{q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

نتخلص من الجذر في المخرج بالانتقال من المتجهة رباعية الأبعاد $\frac{\vec{v}}{c}$ ، 1، إلى متجهة السرعة (1.3) لنجد أن

$$g^0 = \frac{q}{c}\vec{E} \cdot \vec{u} \tag{1.6}$$

و

$$\vec{g} = qu^0\frac{\vec{E}}{c} + \vec{u} \times \vec{B} \tag{1.7}$$

2.1- الشكل التانسوري لمعادلة الحركة

نعلم أن الجداء المتجهي في الفضاء الإقليدي هو تانسور من الرتبة الثانية، مصفوفة مربعة مضادة التناظر عدد عناصرها ثلاثة فقط، كتبناها على شكل شبه متجهة في الفضاء الإقليدي. وضعنا صياغة تانسورية للحقل الكهرطيسي ((I.(7.§4.5)

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z \\ -\frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.8)$$

نريد كتابة معادلتي الحركة (1.6) و(1.7) كعلاقة وحيدة : متجهة رباعية هي تطبيق مصفوفة على متجهة رباعية، إلا أننا لسنا في فضاء إقليدي هنا، ليست كل عناصر المصفوفة القطرية للتانسور المتري مساوية للواحد. انتقلنا من الإحداثيات $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x})$ المسماة بالإحداثيات مضادة التغير إلى الإحداثيات $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, -\vec{x})$ المسماة مسايرة التغير بكتابتنا (مستعملين تعارف آنشتاين بالجمع على العناصر المكررة في الأعلى والأسفل)

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \qquad (1)$$

حيث عناصر التانسور المتري

$$g_{ii} = -1 \text{ ،} \; g_{00} = 1$$

وبالعكس

$$x^\nu = g^{\nu\mu} x_\mu \qquad (2)$$

نعمم هذه الكتابة للانتقال من التانسور مساير التغيير إلى التانسور مضاد التغيير، من $F_{\mu\nu}$ إلى $F^{\rho\eta}$:

$$F^{\rho\eta} = g^{\rho\mu} g^{\eta\nu} F_{\mu\nu} \qquad (3)$$

أو إلى التانسور (من الرتبة الثانية) مضاد التغيير مرة ومساير التغيير مرة أخرى

$$F^{\rho}{}_{\eta} = g^{\rho\mu} g_{\eta}{}^{\nu} F_{\mu\nu} \qquad (4)$$

لا ننسى أن $g_\eta^\nu = \delta_\eta^\nu$ ، وهكذا فإن

$$F^{o}{}_{i} = g^{o\mu} g_i{}^{\nu} F_{\mu\nu} = g^{oo} g_i{}^{i} F_{oi} = g^{oo} F_{oi} = F_{oi}$$

و

$$F^{i}{}_{o} = g^{i\mu} g_o{}^{\nu} F_{\mu\nu} = g^{ii} g_o{}^{o} F_{io} = -F_{io}$$

وأخيراً

$$F^{i}{}_{j} = g^{i\mu} g_{j}{}^{\nu} F_{\mu\nu} = g^{ii} g_{j}{}^{j} F_{ij} = -F_{ij}$$

وهكذا نحدد التانسور $F^{\rho}{}_{\eta}$ انطلاقاً من (1.8)

$$F^{\rho}{}_{\eta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{1}{c}E_y & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{1}{c}E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.9)$$

يعطينا تطبيق هذا التانسور (هذه المصفوفة) على المتجهة $u = (u^0, \bar{u})$ المعطاة بـ (1.3) والكل مضروباً بـ q متجهة القوة رباعية الأبعاد $g = g^0, \bar{g}$. إن جداء السطر الأول بالعمود $(u^0, \bar{u})$ مضروباً بـ q هو $g^0 = \frac{q}{c}\bar{E} \cdot \bar{u}$ $(F^0_0 = 0)$ وكذلك جداء السطر الثاني بالعمود $(u^0, \bar{u})$ مضروباً بـ q هو g^1

$$g^1 = \frac{1}{c}E_x u^0 + u^2 B_z - u^3 B_y$$

الخ. ومعادلة الحركة هي

$$\frac{dp^{\rho}}{ds} = g^{\rho} = qF^{\rho}{}_{\nu}u^{\nu} \qquad (1.10)$$

الجمع طبعاً على كل ν، $\nu = 0, 1, 2, 3$.

ما من شيء يمنع من كتابة هذه المعادلة بدليل المركبات مسايرة التغيير لمتجهة السرعة على الشكل

$$\frac{dp^{\rho}}{ds} = g^{\rho} = qF^{\rho\nu}u_{\nu} \qquad (1.11)$$

نحصل على $F^{\rho\nu}$ حسب (3) من $F_{\mu\nu}$ فنجد أن النتيجة هي استبدال السطر الأول بالعمود الأول وبقاء عناصر المصفوفة الأخرى دون تغيير، $u_{\nu} = (u^0, -\bar{u})$ كما نعلم.

يمكننا استخلاص معادلة الحركة من مبدأ الفعل الأصغر، كما هو حال كل معادلات الحركة في الفيزياء؛ ميزة هذا الاستخلاص هنا هي ظهور تانسور الحقل الكهرطيسي بشكل طبيعي يبعده عن الطريقة الصنعية التي اتبعناها في المجلد الأول.

3.1- مبدأ الفعل الأصغر

ليكن $\mathcal{A}$ فعل حركة الشحنة الكهربائية q في الحقل الكهرطيسي $A = \left(A^0, \vec{A}\right)$، ولنكتبه على شكل تكامل لِ "طاقة حركية" ناقص طاقة كامنة $-qA^{\rho}dx_{\rho}$، التي هي المقدار السلمي الوحيد الذي يمكننا الحصول عليه بالكمون A، إنها $q\left(A^0cdt - \vec{A}\cdot\overline{dx}\right)$؛ $A^0 = \frac{V}{c}$، V الكمون السلمي

$$\mathcal{A} = \int -mcds - qA^{\rho}dx_{\rho} \qquad (1.12)$$

نستعيد حساب تغيرات الحد الأول الذي حصلنا عليه في (((I.(7.(3.12

$$-mc\delta\int_a^b\left[(cdt)^2 - \sum_{i=1}^{3}\left(dx^i\right)^2\right]^{1/2} = -mc\int_a^b\frac{dx^0\delta dx^0 - \overline{dx}\delta\overline{dx}}{\left[\left(dx^0\right)^2 - \sum_i\left(dx^i\right)^2\right]^{1/2}}$$

وبما أن $u = \frac{dx}{ds}$

$$= -mc\int_a^b u^{\rho}\delta dx_{\rho}$$

تتيح لنا خطية التغير والتفاضل تبادل δ و d، نكامل هذا المقدار بالتجزئة :

$$-mcu^{\rho}\delta x_{\rho}\Big|_a^b + mc\int_a^b du^{\rho}\delta x_{\rho}$$

الحد المكامل معدوم لأن δx معدوم في النقطتين a و b، ويبقى التكامل الذي نكتبه على الشكل

$$mc\int\frac{du^{\rho}}{ds}ds\delta x_{\rho} \qquad (1)$$

نكتب تغير المقدار $A^{\rho}dx_{\rho}$ على الشكل

$$\left(\delta A^{\rho}\right)dx_{\rho} + A^{\rho}\delta dx_{\rho}$$

نكامل الحد الثاني بالتجزئة ونكتب المقدار المتبقي تحت إشارة التكامل $dA^{\rho}\delta x_{\rho}$ على الشكل

$$dA^{\rho}\delta x_{\rho} = \frac{\partial A^{\rho}}{\partial x_{\nu}}\frac{dx_{\nu}}{ds}ds\delta x_{\rho} \qquad (2)$$

أما الحد الأول فنعيد كتابته بتبديل الدليل الصامت ρ بـ ν وتغيرات $\left(\delta A^{\nu}\right)dx_{\nu}$ وتغيرات A^{ν} هي

$$\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\rho}}\delta x_{\rho}$$

ومنه

$$\left(\delta A^{\nu}\right)dx_{\nu} = \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\rho}}\frac{dx_{\nu}}{ds}ds\delta x_{\rho} \qquad (3)$$

وهكذا فتغيرات الفعل $\mathcal{A}$ هي تغيرات الطاقة الحركية (1) + تغيرات الطاقة الكامنة : 2 مضروباً بـ +q و 3 مضروباً بـ -q.

$$\delta \mathcal{A} = \int_a^b \left[mc\frac{du^\rho}{ds} + q\frac{\partial A^\rho}{\partial x_\nu}u_\nu - q\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\rho}u_\nu \right] ds\delta x_\rho \tag{1.13}$$

حيث $u_\nu = \frac{dx_\nu}{ds}$. أي أن يكون المقدار المكامل على كل فضاء مينكوفسكي معادلة الحركة هي أن يكون الفعل أصغرياً، $\delta\mathcal{A} = 0$، أي أن يكون المقدار بين المعقوفتين معدوم ومعادلة الحركة هي مساوياً للصفر، وبما أن التغيرات δx_ρ اعتباطية فإن المقدار بين المعقوفتين معدوم ومعادلة الحركة هي

$$mc\frac{du^\rho}{ds} = q\left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\rho} - \frac{\partial A^\rho}{\partial x_\nu}\right)u_\nu \tag{1.14}$$

قلنا إن الاشتقاق ينقل من فضاء إلى ثنويه، والاشتقاق هنا هو بالنسبة للإحداثيات مسايرة التغيير وبالتالي فإن الحاصل مضاد التغيير، لذا نرمز للحد بين قوسين بـ $F^{\rho\nu}$ وهو تانسور مضاد التغير، كما أنه مضاد التناظر تعريفاً $F^{\rho\nu} = -F^{\nu\rho}$

$$F^{\rho\nu} = \partial^\rho A^\nu - \partial^\nu A^\rho \tag{1.15}$$

يقابل هذا التعريف بطبيعة الحال التعريف (((4.29).7).I) مساير التغيير.

إن (1.12) هو الفعل الذي نشتق منه حركة الشحنة في حقل كهرطيسي، ولكنه ليس كل الفعل؛ يجب أن نضيف إليه فعل الحقل الذي نستخلص منه معادلات ماكسويل كما استخلصنا معادلة نيوتن (مبدأ نيوتن الثاني) من تعيين اللاغرانجي. إن المقدار السلمي الوحيد الذي نستطيع اعتباره لاغرانجي الحقل الكهرطيسي هو تقليص الجداء التانسوري $\left(F_{\rho\eta}F^{\sigma\varsigma}\right)$، التانسوري من الرتبة الرابعة، مرتين بكتابته على الشكل $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ (الجمع على كل المتغيرات μ، ν، $0, 1, 2, 3$)؛ كل تقليص يخفض رتبة التانسور رتبتين. نكتب فعل الحقل الكهرطيسي على الشكل $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ ونجد بالعودة إلى (1.8) وإلى (3) التي تعطي $F^{\mu\nu}$ بدليل التانسور مساير التغيير أنه يساوي لـ $E^2 - B^2$. إن المعامل $\frac{1}{4}$ ناتج عن استعمال وحدات جديدة هي وحدات هيفيسايد. لكننا سنكتب الفعل الكلي المؤلف من الفعل الذي نستخلص منه حركة الشحنة في الحقل الكهرطيسي (1.12) ومن الفعل المنتج للحقل $E^2 - B^2$ بالوحدات السغثية الكهرراكدة. لن يتغير شيء في الحد الأول، يصبح الحد الثاني أكثر تناظراً منتقلاً من $A = \left(\frac{V}{c}, \frac{\bar{A}}{c}\right)$ إلى $A = \left(A^\circ = \frac{V}{c}, \bar{A}\right)$ كما رأينا في (3.§5.4). تُحذف $\frac{1}{c}$ الداخلة في مركبات $\bar{E}$ في التانسور $F_{\mu\nu}$ لأن B أصبحت هي أيضاً $\frac{B}{c}$ ونكتب الفعل الكلي في هذه النظمة على الشكل

$$\mathcal{A} = \int -mcds - q\frac{A^\rho}{c}dx_\rho + \frac{1}{8\pi c}\int\left(E^2 - B^2\right)dx^0dx^1dx^2dx^3 \tag{1.16}$$

يرينا الحد الأخير أن لاغرانجي الحقل ونرمز له بـ L_F هو

$$L_F = \frac{1}{8\pi}\int\left(E^2 - B^2\right)d\tau$$

حيث التكامل على كل الحجم τ الذي يحتوي الحقل، وهو اللاغرانجي الذي نستخلص منه معادلات ماكسويل. لكننا سنوجه اهتمامنا إلى الحدين الأولين ونكتب الفعل على شكل تكامل لاغرانجي

$$\mathcal{A} = \int -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt - qVdt + \frac{q}{c}\vec{A}d\vec{r} \tag{1.17}$$

لا ننسى أن $dx_0 = dx^0 = cdt$ و $dx_i = -dx^i$؛ نكتب الحد الأخير بدليل dt بأن نضع $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}dt$

وهكذا فلاغرانجي الشحنة في الحقل الكهرطيسي هو

$$L_q = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - qV + \frac{q}{c}\vec{A}\vec{v} \tag{1.18}$$

وهو مؤلف من اللاغرانجي الحر ولاغرانجي تفاعل الشحنة مع الحقل. لنحسب العزم العام المساوي تعريفاً لـ

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{q}{c}\vec{A} \tag{1.19}$$

الحد الأول هو الاندفاع العادي للشحنة $\vec{p}$

$$\vec{P} = \vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A} \tag{1.19'}$$

نحسب الهاميلتوني انطلاقاً من اللاغرانجي (1.18)

$$\mathcal{H} = \vec{v}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + qV \tag{1.20'}$$

ونعبر عنه بدليل العزم العام P فنكتب

$$\left(\frac{\mathcal{H} - qV}{c}\right)^2 \equiv \frac{m^2c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2c^2 + \frac{m^2v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2c^2 + \left(\vec{P} - q\frac{\vec{A}}{c}\right)^2$$

ومنه

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2} + qV \tag{1.21}$$

ولدينا القاعدة التي سنطبقها في هذا المجلد وما يتبعه : يجب استبدال اندفاع الشحنة في حساب الهاميلتوني بالاندفاع العام منقوصاً بـ $\frac{q}{c}\vec{A}$ ($q\vec{A}$ في النظمة MKSQ). ينطبق هذا المقدار على اندفاع الشحنة في التقريب التقليدي اللانسبوي. إن اندفاع الشحنة في هذا التقريب $v \ll c$ هو $m\vec{v}$ ويساوي حسب (1.19)

$$\vec{p} = m\vec{v} = \vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}$$

4.1- معادلة حركة الشحنة في الحقل الكهرطيسي

سنفرض أن الشحنة q صغيرة بحيث لا يؤثر الحقل الكهرطيسي الذي تنتجه على الحقل الذي تتأثر به. وهكذا فإن هذا الحقل مستقل عن إحداثيات q وعن سرعتها. لن نحدد في الوقت الراهن شروط صغر q. سنكتب معادلة الحركة انطلاقاً من اللاغرانجي (1.18) (الإحداثيات والسرعات العامة هي وضع الشحنة $\vec{r}$ وسرعتها $\vec{v}$) ومعادلة الحركة هي

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0 \qquad (1.22)$$

إن

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \vec{\nabla} L = \frac{q}{c}\vec{\nabla}\left(\vec{A}\vec{v}\right) - q\vec{\nabla} V$$

نستعمل المتطابقة

$$^{1}\ \vec{\nabla}\left(\vec{a}\vec{b}\right) = \left(\vec{a}\vec{\nabla}\right)\vec{b} + \left(\vec{b}\vec{\nabla}\right)\vec{a} + \vec{b} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) + \vec{a} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{b}\right)$$

فنكتب

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{q}{c}\left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \frac{q}{c}\vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) - q\vec{\nabla} V \qquad (1.23)$$

($\vec{\nabla} v$ معدوم لأن السرعات العامة مستقلة عن الإحداثيات العامة).

$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ حسبناه في '(1.19) نضعه في (1.22) لتصبح معادلة الحركة – معادلة أولر لاغرانج – :

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A}\right) = \frac{q}{c}\left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \frac{q}{c}\vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) - q\vec{\nabla} V \qquad (1.24)$$

---

[1] نرى بسهولة بالعودة إلى المركبات أن المركبة الأولى للطرف الأيسر هي

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right] = \frac{\partial a_x}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_y}{\partial x} b_y + \frac{\partial a_z}{\partial x} b_z + a_x\frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y\frac{\partial b_y}{\partial x} + a_z\frac{\partial b_z}{\partial x}$$

والمركبة الأولى للحد الأول في الطرف الأيمن هي

$$a_x\frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y\frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z\frac{\partial b_x}{\partial z}$$

في حين أن مركبة $\left(\vec{b}\vec{\nabla}\right)\vec{a}$ الأولى هي

$$b_x\frac{\partial a_x}{\partial x} + b_y\frac{\partial a_x}{\partial y} + b_z\frac{\partial a_x}{\partial z}$$

نضيف إليهما المركبة الأولى لـ $\vec{b} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right)$:

$$b_y\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) - b_z\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)$$

كذلك الأمر بالنسبة للمركبة الأولى $\vec{a} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{b}\right)$.

تلغي الحدود السالبة في هذين الجداءين المزدوجين الحدود التي أضيفت في الحدين الأول والثاني التي لا تقابل أي حد في الطرف الأيسر، ومنه المتطابقة.

إن الكمون المتجهي $\vec{A}$ دالة بـ $\vec{r}$ و t ولدينا من أجل كل مركبة من مركباته $\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + (\vec{\nabla} A_i)\vec{v}$

أي أن

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{r}}$$

ولدينا أخيراً معادلة الحركة

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{q}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - q\vec{\nabla}V + \frac{q}{c}\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$\vec{\nabla} \times \vec{A}$ هي $\vec{B}$ و $-\vec{\nabla}V - \frac{q}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ هي $\vec{E}$ ومنه

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(E + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$$

إنها قوة لورانتس التي أخذناها كمبدأ في الفصل الأول والتي استنتجناها في (3.§3) من تحولات الحقل الكهربائي عند الانتقال من نظمة مرتبطة بالشحنة إلى أخرى تتحرك الشحنة بالنسبة لها ويظهر الحقل المغنطيسي كمفعول نسبوي.

5.1- الحركة في حقل كولومبي

لندرس الآن حركة شحنة q كتلتها m في الحقل الناتج عن شحنة أخرى q'، نفرض كتلتها كبيرة بما يكفي لاعتبارها ساكنة. فالحركة هي حركة في حقل كولومبي $(\vec{A} = 0)$ مركزي ومتناظر

$$V = \frac{q'}{r}$$

طاقة الشحنة هي

$$\varepsilon = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} + \frac{qq'}{r} \qquad (1.25)$$

نكتب هذه الطاقة بدليل العزم الزاوي المنخفظ، بأن نكتب $\vec{p} = \vec{p}_r + \vec{p}_\perp$ حيث $\vec{p}_r$ المركبة في اتجاه الشعاع المتجهي و $\vec{p}_\perp$ عمودية عليه، العزم الزاوي $|M|^2 = |\vec{r} \times \vec{p}|^2 = r^2p_\perp^2$ وبالتالي $p^2 = p_r^2 + \frac{M^2}{r^2}$

وطاقة الشحنة هي

$$\varepsilon = c\sqrt{p_r^2 + \frac{M^2}{r^2} + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r} \qquad (1.25)'$$

حيث وضعنا $qq' = \alpha$. سننطلق لدراسة الحركة من معادلة هاميلتون-جاكوبي (انظر ((6.§3.4).I)

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = -\mathcal{H} \qquad (1.26)$$

$$= L - p_i\dot{q}^i \qquad (1.26)'$$

نبدل $\mathcal{H}$ بقيمتها المعطاة بـ (1.21) مع ملاحظة أن $\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \vec{r}}$ (I.(6.(3.23))) ونكتب معادلة هاميلتون-جاكوبي بأخذ مربع طرفيها على الشكل

$$\left(\vec{\nabla}\mathcal{A} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + qV\right)^2 + m^2c^2 = 0 \qquad (1.27)$$

تصبح هذه المعادلة في حالة الحقل الكولومبي حيث $\vec{A} = 0$، في الإحداثيات القطبية r، φ:

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \frac{\alpha}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \varphi}\right)^2 + m^2c^2 = 0 \qquad (1.28)$$

مسقط $\vec{\nabla}$ على $\vec{r}$ هو $\frac{\partial}{\partial r}$ وعلى العمودي عليه $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$

إن $\mathcal{H}$ مستقل عن الزمن، يأخذ الفعل عندئذ شكل معادلة خطية بالزمن من الشكل $\mathcal{A} = at + b$ (I.(6.(3.24))). الحد الأول هو الطاقة و b دالة بـ φ و r:

$$\mathcal{A} = -\varepsilon t + M\varphi + f(r) \qquad (1.29)$$

إن $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \varphi} = M$ (العزوم العامة هي مشتق الفعل بالنسبة للإحداثيات العامة) وتبعية $\mathcal{A}$ لـ φ هي $M\varphi$، تبعية $\mathcal{A}$ لـ r محددة بالعلاقة (1.28) على أن نضع فيها $\varepsilon = -\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$ ونحذف منها الحد $p = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r}$ المستقل عن r. وهكذا فالفعل بدليل المقدارين المنخفظين ε و M، الطاقة والعزم الزاوي هو

$$\mathcal{A} = -\varepsilon t + M\varphi + \int\left(\frac{1}{c^2}\left(\varepsilon - \frac{\alpha}{r}\right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2c^2\right)^{1/2} dr \qquad (1.30)$$

هذا من جهة، ومن جهة أخرى فإن

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial p_i} = -\dot{q}^i$$

حسب '(1.26)، ومنه معادلة المسار

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial p_i} = -\int \dot{q}^i dt \qquad (1.31)$$

لن نجري الحساب في (1.30) و(1.31) ونكتفي بإعطاء النتائج:

a) لدينا في حالة $|\alpha| < Mc$ المسار

$$\left(c^2M^2 - \alpha^2\right)\frac{1}{r} = c\sqrt{(M\varepsilon)^2 - m^2c^2\left(M^2c^2 - \alpha^2\right)}\cos\left(\varphi\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2M^2}}\right) - \varepsilon\alpha \qquad (1.32)$$

b) والمسار في حالة $|\alpha| > Mc$ هو بالتجيب الزائدي عوضاً عن العادي

$$(\alpha^2 - c^2M^2)\frac{1}{r} = \pm c\sqrt{(M\varepsilon)^2 + m^2c^2(\alpha^2 - c^2M^2)}\ \mathrm{ch}\left(\varphi\sqrt{\frac{\alpha^2}{c^2M^2} - 1}\right) + \varepsilon\alpha \qquad (1.33)$$

c) وفي حالة $|\alpha| = Mc$ فالمسار

$$\frac{2\varepsilon\alpha}{r} = \varepsilon^2 - m^2c^4 - \varphi^2\left(\frac{\varepsilon\alpha}{cM}\right)^2 \qquad (1.34)$$

تكمن الأهمية الأولى في هذه النتائج في معرفة إمكانية سقوط الشحنة q على المركز 'q عندما تكون الشحنتان من إشارتين مختلفتين $\alpha < 0$، فالسؤال غير مطروح في حالة التنابذ، $\alpha > 0$. ترينا معادلة المسار الأولى أن الأمر مستحيل في حالة $|\alpha| < Mc$: يستحيل أن يتناهى الطرف الثاني في (1.32) إلى اللانهاية؛ وهو ما يمكن ملاحظته في صيغة الطاقة '(1.25) إن $\frac{Mc - \alpha}{r} < \varepsilon$ في حالة التجاذب، ويستحيل أن يتناهى طرف المتراجحة إلى $+\infty$، $|Mc - \alpha| > 0$ لا مانع من تناهيه إلى $-\infty$، $Mc < |\alpha|$. وهذا ما تؤيده معادلة المسار (1.33): يمكن للشحنة أن تقع على الشحنة الجاذبة 'q ذات الإشارة المخالفة لإشارة q.

الأهمية الثانية هي في شكل المسار، فالمسار (1.32) مسار منته، تقع q على مسافة منتهية من 'q عندما تكون الطاقة $\varepsilon < mc^2$ وهو ما يقابل الطاقة السالبة في الحالة اللانسبوية، وإلا فمن الممكن أن تبتعد q عن 'q إلى اللانهاية عندما تكون $mc^2 < \varepsilon$، وهو ما يقابل الطاقة الموجبة في الحالة اللانسبوية، انظر (((4.31)،4)،I) وما بعدها الشكل.26. وهذا ما تبينه صيغة الطاقة (1.25) التي تعطينا في الحالتين على الترتيب $\frac{|\alpha|}{rmc^2} + 1 \leqslant \sqrt{\frac{p^2}{m^2c^2} + 1}$، لا يمكن لـ r أن تتناهى إلى اللانهاية في الحالة الأولى، على عكس الحالة الثانية.

أضف إلى ذلك أن المسار المنتهي ليس مغلقاً كما هو عليه الحال في الميكانيك اللانسبوي – المسار الإهليلجي – إذ عندما تتغير الزاوية φ بالمقدار 2π فإن المسافة عن المركز لا تساوي قيمتها البدائية ويأخذ المسار شكل منحنيات مفتوحة مرسومة داخل دائرة، أشكال وردية Rosace.

وضعنا في (1.33) الإشارتين أمام الجذر – في حين لم يكن ذلك ضرورياً في (1.32) لأن الاختيار متوقف على المبدأ المختار للزاوية φ في التجيب، الإشارة + من أجل $\alpha < 0$ (تجاذب) والإشارة – من أجل $\alpha > 0$ (تنابذ). عندما تتجاذب الشحنتان فالمساران (1.33) و(1.34) لولبيان وتسقط q على 'q عندما تتناهى الزاوية φ إلى اللانهاية؛ وهو ما يحدث خلال فترة زمنية منتهية تحسب انطلاقاً من (1.30) وملاحظة أن $\frac{\partial A}{\partial \varepsilon}$ مقدار ثابت : التكامل متقارب في (1.30) عندما تتناهى المسافة r بين الشحنتين إلى الصفر.

6.1- الحساب التقريبي للاغرانجي

إن لاغرانجي الجسيمات المتفاعلة في الميكانيك النيوتوني تابع لإحداثيات وسرعات هذه الجسيمات في ذات اللحظة لأن هذا الميكانيك يقبل مفهوم التفاعل الآني، التفاعل عن بعد الذي يقبل بانتشار التفاعل بسرعة لامنتهية، خلافاً لما هو عليه الحال في الكهرطيسية والنسبية الخاصة، وليدتها، التي ترفض هذا المفهوم (اللافيزيائي) وتضع حداً أعلى لسرعة انتشار التفاعل $-c-$ وتعبر عن ذلك بالكمون المؤخر المرتبط بحركة الجسيمات المتفاعلة وسرعتها. فالتفاعل تقليدي صرف عندما تنعدم السرعة ولاغرانجي الشحنات المتفاعلة في الكهربائية الراكدة هو كالمعتاد الفرق بين الطاقة الحركية الكلية وطاقة التفاعل الكهربائي الراكد زوجاً زوجاً (الطاقة الكامنة)

$$L = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{R_{ij}} \qquad (1.35)$$

حيث m_i كتل الجسيمات و q_i شحنتها و R_{ij} المسافة بين الشحنتين i و j.

إن الكمون $(V, \vec{A})$ في (1.18) عندما نكتبه من أجل الشحنة q_i هو الكمون الذي أحدثته الشحنات الأخرى q_j في نقطة وجود q_i، ليس في لحظة وجودها t وإنما في زمن سابق هو $t - \frac{R_{ij}}{c}$ وهو ما يجعل التوصيف الصارم لتفاعل هذه الشحنات بدالة تابعة للإحداثيات والسرعات المتزامنة أمراً مستحيلاً. والسؤال المطروح هو إلى أي حد يمكن كتابة التفاعل بسرعات متزامنة صغيرة بالنسبة لسرعة الضوء بأن نتوقف عند الحدود المتناسبة مع $\frac{v^2}{c^2}$ ونهمل ما بعدها ؟

يجب أن ننشر الكمون المتأخر في جوار الزمن t الذي نقيس فيه التفاعل متوقفين عند الحد الثاني بـ $\frac{1}{c^2}$؛ نكتب أي دالة $f\left(t - \frac{R}{c}\right)$ على الشكل

$$f\left(t - \frac{R}{c}\right) = f(t) - \frac{R}{c}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{R^2}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{6}\frac{R^3}{c^3}\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} + \dots$$

نتوقف عند المشتق الثاني من أجل الكمون السلمي V وعند المشتق الأول فقط من أجل الكمون المتجهي $\vec{A}$ لوجود $\frac{1}{c}$ في تعريفه ولوجود $\frac{1}{c}$ في اللاغرانجي (1.18)

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{J}(t - R/c)}{R} d\tau \quad ; \quad V = \int \frac{\rho(t - R/c)}{R} d\tau$$

وهكذا فإن

$$V = \int \frac{\rho d\tau}{R} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \rho d\tau + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R\rho d\tau$$

ρ محسوبة في اللحظة t.

أخرجنا إشارة التفاضل من تحت إشارة التكامل نظراً لخطية العمليتين. الحد الثاني في هذا النشر معدوم لأن $\int \rho d\tau$ هي الشحنة الكلية المنحفظة ويبقى

$$V = \int \frac{\rho d\tau}{R} + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R\rho d\tau \tag{1.36}$$

لدينا كذلك

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{J}d\tau}{R} = \frac{1}{c}\int \frac{\rho\vec{v}d\tau}{R} \tag{1.37}$$

نكتب هاتين الصيغتين من أجل شحنة نقطية q على الشكل

$$V = \frac{q}{R} + \frac{q}{2c^2}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} \tag{1.36'}$$

$$\vec{A} = \frac{q\vec{v}}{cR} \tag{1.37'}$$

سنستعمل حرية اختيار $\vec{A}$ بإضافة غراديان دالة ما ψ إليه وهو ما يضيف إلى الكمون السلمي المقدار $-\frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}$ (كما رأينا في (3.§3.2)) للتخلص من الحد الثاني في (1.36) والإبقاء على كمون سلمي راكد. يكفي أن نأخذ

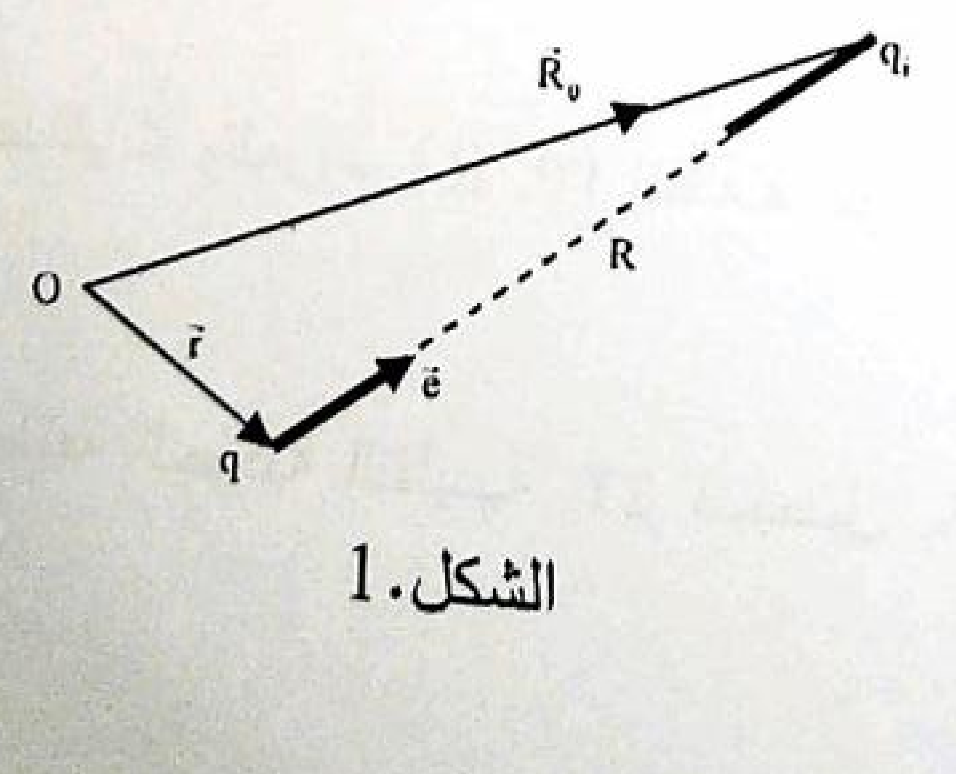
$$\psi = \frac{q}{2c}\frac{\partial R}{\partial t}$$

وهكذا يحل الكمونان التاليان محل '(1.36) و'(1.37)

$$V = \frac{q}{R} \tag{1.36''}$$

$$\vec{A} = \frac{q\vec{v}}{cR} + \frac{q}{2c}\vec{\nabla}\frac{\partial R}{\partial t} \tag{1.37''}$$

نحسب $\vec{\nabla}\frac{\partial R}{\partial t}$ ونضع النتيجة في (1.18) لنحصل على اللاغرانجي المطلوب : كل شيء محسوب في نفس اللحظة t. إن R هو بعد النقطة التي توجد فيها الشحنة q_i عن الشحنة q التي تنتج الحقل (لا نضع أي دليل j على هذه الشحنة حتى لا نثقل الكتابة). نعين وضع الشحنة q_i والشحنة q باختيار مبدأ ما o لتعيين الأشعة الموجهة. ليكن $\vec{R}_0$ الشعاع الموجه الذي يعين وضع الشحنة q_i و $\vec{r}$ الشعاع الموجه الذي يعين وضع q و $\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{r}$ ؛ $\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = -\vec{v}$، الشكل 1.



الشكل 1.

لدينا

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}R = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{R}}{R} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{e}$$

حيث $\vec{e}$ المتجهة الواحدية على المتجهة $\vec{R}$؛ مشتقها

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{e} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{R}}{R} = \frac{-\vec{v}R - \vec{R}\frac{\partial R}{\partial t}}{R^2} = \frac{-\vec{v} + \vec{e}(\vec{e}\cdot\vec{v})}{R}$$

نضربها بـ $\vec{e} = \frac{\vec{R}}{R}$ فيبقى R في المخرج، $\frac{\partial R}{\partial t} = -\vec{e}\vec{v}$ ومنه $R\frac{\partial R}{\partial t} = \vec{R}\cdot\dot{\vec{R}}$ و $R^2 = \vec{R}\cdot\vec{R}$ ذلك أن

لنجد الصيغة النهائية لـ $\vec{A}$

نضع هذا المقدار في "(1.37)

$$\vec{A} = \frac{q\left(\vec{v} + \vec{e}(\vec{e}\cdot\vec{v})\right)}{2cR} \qquad (1.37)'''$$

فيحل اللاغرانجي التالي R_{ij}. والتي تبعد عنها المسافة q_i المختلفة عن q_j من أجل الشحنات $\vec{A}$ نكتب

الذي كتبناه من أجل (1.18) محل المتفاعلة النقطية الشحنات أجل من t اللحظة ذات في المحسوب

شحنة واحدة

$$L = \sum_i -m_i c^2\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\frac{q_i q_j}{R_{ij}} + \frac{q_i\vec{v}_i}{c}\cdot\frac{q_j\vec{v}_j + \vec{e}_{ij}(\vec{e}_{ij}\cdot\vec{v}_j)}{2c\,R_{ij}} \qquad (1.38)$$

والتوقف عند $\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}$ نحصل على اللاغرانجي المطلوب بنشر الجذر $\vec{R}_{ij}$ المتجهة الواحدية على $\vec{e}_{ij}$

الحد الثالث بـ $\frac{v^4}{c^4}$ نظراً لوجود c^2 في الصورة لدينا أخيراً

$$L = \sum_i\left(\frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{m_i v_i^4}{8c^2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{q_i q_j}{R_{ij}} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{q_i q_j}{2c^2 R_{ij}}\left[\vec{v}_i\vec{v}_j + (\vec{v}_i\cdot\vec{e}_{ij})(\vec{e}_{ij}\cdot\vec{v}_j)\right] \qquad (1.39)$$

إن الحدين الأولين هما الطاقة الحركية التقليدية للشحنات مضافاً إليها التصحيح النسبوي المتوقف عند $\frac{1}{c^2}$؛ الحد الثالث هو الطاقة الكامنة الراكدة كما في (1.35) والحد الأخير هو حساب الكمون المؤخر مع وقف النشر عند الحد الثالث $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$. يطلق على هذا اللاغرانجي اسم لاغرانجي داروين Darwin، فهو الذي وضعه عام 1922.

يمكننا كتابة الهاميلتوني بدليل الإحداثيات والعزوم $(\vec{P}, \vec{R})$ انطلاقاً من العلاقة

$$\mathscr{H} = \sum_i p_i \dot{q}^i - L$$

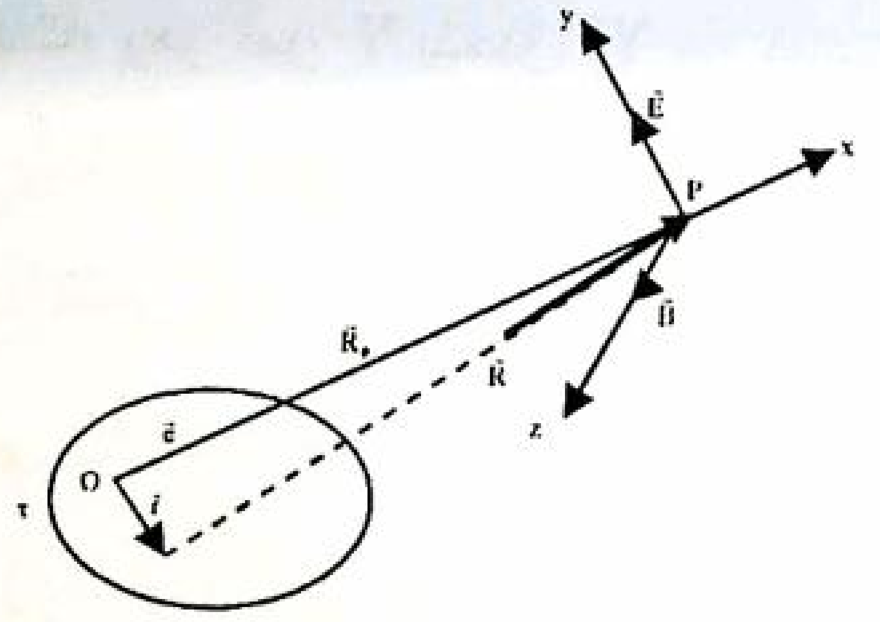
يعطينا الحد الأول ضعف قيمة الطاقة الحركية التقليدية $2T$ فنحصل بكتابة L بدليل $p = mv$ عوضاً عن v وطرحه من $2T$ على

$$\mathscr{H} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{R_{ij}} - \sum_i \frac{p_i^4}{8c^2 m_i^3} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{2c^2 m_i m_j}\left[\vec{p}_i\vec{p}_j + \left(\vec{p}_i \cdot \vec{e}_{ij}\right)\left(\vec{p}_j \cdot \vec{e}_{ij}\right)\right] \quad (1.40)$$

2. إشعاع الشحنات المتحركة عن بعد

1.2– إشعاع الشحنات على مسافات كبيرة

لننظر إلى الحقل الناتج عن نظمة شحنات متحركة على مسافات كبيرة بالنسبة لأبعاد النظمة. نختار مبدأ الإحداثيات O نقطة ما داخل النظمة، وليكن $\vec{R}_0$ الشعاع المتجه من النقطة O إلى النقطة P حيث يرصد الحقل و $\vec{r}$ الشعاع المتجه من Oإلى الحجم العنصري $d\tau$ حيث الشحنة العنصرية $\rho d\tau$. نعين بعد هذه الشحنة عن P بالشعاع المتجهي $\vec{R}$، الشكل.2



الشكل.2

لدينا

$$\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{r}$$

و

$$R^2 = R_0^2 + r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{R}_0$$

نهمل الحدود من الدرجة الثانية بـ r في هذه العلاقة والعلاقة التي تليها بالتوقف عند الحد الثاني في حساب الجذر التربيعي

$$R^2 \simeq R_0^2\left(1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{R}_0}{R_0^2}\right)$$

$$R \simeq R_0\left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}_0}{R_0^2}\right) = R_0 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}_0}{R_0} = R_0 - \vec{r} \cdot \vec{e} \quad (2.1)$$

حيث $\vec{e}$ المتجهة الواحدية على OP. نكتب الكمون المؤخر ((3.(4.20,21) بالوحدات السنتية الكهرراكدة ($4\pi\varepsilon_0 = 1$، $\frac{\mu_0}{4\pi} = \frac{1}{c^2}$ و $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هنا $c\vec{A}$ و $c\vec{B}$ في الوحدات الدولية)

$$V(P,t) = \int_\tau \frac{\rho\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} d\tau$$

$$\vec{A}(P,t) = \frac{1}{c}\int_\tau \frac{\vec{J}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} d\tau$$

نكتب هاتين العلاقتين بأن نستبدل المسافة المتغيرة R في المخرج بمسافة وسطية R_0 مهملين المسافة $\vec{r} \cdot \vec{e}$ ولكننا لن نهمل تغيرات كثافة التيار $(\rho, \vec{J})$ خلال الزمن $\frac{\vec{r} \cdot \vec{e}}{c}$، ولذا سنكتب

$$V(P,t) = \frac{1}{R_0}\int \rho\left(t - \frac{R_0}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{e}}{c}\right) d\tau \tag{2.2}$$

$$\vec{A}(P,t) = \frac{1}{cR_0}\int J\left(t - \frac{R_0}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{e}}{c}\right) d\tau \tag{2.3}$$

لنضف أننا سننظر إلى الموجة الصادرة عن الشحنات في النقطة P كموجة مستوية، مما يعني أننا سنعتبر أن طول الموجة مقدار ثابت، وهو أمر لا يتحقق إلا إذا كانت المسافة R كبيرة بالنسبة لأطوال الموجة الصادرة عن الشحنات. رأينا أن الحقلين الكهربائي والمغنطيسي متعامدان في حالة الموجة المستوية وأنهما يشكلان مع اتجاه انتشار الموجة، $\vec{e}$ هنا، ثلاثية مباشرة و $|\vec{B}| = |\vec{E}|$. رأينا كذلك أنه من الممكن أن نختار المكون المتجهي $\vec{A}$ المحقق لـ $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. ينتج عن هذا الاختيار أن $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ حسب الشرط الإضافي ((3.(3.11)، V مستقل عن الزمن ولا يسهم في الإشعاع. لدينا إذاً عوضاً عن ((3.(3.9)

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\bigg|_{t-\frac{R_0}{c}} \tag{2.4}$$

ثم إن كون الموجة مستوية يعني أن المقادير التي نحن في صددها لا تتوقف إلا على إحداثية واحدة، x، باختيارنا المحور Ox في اتجاه OP؛ ينتج عن اختيار $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ و $A(x)$ أن

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0$$

ومن معادلة الموجة ببعد واحد

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} = 0$$

أن $\frac{\partial A_x}{\partial t}$ مقدار ثابت، ويقابل حسب (2.4) حقلاً كهربائياً ثابتاً في اتجاه انتشار الموجة (طولانياً) لا صلة له بالموجة الكهرطيسية. سنفرض إذاً أن $A_x = 0$ و

$$\vec{A} = (0, A, 0) \qquad (2.5)$$

نظراً لتوازي $\vec{A}$ و $\vec{E}$ حسب (2.4) واختيارنا اتجاه $\vec{E}$ العمودي على Ox اتجاه محور Oy، ومنه الحقل المغنطيسي في الاتجاه العمودي على Ox و Oy

$$B_z = \left.\frac{\partial A_y}{\partial x}\right|_{R_0} = \left.\frac{\partial A_y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{t-\frac{R_0}{c}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t}$$

أو

$$\vec{B} = -\frac{\vec{e}}{c} \times \vec{A}' = \frac{1}{c}\vec{A}' \times \vec{e} \qquad (2.6)$$

حيث $\vec{A}'$ مشتق الكمون المتجهي بالنسبة للزمن محسوباً في اللحظة المؤخرة $t - \frac{R_0}{c}$ و

$$\vec{E} = \left(\vec{B} \times \vec{e}\right) = \frac{1}{c}\left(A' \times \vec{e}\right) \times \vec{e} \qquad (2.7)$$

لنلاحظ أن $\vec{E}$ في هذه العلاقة متناسب مع $\frac{1}{R_0}$ حسب (2.3) وليس مع $\frac{1}{R_0^2}$ كما هو عليه الحال في الكهربائية الراكدة.

لنلاحظ كذلك أن $\vec{A}'$ عندما تتكون النظمة المتحركة من شحنة نقطية واحدة هي كمون لينارد–فيشرت المعطى بـ ((4.31).3).

إن الطاقة المشعة في النقطة P عبر عنصر زاوية مجسمة $d\Omega$ هي تدفق الطاقة، متجهة بوينتينغ، مضروباً بعنصر السطح في هذه النقطة. تسمى هذه الطاقة شدة الإشعاع نرمز لها بـ dI. لدينا

$$dI = \left(\frac{1}{4\pi}c\vec{E} \times \vec{B}\right)R_0^2 d\Omega = \frac{cB^2R_0^2}{4\pi}d\Omega \qquad (2.8)$$

وبما أن $|B|$ متناسبة مع $\frac{1}{R_0}$ فإن شدة الإشعاع مستقلة عن البعد عن مصدر الإشعاع : لا تتراكم الطاقة أو تتناقص في أي حجم من الفضاء عندما تكون الموجة مستوية.

2.2– إشعاع ثنائي القطب

نريد في هذا التقريب إهمال تغيرات كثافة التيار خلال الفترة الزمنية $\frac{\vec{r} \cdot \vec{e}}{c}$ في المعادلتين (2.3) و(2.4). ولكن متى يمكننا فعل ذلك؟

لتكن T دورة الإشعاع، إنها الزمن الذي يتغير فيه توزع الشحنات في النظمة بشكل محسوس؛ وليكن a مقداراً من رتبة أبعاد النظمة، $a = \langle \vec{r} \cdot \vec{e} \rangle$. يجب أن يكون الزمن $\frac{\vec{r} \cdot \vec{e}}{c}$ مهملاً أمام T حتى نستطيع التخلي عنه

وعليه فإن شرط إهمال الزمن $\frac{\vec{r}\cdot\vec{e}}{c}$ هو

$$\frac{\vec{r}\cdot\vec{e}}{c} \approx \frac{a}{c} \ll T \quad (2.9)$$

ولكن $T = \frac{\lambda}{c}$ ؛ وعليه فإن شرط إهمال الزمن

$$a \ll \lambda \quad (2.9)'$$

يجب إذاً أن تكون أبعاد النظمة صغيرة أمام طول الموجة المشعة. ومن جهة أخرى فإن دورة الإشعاع متناسبة مع أبعاد النظمة مقسومة على رتبة سرعتها

$$T \sim \frac{a}{v}$$

بحيث يصبح شرط الإهمال (2.9)

$$v \ll c \quad (2.9)''$$

يجب أن تكون سرعات الشحنات صغيرة أمام سرعة الضوء.

نفرض هذا الشرط محققاً، نفرض كذلك، كما فعلنا في الرقم السابق، أن المسافة التي تفصل نقطة الرصد P عن النظمة المشعة كبيرة أمام أبعاد النظمة وأمام طول الموجة. يطلق على النقاط P التي تحقق هذا الشرط اسم قطاع الإشعاع. يقع قطاع الإشعاع، على سبيل المثال، من أجل موجة ضوئية صادرة عن حبابة $\lambda \sim 6000A°$ على بعد 0,1 سم عن الحبابة، ويصل إلى أبعد من 100كم من أجل أطوال الموجة الكيلومترية التي تصدرها محطات الراديو. نستطيع في هذه الشروط اعتبار الموجة المشعة موجة مستوية. يأخذ الكمون المتجهي (2.3) الشكل

$$\vec{A}(P,t) = \frac{1}{cR_0}\int \vec{J}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)d\tau \quad (2.10)$$

لم تعد قيمة $\vec{J}$ تتوقف على متغيرات التكامل (x, y, z). نكتب (2.10) في حالة التوزع المنفصل للشحنات على الشكل

$$\vec{A}(P,t) = \frac{1}{cR_0}\sum_i q_i\vec{v}_i \quad (2.10)'$$

الجمع من أجل كل شحنات النظمة ذات السرعات $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ ؛ والجمع هو $\frac{d}{dt}\sum q_i\vec{r}_i$. أطلقنا منذ الفصل الأول (تعريف.2) على $\sum_i q_i\vec{r}_i$ اسم عزم ثنائي القطب لمجموع الشحنات. نرمز له هنا بـ $\vec{p}$ ولمشتقه بالنسبة للزمن بـ $\dot{\vec{p}}$ ونكتب

$$\vec{A} = \frac{\dot{\vec{p}}}{cR_0} \quad (2.10)''$$

ونحصل بسهولة بفضل (2.6) و(2.7) على

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2R_0}\ddot{\vec{p}} \times \vec{e} \quad (2.11)$$

و

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2R_0}\left(\ddot{\vec{p}} \times \vec{e}\right) \times \vec{e} \qquad (2.12)$$

إنهما القيمتان اللتان حصلنا عليهما في ((3.(4.23)) و((3.(4.26)) من أجل ثنائي قطب وحيد بإهمال المقادير المتناسبة مع $\vec{p}$ و $\dot{\vec{p}}$ التي لا تشترك بالإشعاع (الوحدات دولية في الفصل الثالث). ترينا العلاقتان (2.11) و(2.12) بوضوح أن الشحنات غير المتسارعة (حركة مستقيمة متنظمة $\vec{v}$ = ثابت) لا تشع. وهو ما يتفق مع مبدأ النسبية : الشحنات ذات الحركة المستقيمة المنتظمة ساكنة في مقرن غاليلي K' مرتبط بها، لا تشع في هذا المقرن ولا في أي مقرن غاليلي آخر.

نحسب شدة الإشعاع كما في (2.8)، انطلاقاً من (2.11) و(2.12) حيث طويلة كل من الحقلين هي $\frac{\left|\ddot{\vec{p}} \times \vec{e}\right|}{c^2R_0}$

$$dI = \frac{1}{4\pi}c\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)R_0^2d\Omega = \frac{1}{4\pi \cancel{R_0^2} c^3}\left(\ddot{\vec{p}} \times \vec{e}\right)^2 \cancel{R_0^2}d\Omega = \frac{cB^2}{4\pi}R_0^2d\Omega \qquad (2.13)$$

نكتب عنصر الشدة هذا بدليل الزاوية التي يعملها التسارع $\ddot{\vec{p}}$ مع $\vec{e}$ (اتجاه OP) ونكامل الحد الثاني من المساواة على كل عناصر الزاوية المجسمة $d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta$ لنجد أن شدة الإشعاع الكلية، نظراً لأن $\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = -\int_0^\pi\left(1 - \cos^2\theta\right)d\cos\theta = \frac{4}{3}$، هي

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\vec{p}}^2 \qquad (2.13)'$$

نلاحظ أنه عندما يتعلق الأمر بثنائي قطب وحيد (شحنة q متحركة) فإن $\vec{p} = q\vec{r}$، $\ddot{\vec{p}} = q\vec{a}$ حيث $\vec{a}$ تسارع الشحنة وإشعاع هذه الشحنة الكلي هو

$$I = \frac{2q^2\left|a\right|^2}{3c^3} \qquad (2.14)$$

نلاحظ أيضاً أن الشحنات التي تتمتع بخاصة ثبات نسبة الشحنة للكتلة – ثابت $= \mathscr{C} = \frac{q_i}{m_i}$ أياً كانت i – لا تملك إشعاعاً ثنائي القطب. ذلك أن

$$\vec{p} = \sum_i q_i\vec{r}_i = \sum_i \frac{q_i}{m_i}m_i\vec{r}_i$$
$$= C\sum_i m_i\vec{r}_i = \mathscr{C}\vec{R}M$$

حيث M الكتلة الكلية، $M = \sum_i m_i$، و $\vec{R}$ الشعاع المتجه لمركز الكتلة. أجرينا الحساب في إطار الميكانيك التقليدي لأن v ⟨⟨ c. $\ddot{\vec{p}} = 0$ لأن حركة مركز الكتلة حركة مستقيمة منتظمة.

لنفرض الآن أن ثنائي القطب يبث موجة كهرطيسية مستوية (وحيدة اللون) ترددها ω تلقاها ولنحسب شدة الموجة التي سيصدرها. إن أبسط نموذج ميكانيكي لثنائي القطب اللانسبوي v ⟨⟨ c هو الهزاز التوافقي (المقسور والمتخامد) كما رأينا في دروس الميكانيك

$$mx'' + \gamma x' + kx = qE_0 e^{-i\omega t}$$

(I.(4.(2.32))) والحل دالة جيبية والاستطالة القصوى هي

$$x_0 = \frac{qE_0/m}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ ،} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{m}$$

عزم الهزاز، وهو عزم دوري

$$p = qx_0 e^{-i\omega t}$$

نرمز للمقدار qx_0 بـ α والعزم المؤخر في التقريب الذي اعتمدناه

$$p = \alpha e^{-i\omega\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}$$

$$\left|\ddot{\vec{p}}\right| = \alpha\omega^2 = \alpha\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2$$

نضع هذا المقدار في '(2.13) لنجد أن شدة الإشعاع الذي يبثه الهزاز هي

$$\frac{2\alpha^2 c}{3}(2\pi)^4 \frac{1}{\lambda^4} \qquad (2.15)$$

إنها متناسبة مع $\frac{1}{\lambda^4}$، وهو محتوى قانون ريلي الشهير الذي يفسر زرقة السماء، بث الذرات الممثلة بهزازات توافقية للأشعة التي تتلقاها : إن شدة إشعاع اللون الأزرق أقوى بـ 2^4 مرة من شدة إشعاع اللون الأحمر (طرفي طيف اللون الطبيعي) $\lambda_r = 2\lambda_b$ (b أزرق و r أحمر). يفسر هذا القانون أيضاً احمرار الشمس والقمر عند الشروق والغروب؛ فمسار النور في هاتين الفترتين طويل جداً أكبر بحوالي 20 مرة من مساره عندما تكون الشمس في السمت، يحيد اللون الأزرق عن مساره أكثر بكثير من اللون الأحمر نتيجة التشتت (الانتثار) الشديد الذي يخضع له.

لنستعمل كذلك نموذج الهزاز لحساب الطاقة التي تفقدها الشحنة بفعل إشعاعها (تفقدها الذرة التي نظرنا إلى حركة الإلكترون التقليدية فيها كحركة ثنائي قطب).

إن طاقة الهزاز الكلية هي ضعف طاقته الحركية كما نعلم وتساوي عندما نهمل التخامد $e^{-\frac{t}{\tau}}$، $\omega \approx \omega_0$

$$\frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \qquad (1)$$

والقيمة الوسطية لتسارعه هي، حسب (((I.(4.(2.41)))،

$$\left\langle x''^2 \right\rangle = \omega_0^4 \left\langle x^2 \right\rangle = \frac{\omega_0^4 x_0^2}{2} \qquad (2)$$

سمينا عامل نوعية الاهتزاز نسبة طاقته المخزونة على الطاقة المبددة خلال دورة، إي الاستطاعة P، وكتبنا $P = \left(\frac{dE}{dT}\right)$ (I.(4.(2.(44-45)))

$$Q = \frac{\omega\langle E\rangle}{\langle P\rangle} = \omega\tau \qquad (3)$$

نضع $\langle E\rangle$ المعطاة في (1) و$\langle P\rangle$ (الإشعاع الكلي) المعطاة بـ (2.14) مع استبدال $|a|^2$ بالتسارع الوسطي المعطى بـ (2) لنجد

$$Q = \frac{\frac{1}{2}m\omega_0^3 x_0^2}{2q^2\omega_0^4 x_0^2/6c^3}$$

وبوضع $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda}$

$$Q = \frac{3\lambda}{\left(\frac{q^2}{mc^2}\right)\cdot 4\pi} \qquad (4)$$

إن Q بدون أبعاد ولذا يظهر المقدار $r_0 = \frac{q^2}{mc^2}$ على شكل طول، وهو كذلك في الأبعاد السغثية التي نستعملها في هذا الفصل ويقابل، من أجل شحنة الإلكترون $q = e$ وكتلته $m = m_e$، نصف قطر الإلكترون الذي وجدناه في ((5.15).3) وحددنا قيمته بالفيرمي $r_0 = 2{,}82$. تساوي Q من أجل موجة تصدرها ذرة الصوديوم متر $\lambda = 6\cdot10^{-7}$.

$$Q \simeq 5\cdot10^7$$

أي أن مدة حياة إشعاع الذرة، الفترة اللازمة لتخامد طاقتها إلى e^{-1} هي، نظراً لأن $Q = \frac{\langle E\rangle\omega}{d\langle E\rangle/dt}$،

$$\langle E\rangle = \langle E_0\rangle e^{\frac{\omega t}{Q}}$$

$$t = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q\lambda}{2\pi c} = \frac{5\cdot10^7\cdot6\cdot10^{-7}}{2\pi\cdot3\cdot10^{10}} \simeq 10^{-8}\text{ ثانية}$$

ثم إن التخامد γ يحدد عرض منحني الإرنان – عرض تغيرات ω حول ω_0 – ومنه عرض خط الطيف

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi c}{\omega^2}\Delta\omega = \frac{2\pi c}{\omega_0^2}\frac{1}{\tau}$$

ومن الطرف الأخير في (3) ووضع $\omega \simeq \omega_0$

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi c}{\omega^2}\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{Q}$$

وحسب (4) لدينا بالمتر

$$\Delta\lambda = \frac{4\pi r_0}{3} = 1{,}18\cdot10^{-14}$$

3.2- العزم رباعي الأقطاب

لنكتب الكمون السلمي الناتج عن شحنة q تبعد مسافة R عن نقطة الرصد P، و r عن نقطة المبدأ الواقعة داخل نظمة الشحنات وننشره بجوار النقطة R_0، $|\vec{R}| = |\vec{R}_0 - \vec{r}|$

$$V_P(R) = \frac{q}{|\vec{R}_0 - \vec{r}|} = V(|\vec{R}_0|) - \vec{r}\vec{\nabla}V_{\vec{R}_0} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2 V}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} + O(3) \quad (2.16)$$

$X_\alpha, X_\beta, X_\gamma$ إحداثيات $\vec{r}$ و $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma$ هي إحداثيات $\vec{R}_0$؛ متوقفين عند الحد الثاني في النشر التايلوري؛ هذا من أجل $\alpha = 1, 2, 3$ $\sum_\alpha x_\alpha \frac{\partial V}{\partial x_\alpha}$ تغنينا هذه الكتابة عن كتابة المشتقات الأولى على الشكل $\vec{R}_0$؛ من أجل i شحنة q_i تبعد عن المبدأ المسافة $\vec{r}_i$ شحنة واحدة من النظمة، ومنه الكمون السلمي، حسب مبدأ التوضيع،

$$V_P(R) = V(|\vec{R}_0|) - \sum_i \vec{r}_i\vec{\nabla}_{\vec{R}_0} V + \frac{1}{2}\sum_i\sum_{\alpha,\beta} x_{\alpha_i} x_{\beta_i} \frac{\partial^2 V}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} + O(3)$$

$$V^0 + V^{(1)} + V^{(2)} + O(3)$$

لكن $\vec{\nabla}_{R_0} V$ من أجل شحنة q_i هو $-q_i \frac{\vec{R}_0}{R_0^3}$ وبالتالي فإن الحدود بالمشتقات الأولى هي

$$V^{(1)} = \frac{\vec{R}_0}{R_0^3}\sum_i q_i \vec{r}_i = \frac{\vec{R}_0}{R_0^3}\vec{p}$$

حيث $\vec{p}$ عزم ثنائي القطب تعريفاً الذي يعيدنا إلى العزم المألوف لشحنتين مختلفتي الإشارة تفصلهما $\vec{d}$ في حال تساوي هذين المقدارين بالقيمة المطلقة، ولدينا، كما في حساب مركز الكتلة، مركز الشحنات الموجبة $\vec{r}^+ = \frac{\sum q_i \vec{r}_i}{\sum q_i}$ والشحنات السالبة $\vec{r}^- = \frac{\sum |q_i| \vec{r}_i}{\sum |q_i|}$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{j} q_i \vec{r}_i - \sum_{i>j} |q_i| \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{j} q_i \vec{r}^+ - \sum_{i>j} |q_i| \vec{r}^- = \sum_i |q_i| (\vec{r}^+ - \vec{r}^-) = q\vec{d}$$

$$q = \sum_i^{j} q_i^+ = \sum_{i>j} |q_i^-|$$

نلاحظ لحساب $V^{(2)}$ أن $\frac{\partial^2 V}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} = \frac{3X_\alpha X_\beta}{R_0^5}$ من أجل $\alpha \neq \beta$، $\frac{\partial^2 V}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} = -\frac{1}{R_0^3} + \frac{3X_\alpha^2}{R_0^5}$ من أجل $\alpha = \beta$ (الذي يعطي بالجمع على الإحداثيات الثلاث $\nabla^2 \frac{1}{R_0} = 0$). وهكذا فإن مجموع المشتقات من الدرجة الثانية هو

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{3X_\alpha X_\beta}{R_0^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0^3} \quad (2.17)$$

ثلاثة حدود بـ $-\frac{1}{R_0^3}$ يقابلها في المتغيرات x_α $-r^2$ التي نكتبها $\sum_{\alpha,\beta}\frac{r^2}{3}\delta_{\alpha\beta}$ ؛ لذا نكتب المقدار $x_\alpha x_\beta$ على الشكل $\sum x_\alpha x_\beta - \frac{r^2}{3}\delta_{\alpha\beta}$.

وهكذا فإن $V^{(2)}$ هو

$$V^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_i q_i \sum_{\alpha_i,\beta_i}\left(x_{\alpha_i}x_{\beta_i} - \frac{r_i^2}{3}\delta_{\alpha_i\beta_i}\right)\left[\frac{3X_{\alpha_i}X_{\beta_i}}{R_0^5} - \frac{\delta_{\alpha_i\beta_i}}{R_0^3}\right] \quad (2.18)$$

تعريف 1:

يسمى المقدار

$$D_{\alpha\beta} = \sum_{i,\alpha,\beta} q_i\left(3x_{\alpha_i}x_{\beta_i} - r_i^2\delta_{\alpha_i\beta_i}\right) \quad (2.19)$$

عزم نظمة الشحنة رباعي الأقطاب[2] (يدخل مربع المسافات في حساب العزوم).

إنه تانسور من الرتبة الثانية في الفضاء الإقليدي، مصفوفة بثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة كتبناه على هذا الشكل لنبين أن مجموع عناصره القطرية معدومة $\sum_{\alpha=\beta} D_{\alpha\beta} = 0$. نكتب $V^{(2)}$ بدليل هذا التانسور على شكل تقليص لجداء تانسورين من الرتبة الثانية، إنه المقدار السلمي

$$V^{(2)} = \frac{1}{6}D_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{1}{R_0} = \frac{1}{6}D_{\alpha\beta}\left(\frac{3X_\alpha X_\beta}{R_0^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0^3}\right) \quad (2.20)$$

لنلاحظ أن $\sum_{\alpha,\beta} D_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}$ يساوي مجموع العناصر القطرية المعدوم وأن $X_\alpha X_\beta = R_0^2\vec{e}_\alpha\vec{e}_\beta$ حيث $\vec{e}_\alpha$ ، $\vec{e}_\beta$ المتجهات الواحدية على محاور الإحداثيات وبالتالي

$$V^{(2)} = \frac{1}{2}D_{\alpha\beta}\frac{\vec{e}_\alpha\vec{e}_\beta}{R_0^3} \quad (2.20)'$$

إن التانسور $D_{\alpha\beta}$ متناظر كما يتضح من تعريفه، يمكن بالتالي وضعه على شكل قطري، أو بتعبير آخر تعيين محاوره الرئيسية على غرار ما فعلناه في دروس الميكانيك للحصول على محاور تانسور العطالة الرئيسية. وبما أن مجموع العناصر القطرية يساوي الصفر فإن اختيار أحد المحاور الرئيسية الثلاثة اعتباطي. وعليه فإن وجود محور تناظر لنظمة الشحنات يجعل منه محوراً رئيسياً، وليكن Oz، يصبح عندئذ اختيار المحورين الآخرين في المستوي xy اعتباطياً ولدينا في كل الأحوال

$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz}$$

نرمز لـ D_{zz} بـ D وتأخذ (2.20) بدليل D والزاوية θ بين اتجاه $\overline{OR_0}$ و $\vec{e}_z$ الشكل

---

[2] نقول عندما ننشر الكمون السلمي V في جوار القيمة R_0 على الشكل $V = V^0 + V^{(1)} + V^{(2)} + \dots$ حيث $V^{(n)}$ متناسب مع $1/R_0^{n+1}$ إنه نشر متعدد الأقطاب $V^{(1)}$ هو كمون النظمة ثنائي القطب، $V^{(2)}$ كمونها رباعي الأقطاب، الخ.

$$V^{(2)} = \frac{1}{6R_0^5}\left[-\frac{3}{2}D\left(x^2+y^2\right)+3Dz^2\right]$$
$$= -\frac{1}{4R_0^5}D\left(R_0^2 - 3R_0^2\cos^2\theta\right) = \frac{D}{4R_0^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \qquad (2.21)$$

لنكتب المتغير $u = \cos\theta$ و $(3u^2 - 1)$ متناسب مع المشتق الثاني لـ $(u^2 - 1)^2$. يطلق على كثيرات الحدود المتناسبة مع المشتق من الدرجة ℓ للمقدار $(u^2 - 1)^\ell$ اسم كثيرات حدود لوجاندر، نرمز لها بـ P_ℓ. تلعب كثيرات الحدود هذه دوراً هاماً في الميكانيك الكمومي لصلتها بالدالات التوافقية الكروية ((IV.(3.§1.6). نكتفي هنا بالإشارة إلى أن كتابتنا لـ

$$V^{(2)} \sim P_2(\cos\theta) \qquad (2.21)'$$

يشير إلى أنه بإمكاننا الذهاب في نشر V إلى اللانهاية بأن نكتب

$$\frac{1}{\left|\vec{R}_0 - \vec{r}\right|} = \frac{1}{\sqrt{R_0^2 + r^2 - 2rr\cos\chi}} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r^\ell}{R_0^{\ell+1}}P_\ell(\cos\chi) \qquad (2.22)$$

حيث χ الزاوية بين $\vec{R}_0$ و $\vec{r}$.

4.2- الإشعاع رباعي الأقطاب (الكهربائي) وثنائي القطب (المغنطيسي)

لنعد إلى الكمون المتجهي في (2.3) وننشر التكامل كدالة بالمتغير t في جوار الزمن المؤخر $t' = t - \frac{R_0}{c}$ فنكتب كثافة الشحنة تحت إشارة التكامل على النحو التالي

$$\vec{J}\left(t' + \frac{\vec{r}\cdot\vec{e}}{c}\right) = \vec{J}(t') + \frac{\partial}{\partial t'}\left[\frac{\vec{r}\cdot\vec{e}}{c}\vec{J}(t')\right]$$

وضعنا المقدار $\Delta t' = \frac{\vec{r}\cdot\vec{e}}{c}$ تحت إشارة الاشتقاق لأنه تابع لـ t' : $\vec{r} = \vec{r}(t')$. لدينا

$$\vec{A} = \frac{1}{cR_0}\int\vec{J}(t')d\tau + \frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t'}\int\left(\vec{r}\cdot\vec{e}\right)\vec{J}(t')d\tau$$

يصح هذا التقريب، كما في حال التقريب ثنائي القطب، عندما تكون أبعاد النظمة صغيرة أمام طول الموجة وسرعة الشحنات صغيرة أمام سرعة الضوء. إنه تقريب صغير بالنسبة للتقريب السابق ولا يظهر دوره إلا عندما يكون التقريب ثنائي القطب معدوماً.

لنستبدل كثافة التيار $\vec{J} = \rho\vec{v}$ بشحنة نقطية $q\vec{v}$ وننتقل من إشارة التكامل إلى إشارة الجمع

$$\vec{A} = \frac{1}{cR_0}\sum_i q_i\vec{v}_i + \frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t}\sum q_i\left(\vec{r}_i\cdot\vec{e}\right)\vec{v}_i \qquad (2.23)$$

تخلينا هنا عن وضع الفتحة على t اختصاراً ولكننا نشير دوماً إلى الزمن المؤخر. لنكتب الجداء $(\vec{r}\cdot\vec{e})\cdot\vec{v}$ على شكل يظهر الجداء المتجهي $\vec{r}\times\vec{v}$:

$$\bar{v}\cdot(\bar{r}\cdot\bar{e}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\bar{r}(\bar{r}\cdot\bar{e})\right] + \frac{1}{2}\bar{v}(\bar{r}\cdot\bar{e}) - \frac{1}{2}\bar{r}(\bar{v}\cdot\bar{e})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\bar{r}\cdot(\bar{r}\cdot\bar{e})\right] + \frac{1}{2}(\bar{r}\times\bar{v})\times\bar{e}$$

إن المجموع الأول في $\bar{A}$ هو تعريفاً $\dot{\bar{p}}$، مشتق عزم ثنائي القطب و $\frac{1}{2}\sum_i q_i(\bar{r}_i\times\bar{v}_i)$ هو تعريفاً العزم المغنطيسي لنظمة الشحنات ((3.9).2)؛ رمزنا له بـ $\bar{M}$ وهو $c\bar{M}$ في النظمة السغثية، ونرمز لمشتقه هنا بـ $\dot{\bar{M}}$؛ ونكتب $\bar{A}$ على الشكل

$$\bar{A} = \frac{\dot{\bar{p}}}{cR_0} + \frac{1}{2c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_i q_i\bar{r}_i(\bar{r}_i\cdot\bar{e}) + \frac{1}{cR_0}\left(\dot{\bar{M}}\times\bar{e}\right) \tag{2.24}$$

نريد الآن إظهار المشتق الثاني لكمون النظمة السلمي (رباعي الأقطاب) وذلك بإضافة متجهة متناسبة مع $\bar{e}$ الثابتة. إن إضافة هذه المتجهة الاعتباطية لـ $\bar{A}$ لا يغير قيمتي الحقلين الكهربائي والمغنطيسي في (2.6) و(2.7).

سنكتب والحال هذه الحد الثاني في الطرف الثاني

$$\sum_i q_i\frac{1}{3}\left(3\bar{r}_i\cdot(\bar{r}_i\cdot\bar{e}) - r^2\bar{e}\right)$$

نكتب المقدار بين قوسين بدليل الإحداثيات آخذين تعريف $D_{\alpha\beta}$ في (2.19) بعين الاعتبار

$$q\sum_{\alpha,\beta}\left(3r_\alpha r_\beta e^\beta - r^2e^\beta\delta_{\alpha\beta}\right) = \sum_{\alpha,\beta}e^\beta D_{\alpha\beta}$$

إن تقليص التانسور من الرتبة الثالثة يعطينا متجهة $\bar{D}$ مركباتها: $D_\alpha = \sum_\beta e^\beta D_{\alpha\beta}$ تتيح لنا كتابة $\bar{A}$ كما يلي:

$$\bar{A} = \frac{\dot{\bar{p}}}{cR_0} + \frac{1}{6c^2R_0}\ddot{\bar{D}} + \frac{1}{cR_0}\left(\dot{\bar{M}}\times\bar{e}\right) \tag{2.25}$$

نحسب الحقلين الكهربائي والمغنطيسي في ذات الشروط التي قادتنا إلى (2.6) و(2.7): $R_0 \gg r$، $v \ll c$ وأبعاد النظمة صغيرة أمام λ لنجد أن

$$\bar{B} = \frac{1}{c^2R_0}\left\{\ddot{\bar{p}}\times\bar{e} + \frac{1}{6c}\dddot{\bar{D}}\times\bar{e} + \left(\ddot{\bar{M}}\times\bar{e}\right)\times\bar{e}\right\} \tag{2.26}$$

$$\bar{E} = \frac{1}{c^2R_0}\left\{\left(\ddot{\bar{p}}\times\bar{e}\right)\times\bar{e} + \frac{1}{6c}\left(\dddot{\bar{D}}\times\bar{e}\right)\times\bar{e} + \bar{e}\times\ddot{\bar{M}}\right\} \tag{2.27}$$

نحسب شدة الإشعاع العنصرية dI حسب (2.13) و(2.26). إلا أننا سنحسب هنا الإشعاع الكلي أي الطاقة التي تشعها النظمة في كل الاتجاهات في واحدة الزمن. علينا لتحقيق ذلك النظر إلى القيمة الوسطية لـ dI من أجل كل المتجهات $\bar{e}$ وضربها بعد ذلك بـ 4π. dI متناسبة مع B^2؛ إن القيمة الوسطية لجداء أي حدين من الحدود الثلاثة المكونة لـ B معدومة، إنها من الشكل $\langle\sin\theta_1\sin\theta_2\rangle$. يبقى فقط في B^2 مربع هذه الحدود ويجب أن نسقط $\bar{e}$ على المحاور الثلاثة $\bar{e} = \alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2 + \gamma\bar{e}_3$،

من المكونة لتانسور متناظر $\langle\alpha\beta\rangle$ وأن نحسب القيم الوسطية لجداءات المركبات $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ ، ولدينا بجمع العناصر $\langle\alpha\beta\rangle = a\delta_{\alpha\beta}$ $\delta_{\alpha\beta}$ التانسور الواحدي الرتبة الثانية وهو بالتالي متناسب مع التي يجب أن تكون متناسبة مع $\langle\alpha\beta\gamma\delta\rangle$ نحسب بنفس الشكل. $a=\frac{1}{3}$ ومنه $I=\langle\alpha\alpha\rangle=3a$ نأخذ هذه القيم بعين الاعتبار لنجد بعد $a=\frac{1}{15}$ لنجد أن مثل التناسب هو $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}$ حساب طويل وغير معقد أن

$$I=\frac{2}{3c^3}\left|\ddot{\vec{p}}\right|^2+\frac{1}{180c^5}\left|\dddot{D}_{\alpha\beta}\right|^2+\frac{2}{3c^5}\left|\ddot{\vec{M}}\right|^2 \qquad (2.28)$$

وهكذا يحتوي الإشعاع الكلي على إشعاع ثنائي القطب وآخر رباعي الأقطاب (كهربائيين) وعلى إشعاع ثنائي القطب المغنطيسي.

لنلاحظ أن الإشعاع رباعي الأقطاب المغنطيسي منعدم في حالات عديدة، فهو منعدم عندما تكون نسبة الشحنة إلى الكتلة هي ذاتها من أجل كل شحنات النظمة، كما هو عليه الحال في انعدام الإشعاع ثنائي القطب الكهربائي كما رأينا. ذلك أن العزم المغنطيسي في هذه الحالة متناسب مع العزم الزاوي $\vec{M}=\frac{1}{2c}\sum q_i\vec{r}_i\times\dot{\vec{v}}_i=\frac{q}{2mc}(m\vec{r}_i\times\vec{v}_i)$ ، والعزم الزاوي منحفظ كما نعلم، ومنه $\dot{\vec{M}}=0$.

3. حالات الإشعاع الأخرى

1.3- إشعاع شحنة سريعة الحركة

لا يمكننا في هذه الحالة تطبيق تقريب الإشعاع ثنائي القطب الذي لا يصلح إلا في حالة السرعات الصغيرة بالنسبة لسرعة الضوء. ثم إنه يلزمنا تطبيق معادلة الحركة النسبوية (1.14) في النظمة السغنئية

$$mc\frac{du^\rho}{ds}=\frac{q}{c}F^{\rho\nu}u_\nu \qquad (3.1)$$

حيث u سرعة الجسيم رباعية الأبعاد و $F^{\rho\nu}$ التانسور الكهرطيسي $F^{\rho\nu}=\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\rho}-\frac{\partial A^\rho}{\partial x_\nu}$. سنختار لتحديد التسارع رباعي الأبعاد نظمة محاور غاليلية تعين الصلة بين هذا التسارع وبين المتجهة رباعية الأبعاد: طاقة الإشعاع – اندفاعه. لتكن K نظمة المحاور الغاليلية التي يكون فيها الجسيم ساكناً في اللحظة $t=0$، $\vec{V}_0=0$ وليكن $\vec{a}$ تسارعه (ثلاثي الأبعاد) في هذه اللحظة. ستبقى السرعة صغيرة خلال الزمن العنصري dt ويمكن بالتالي تطبيق العلاقة (2.14) طاقة الإشعاع – شدة الإشعاع الصادر خلال الزمن

dt

$$d\varepsilon = \frac{2q^2}{3c^3}a^2dt \qquad (3.2)$$

نعلم أن اندفاع الإشعاع يحدده تكامل تدفقه على سطح مغلق يحيط بالشحنة المشعة. السطح كروي في حالة التقريب ثنائي القطب واندفاع الإشعاع $d\bar{P}$ معدوم بالتناظر:

$$d\bar{P} = 0 \qquad (3.3)$$

إن مركبات متجهة التسارع رباعية الأبعاد $\frac{du}{ds}$ في النظمة K هي $\frac{du_0}{ds} = 0$ و $\frac{d\bar{u}}{ds} = \frac{\bar{a}}{c^2}$ (لا ننسى أن $\bar{u} = \frac{d\bar{x}}{ds}$ و $\frac{d\bar{u}}{ds} = \frac{d^2\bar{x}}{ds^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}$) وبالتالي

$$d\varepsilon = \frac{2q^2}{3c^3}\left(\frac{d\bar{u}}{ds}\right)^2 c^4dt \qquad (3.4)$$

وبما أن المتجهة الرباعية P هي $\left(P, \frac{\varepsilon}{c}\right)$ و x هي $\left(\bar{x}, x^0 = ct\right)$ و $\frac{du^0}{ds} = 0$ فإنه يمكن كتابة (3.4) على الشكل

$$\frac{d\varepsilon}{c} = -\frac{2q^2}{3c}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 dx^0 \qquad (3.4)'$$

إشارة ناقص ضرورية لأن $\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = \left(\frac{du^0}{ds}\right)^2 - \left(\frac{d\bar{u}}{ds}\right)^2$ المقادير السلمية (مربع المتجهات رباعية الأبعاد) مقادير منحفظة في الانتقال من نظمة محاور غاليلية إلى أخرى، أي أن dP (المساوي في K لـ $\left(\frac{d\varepsilon}{c}\right)$، $d\bar{P} = 0$) متناسب مع المقدار المنحفظ $\left(\frac{du}{ds}\right)^2$؛ مما يتيح لنا كتابة المتجهة $\left(d\bar{P}, \frac{d\varepsilon}{c}\right)$ في أي نظمة غاليلية على الشكل

$$dP = -\frac{2q^2}{3c}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 dx \qquad (3.5)$$

وبالتكامل نحصل على تغيرات الإشعاع، أي على الإشعاع الكلي في كل الفضاء رباعي الأبعاد

$$\Delta P = -\frac{2q^2}{3c}\int\left(\frac{du}{ds}\right)^2 dx \qquad (3.6)$$

$$dx = dx^0dx^1dx^2dx^3$$

نستبدل $\frac{du}{ds}$ بقيمتها في (3.1) ونكتب الإشعاع

$$\Delta P = -\frac{2q^4}{3m^2c^5}\int\left(F^{\rho\nu}u_\nu\right)^2 dx \qquad (3.7)$$

نجد بسهولة انطلاقاً من أي من هاتين العلاقتين الإشعاع والاندفاع الكليين. لدينا، بكتابة القوة رباعية الأبعاد

$$g = \frac{dP}{ds} = mc\frac{du}{ds}$$

أي

$$g^0 = \frac{1}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} qE \cdot \vec{v}$$

و $\vec{g} = \frac{q\left(E + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B}\right)}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (في النظمة السغثية $\frac{\vec{B}}{c}$ عوضاً عن $\vec{B}$)

الطاقة المشَعة بدليل الحقلين الكهربائي والمغنطيسي المطبقين فنجد انطلاقاً من (3.4)

$$\Delta\varepsilon = \frac{2q^4}{3m^2c^3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\vec{E}\cdot\vec{v}\right)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} dt \tag{3.8}$$

كما يمكننا حسابها بأن نلاحظ، كما فعلنا في أول هذا الفصل، أن القوة $\vec{F}$ هي

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} = \frac{m\vec{a}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = mc\frac{d\vec{u}}{dt} \quad \text{و} \quad \frac{dP_0}{dt} = F_0 = \frac{m\vec{a}\cdot\vec{v}}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = mc\frac{du^0}{dt}$$

ومنه بأخذ المركبة الأولى في (3.5) ومكاملتها

$$\Delta\varepsilon = \frac{2q^2}{3c^3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\vec{a}|^2 - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3} dt \tag{3.9}$$

ونحصل على الاندفاع الكلي المشع في الفترة الزمنية dt بوضع $d\vec{x} = \vec{v}dt$ في (3.6) أي بضرب المقدارين تحت إشارة التكامل في (3.8) أو (3.9) بـ $\vec{v}$. لنلاحظ من (3.8) أن الإشعاع الكلي في واحدة الزمن متناسب مع $\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$ أي مع مربع طاقة الجسيم المشع. هذا في الحالة العامة، أما عندما يكون الحقل الكهربائي في اتجاه الحركة، فإن المعامل $1-\frac{v^2}{c^2}$ سيظهر في الصورة أيضاً وتنعدم تبعية الإشعاع لطاقة الجسيم المشع.

يمكن البرهان[3]، بالعودة إلى صيغة لينارد–فيشرت للحقل الكهرطيسي لدراسة التوزع الزاوي لشدة الإشعاع، أن الجسيم ذا السرعة الكبيرة جداً ($0,9c$ وأكثر) يشع على وجه الخصوص في اتجاه حركته وفي قمة زاوية $\theta = \vec{v}\cdot\vec{e}$ ، $\theta \sim \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. انظر الشكل.24 في الفصل الثالث.

---

[3] انظر الفقرة 73 من كتاب نظرية الحقل في سلسلة كتب لاندو–ليفشيتس حيث نجد الصيغة التالية للإشعاع الكلي في عنصر الزاوية المجسمة $d\Omega$

2.3- إشعاع شحنة ذات حركة منتظمة على محيط دائرة

ذكرنا في الفصل الثاني بحركة الشحنة الدائرية في حقل مغنطيسي عمودي على مستوى الحركة وأعطينا في ((2.(1.14)) و((2.(1.15)) نصف قطر الدائرة والسرعة بالعلاقتين

$$R = \frac{mv}{qB}$$

$$\omega = \frac{qB}{m} = \frac{v}{R}$$

وقلنا إن هذه النتائج لن تتغير في النسبية الخاصة لأن قوة لورنتس التي أدت إليها نسبوية أساساً. كل ما علينا فعله إذاً هو كتابة v في صيغتها النسبوية عندما تكون سرعة الشحنة كبيرة وكتابة نصف القطر على الشكل

$$R = \frac{cmv}{qB\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (3.10)$$

(حل $\frac{B}{c}$ في النظمة السغثية محل B)

تعين العلاقة النسبوية (3.8) شدة الإشعاع في كل الاتجاهات في واحدة الزمن – المقدار تحت إشارة التكامل –، وهي الحالة التي ندرسها: $\vec{B}$ عمودي على $\vec{v}$ وفي الحالة الخاصة التي يكون الحقل الكهربائي معدوماً فيها $\vec{E} = 0$

$$I = \frac{2q^4}{3m^2c^3}\frac{1}{c^2}\frac{v^2B^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (3.11)$$

وهي شدة متناسبة مع مربع اندفاع الشحنة.

نكتب قانون لورانتس في النسبية الخاصة، $\vec{E} = 0$، على الشكل

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt} = q\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$$

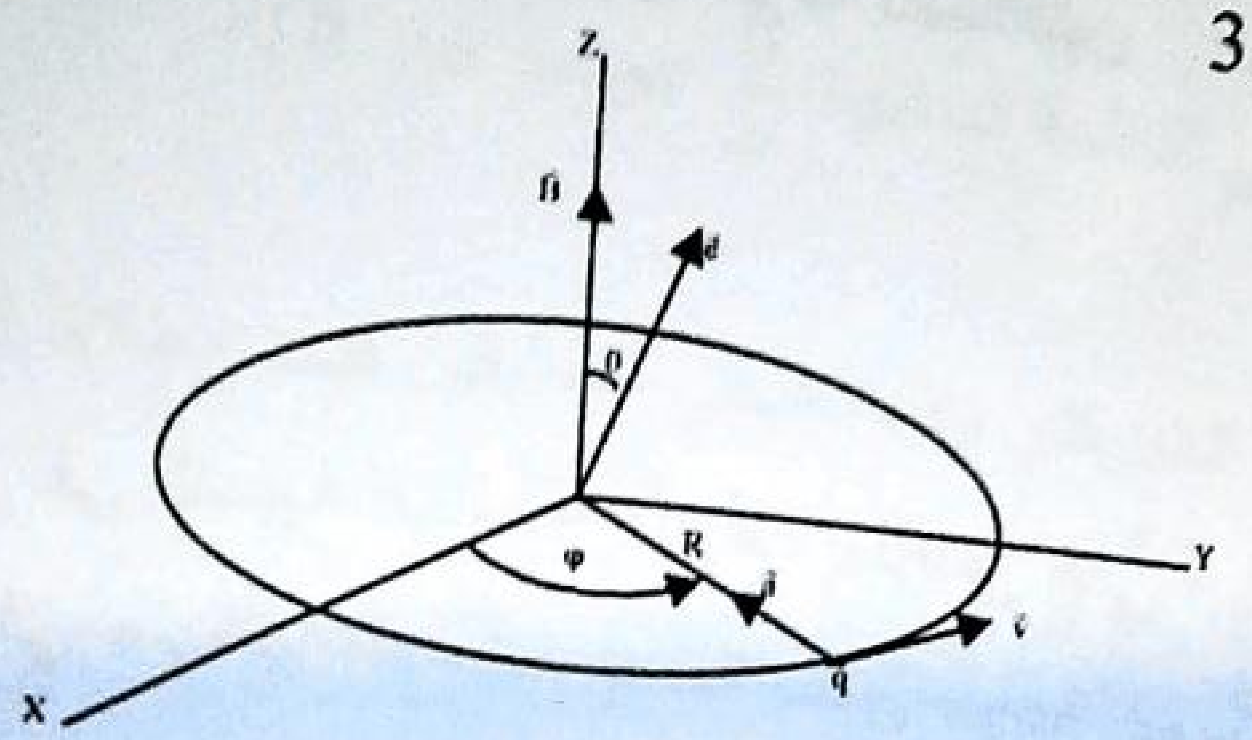
ومنه التسارع

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{mc}\vec{v} \times \vec{B} \qquad (3.12)$$

$$d\varepsilon = \frac{q^2}{4\pi c^3}d\Omega\int\left(\frac{2(\vec{e}\cdot\vec{a})(\vec{v}\cdot\vec{a})}{c\left(1-\frac{\vec{v}\vec{a}}{c}\right)^4} + \frac{a^2}{\left(1-\frac{\vec{v}\vec{a}}{c}\right)^3} - \frac{1-v^2/c^2(\vec{e}\cdot\vec{a})^2}{\left(1-\frac{\vec{v}\vec{a}}{c}\right)^5}\right)dt$$

$\vec{e}$ المتجهة الواحدية في اتجاه الإشعاع و $\vec{a}$ تسارع الشحنة.

لنستعمل نظمة محاور إقليدية، مدار الشحنة فيها دائرة مركزها مبدأ الإحداثيات مستواها XY، B في اتجاه OZ، نختار المستوي ZY بحيث تقع فيه المتجهة الواحدية $\vec{e}$ لاتجاه الإشعاع. لتكن θ الزاوية التي تصنعها هذه المتجهة مع OZ. نعين وضع الشحنة على الدائرة بالزاوية φ التي يصنعها نصف القطر OR مع OX، الشكل.3



الشكل.3

نرى بسهولة أن $(\vec{e}\cdot\vec{e}_y)(\vec{v}\cdot\vec{e}_y) = (\vec{e}\cdot\vec{v})$، أي

$$\vec{e}\cdot\vec{v} = v\sin\theta\cos\varphi$$

كذلك

$$\vec{e}\cdot\vec{a} = a\sin\theta\sin\varphi$$

و

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = 0$$

نضع هذه المقادير في صيغة الإشعاع الكلي التي كتبناها في الهامش، a^2 محسوبة في (3.12). والمقدار تحت إشارة التكامل حيث انعدام الحد الأول هو

$$\frac{q^2v^2B^2\left(1-v^2/c^2\right)}{m^2c^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{v}{c}\sin\theta\cos\varphi\right)^3} - \frac{\left(1-v^2/c^2\right)\sin^2\theta\sin^2\varphi}{\left(1-\frac{v}{c}\sin\theta\cos\varphi\right)^5}\right]$$

نجد بحساب جبري بسيط أن المقدار بين المعقوفتين يساوي لـ

$$\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cos^2\theta + \left(\frac{v}{c} - \sin\cos\varphi\right)^2}{\left(1-\frac{v}{c}\sin\theta\cos\varphi\right)^5}$$

نكامل على $\omega dt = d\varphi$ (ω ثابتة) ونكتب الإشعاع الكلي في $d\Omega$ على الشكل

$$I = d\Omega \frac{q^4 B^2 v^2}{8\pi^2 m^2 c^5}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\int_0^{2\pi} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\cos^2\theta + \left(\frac{v}{c} - \sin\cos\varphi\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c}\sin\theta\cos\varphi\right)^5} d\varphi \qquad (3.14)$$

حساب التكامل طويل ولكن بدون أي تعقيد، لن نجريه مكتفين بكتابة النتيجة

$$dI = d\Omega \frac{q^4 B^2 v^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{8\pi^2 m^2 c^5}\left[\frac{2 + \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{5/2}} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(4 + \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta}{4\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{7/2}}\right] \qquad (3.15)$$

لنستخلص منها نسبة الإشعاع في الاتجاه العمودي على الحركة $\theta = 0$ إلى الإشعاع في مستوى الحركة $\theta = \frac{\pi}{2}$. إنها

$$\frac{[dI/d\Omega]_0}{[dI/d\Omega]_{\pi/2}} = \frac{2}{\dfrac{4 + 3v^2/c^2}{4\left(1 - v^2/c^2\right)^{5/2}}} = \frac{8\left(1 - v^2/c^2\right)^{5/2}}{4 + 3v^2/c^2} \qquad (3.16)$$

تتناهى هذه النسبة إلى 2 عندما تكون السرعة صغيرة جداً $v \to 0$ ولكنها تصبح صغيرة جداً عندما تقارب السرعة سرعة الضوء؛ تقرب قيمة الصورة من الصفر. يتركز الإشعاع في جوار مستوى مسار الشحنة. يمكننا تعيين الفتحة الزاوية $\Delta\theta$ التي يتجمع فيها القسم الأعظم من الإشعاع باستبدال $\left(1 - v^2/c^2\right)$ بـ $\left(1 - v^2/c^2\right)\sin^2\theta$، $\theta = \frac{\pi}{2} \pm \Delta\theta$

$$1 - (\Delta\theta)^2 \simeq \left(1 - \frac{(\Delta\theta)^2}{2}\right)^2 = \cos^2 \pm \Delta\theta = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \pm \Delta\theta\right)$$

وهكذا فعندما نكتب $\left(1 - v^2/c^2\right)\left(1 - (\Delta\theta)^2\right) = \left(1 - v^2/c^2\right)\sin^2\theta \simeq 1 - v^2/c^2$ فإننا نعني أن $\Delta\theta \simeq \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

3.3- إشعاع الكبح

عالجنا في الفقرات والأرقام السابقة مسألتي حركة الشحنات في حقل كهرطيسي ناشئ عن شحنات أخرى والحقل الكهرطيسي – الإشعاع – الذي تحدثه في الفضاء. ولكننا لم نتعرض لمسألة تفاعل الشحنة

التي عالجنا بها في §1.5 تفاعل الشحنات : كتابة الحقل الكهرطيسي الناتج عن الشحنة ولاغرانجي الشحنة المتحركة مع الحقل الذي تحدثه، لرد فعل الحقل على الشحنة. سنعالج هذه المسألة باتباع الطريقة الأخرى في هذا الحقل ولكننا سنذهب في التقريب إلى المشتق الثالث بالنسبة للزمن فيما يخص الكمون السلمي والمشتق الثاني فيما يخص الكمون المتجهي لوجود $\frac{1}{c}$ في تعريفه. وسنستغل كذلك حرية اختيار الكمون المتجهي بإضافة $\vec{\nabla}\psi$ إليه و $-\frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}$ إلى الكمون السلمي لنبقي هذا الأخير على شكل كمون كهربائي راكد.

إن $V = \int \frac{\rho\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} d\tau$ و

$$V^{(3)} = -\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int R^2 \rho d\tau \tag{3.17}$$

كذلك $\vec{A} = \int \frac{\vec{J}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} d\tau$ و $\vec{\rho}$

$$\vec{A}^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int J d\tau \tag{3.18}$$

نختار ψ بحيث تعدم الحد (3.17) في نشر V ؛ فهي إذاً

$$\psi = -\frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R^2 \rho d\tau$$

ويصبح $\vec{A}^{(2)}$ عندئذ

$$\vec{A}^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{J} d\tau - \frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\nabla}\int R^2 \rho d\tau \tag{3.18'}$$

حيث وضعنا، كما فعلنا في §1.5، إشارة الاشتقاق خارج إشارة التكامل وبادلنا $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}$ بـ $\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}$، الخ.

نكتب التكامل على شكل مجموع في حالة الشحنات النقطية q

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(q\vec{v}) - \frac{q}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\nabla}R^2$$

إن $2\vec{R} = \vec{\nabla}R^2$، $\frac{\partial^2}{\partial t^2}2\vec{R} = -2\dot{\vec{v}}$ لأن $\dot{\vec{R}} = -\vec{v}$ كما بينا في §1.5 ومنه

$$\vec{A}^{(2)} = -\frac{2}{3c^2}\sum_i q_i \dot{\vec{v}}_i \tag{3.19}$$

الكمون المتجهي متناسب مع تسارع الشحنات ولا يتبع الإحداثيات مباشرة، ولذا فالحقل المغنطيسي الذي ينتجه معدوم ولا يبقى إلا الحقل الكهربائي. يوجد في هذا الحقل، إضافة إلى الحقل الذي أعطيناه في اللاغرانجي، الحقل

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}^{(2)} = \frac{2}{3c^3}\sum_i q_i \ddot{\vec{v}}_i \tag{3.20}$$

إن $\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i$ هو عزم ثنائي القطب لمجموع الشحنات والحقل الإضافي $\vec{E}$ هو

$$\vec{E} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\vec{p}} \tag{3.21}$$

يمارس هذا الحقل على كل شحنة q_i من الشحنات التي أحدثته قوة

$$\vec{F}_i = \frac{2q_i}{3c^3}\dddot{\vec{p}} \tag{3.22}$$

نحسب القيمة الوسطية لعمل هذه القوة في واحدة الزمن $\vec{F}_i\vec{v}_i$، من أجل كل الشحنات. لدينا

$$\sum_i \vec{F}_i\vec{v}_i = \frac{2}{3c^3}\dddot{\vec{p}}\sum_i q_i\vec{v}_i = \frac{2}{3c^3}\dddot{\vec{p}}\dot{\vec{p}}$$

نكتب جداء المشتقين في الطرف الأخير على الشكل

$$\dddot{\vec{p}}\,\dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}\left(\ddot{\vec{p}}\,\dot{\vec{p}}\right) - \left(\ddot{\vec{p}}\right)^2$$

وبما أن القيمة الوسطية للمشتق بالنسبة للزمن معدومة كما بينا مراراً، فإن

$$\left\langle \sum_i \vec{F}_i\vec{v}_i \right\rangle = -\frac{2}{3c^3}\left\langle \ddot{\vec{p}}^2 \right\rangle \tag{3.23}$$

إن الطرف الثاني هو I - شدة الإشعاع (طاقته) في واحدة الزمن في التقريب ثنائي القطب كما رأينا في '(2.13). وهكذا فإن القوة (3.22) الناتجة عن توقف النشر عند الحد الثالث هي القوة التي يمارسها إشعاع الشحنة على الشحنة. إنها رد فعل الإشعاع (الإشارة –) الذي يحد من حركة الشحنة ومنه التسمية إشعاع الكبح، أو قوى الكبح اللورانتسية.

تفقد الشحنات إضافة إلى فقدانها جزءاً من طاقتها جزءاً من عزمها الزاوي $\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times m\vec{v}_i$ بفعل القوة (3.22). لدينا في واحدة الزمن

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_i m_i\vec{r}_i \times \dot{\vec{v}}_i$$

المساوي لعزم القوى المطبقة

$$= \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \frac{2}{3c^3}\sum q_i\vec{r}_i \times \dddot{\vec{p}}$$

ومن تعريف عزم ثنائي القطب

$$= \frac{2}{3c^3}\vec{p} \times \dddot{\vec{p}}$$

نكتب الجداء المتجهي كما فعلنا في الجداء السلمي

$$\vec{p} \times \dddot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{p} \times \ddot{\vec{p}}\right) - \dot{\vec{p}} \times \ddot{\vec{p}}$$

والقيمة الوسطية لـ $\frac{d\vec{M}}{dt}$ هي

$$\left\langle \frac{d\vec{M}}{dt} \right\rangle = -\frac{2}{3c^3}\left\langle \dot{\vec{p}} \times \ddot{\vec{p}} \right\rangle \tag{3.24}$$

لننظر الآن إلى حالة شحنة واحدة، الإلكترون مثلاً ذي الشحنة e، وإلى تفاعله مع الإشعاع الصادر عنه. إن $\vec{p}$ في هذه الحالة هو $e\vec{r}$ و $\ddot{\vec{p}}$ هو $e\ddot{\vec{v}}$ والقوة $\vec{F}$ هي

$$\vec{F} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{v}} \qquad (3.25)$$

هذه القوة، خلافاً لما هو عليه الحال من أجل مجموعة من الشحنات، ليست تقريبية، لا تنتج عن التوقف في النشر عند الحد الثالث. إذ يمكننا، مادامت الشحنة وحيدة، اختيار نظمة محاور مرتبطة بها وحساب مختلف حدود النشر في هذه النظمة لنجد أنها تنعدم كلها عندما يتناهى البعد R بين النقطة التي نحسب الإشعاع فيها ووضع الإلكترون إلى الصفر. فالعلاقة (3.25) علاقة مضبوطة لفعل الإشعاع على الشحنة. لنفرض أن الإلكترون لا يخضع لأي حقل خارجي آخر سوى الحقل الذي أحدثه هو، تأخذ معادلة حركته الشكل

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{v}}$$

حلها $\dot{\vec{v}} = e^{\frac{3mc^3}{2e^2}t}$: تسارع أسي متزايد إلى اللانهاية مع الزمن، فهو حل غير مقبول. منشأ هذه المفارقة عدم اتساق الكهرطيسية اتساقاً كاملاً بقبولها مفهوم الشحنة النقطية وتفاعلها مع الحقل الذي تحدثه في ذات النقطة. فقد رأينا منذ البداية أن طاقة الشحنة النقطية الكامنة لامنتهية وكتلة هذه الشحنة المتناسبة مع الطاقة لامنتهية كذلك. رأينا كذلك في الفصل الثالث أن الكتلة الكهرطيسية المتناسبة عكساً مع أبعاد الشحنة تتناهى إلى اللانهاية عندما تصبح الشحنة نقطية. ونحن عندما نكتب أن كتلة الإلكترون النقطي منتهية فإننا في واقع الأمر نضيف إلى كتلته الكهرطيسية اللامنتهية كتلة أخرى لامنتهية سالبة كي نستطيع استخلاص مقدار منته من $\infty - \infty +$، وهي العملية التي تقود – نظراً لعدم صحتها في كل الأحوال، رياضياً – إلى المفارقات من النوع الذي نحن بصدده هنا.

شروط صلاحية قوة الكبح

لنكتب معادلة حركة شحنة متحركة بسرعة صغيرة (لانسبوية) خاضعة لحقل خارجي ولقوى الكبح الإشعاعي

$$m\dot{\vec{v}} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{v}} \qquad (3.26)$$

لا تصح هذه المعادلة إلا إذا كانت قوى الكبح صغيرة أمام قوة لورانتس التي يمارسها الحقل الخارجي. لنفرض أن الشحنة في نظمة محاور مرتبطة بها في لحظة معينة : سرعتها معدومة في هذه اللحظة وتسارعها هو، حسب (3.26)، بإهمال قوى الكبح وانعدام الحقل المغنطيسي في هذه اللحظة E

$$\dot{\vec{v}} = \frac{e}{m}\vec{E} \qquad (3.27)$$

نشتق (3.26)، مهملين قوى الكبح وآخذين بعين الاعتبار التقريب (3.27)

$$\dddot{\vec{v}} = \frac{e}{m}\left(\dot{\vec{E}} + \frac{\ddot{\vec{v}}}{c} \times \vec{B}\right) = \frac{e}{m}\dot{\vec{E}} + \frac{e^2}{m^2c}\vec{E} \times \vec{B}$$

ونكون بذلك قد حسبنا مشتق التسارع بدليل الحقل الخارجي المطبق، بحيث نستطيع التعبير عن قوى الكبح بدليل هذا الحقل

$$\vec{F} = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec{v}} = \frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\vec{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4}\vec{E} \times \vec{B} \qquad (3.28)$$

يجب، لتكون قوة الكبح صغيرة أمام القوة الخارجية $e\vec{E}$، أن يكون كل حد من حدي الطرف الثاني صغيراً، ليكن $\vec{E} = E_0 e^{i\omega t}$، $\dot{\vec{E}}$ متناسبة مع التواتر ω وصغر الحد الأول هو أن يكون

$$\frac{e^2}{mc^3}\omega \ll 1$$

أو بدليل $\lambda \sim \dfrac{c}{\omega}$

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2} \qquad (3.29)$$

أي أن طول الموجة المطبقة على الشحنة كبير أمام نصف قطر الإلكترون التقليدي؛ إنه البعد الذي لا يصح تجاوزه إذا أردنا أن تبقى الكهرطيسية نظرية متسقة لا تناقض فيها.

ولكي يكون الحد الثاني صغيراً كذلك أمام القوة eE، يلزم أن يحقق الحقل المغنطيسي العلاقة

$$B \ll \frac{m^2c^4}{e^3} \qquad (3.30)$$

يجب أن يكون الحقل ذاته صغيراً. إن $\dfrac{m^2c^4}{e^3}$ حد لا يجوز تجاوزه في الكهرطيسية التقليدية. تدخل المفاعيل الكمومية من أجل حقول متناسبة مع $\dfrac{m^2c^3}{he}$ حيث h ثابتة بلانك كما سنرى في الفصل الأخير من المجلد القادم.

يمكن حساب قوة الكبح في النسبية الخاصة بأن نكتب عوضاً عن (3.26) معادلة الحركة النسبوية في الحقل الخارجي (3.1) ونضيف إليها قوة رباعية الأبعاد g مركباتها الزمانية $\vec{F}$.

$$mc\frac{du^\rho}{ds} = \frac{e}{c}F^{\rho\nu}u_\nu + g^\rho \qquad (3.31)$$

يجب أن تكون القوة g عمودية على u $g^\rho u_\rho = 0$ وهو ما يدفعنا إلى اختيار g^ρ على الشكل

$$g^\rho = \frac{2e^2}{3c}\left[\frac{d^2u^\rho}{ds^2} + u^\rho u_\nu \frac{d^2u^\nu}{ds^2}\right] \qquad (3.32)$$

فنجد أن $\vec{F}$ متناسبة مع $\vec{v}$- هذا من حيث المنحى، ومتناسبة مع مربع طاقة الشحنة. لكننا لن ندخل في التفاصيل لأننا نرى أننا شرحنا مسألة الإشعاع في الكهرطيسية التقليدية شرحاً كافياً، يبين في آن واحد – في هذا الفصل القصير وسابقه – نجاحها الهائل في تفسير ظواهر لا تحصى وتناقضها لقبولها مفهوم

الشحنة النقطية. كنا قد أشرنا إلى ضرورة معالجة كهرطيسية الجسيمات عظيمة السرعة، من جزيئات وذرات وجسيمات أولية، في إطار النظرية الكمومية التي تخضع لها الجسيمات المجهرية ونظرية النسبية التي تخضع لها الجسيمات التي لم يعد من الممكن إهمال سرعتها أمام سرعة الضوء. تتحول في هذه النظرية، نظرية الحقول المكممة، المقادير الفيزيائية من دالات إلى مؤثرات. وبما أننا نعبر عن المقدار الفيزيائي، الطاقة بدليل الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ فإنهما يصبحان مؤثرين في إطار النظرية الجديدة (ومعهما V و $\vec{A}$) وتصبح معادلات ماكسويل معادلات بمؤثرات وليس بدالات كما هو عليه الحال في الكهرطيسية التقليدية.

رأينا في المجلد الأول أن الانتقال من الميكانيك التقليدي إلى الميكانيك النسبوي لم يبطله، كذلك لا يبطل الانتقال من الكهرطيسية التقليدية، التي نعالجها في هذا المجلد، إلى الإلكتروديناميك الكمومي النظرية الأولى ولا يلغي أي نتيجة من نتائجها وإنما يجعل هذه النتائج أكثر دقة ويفسر ظواهر لا تستطيع تفسيرها. ويصح هذا الأمر على كل تطور من نظرية إلى أخرى أعم منها تشملها وتتخلص من مفارقات النظرية الأولى كلياً أو جزئياً.

لقد عرضنا على سبيل المثال في هذا الفصل تخامد – Damping – إشعاع الذرة (ثنائي القطب) وحددنا مدة حياة الإشعاع لذرة الصوديوم بـ 10^{-8} ثانية. وشرحنا في هذا الرقم رد فعل الإشعاع على الجسيم الذي أشعه. ولكننا لم نستعرض ظاهرة كبح هامة أخرى تقع عندما يمر الإلكترون المتسارع قرب النواة فيشع (فوتوناً واحداً) ويفقد بطبيعة الحال جزءاً من طاقته، من اندفاعه، فتضعف سرعته وهو ما يعرف باسم الإشعاع الكابح Bremsstrahlung.

الفصل الخامس

معادلات ماكسويل في داخل المادة

1- العوازل 221
2- الاستقطاب المغنطيسي.......................... 235
3- معادلات ماكسويل في المادة 256
4- الانعكاس.................................... 267

الفصل الخامس: معادلات ماكسويل في داخل المادة

1. العوازل

1.1- الاستقطاب الإلكتروني

لا يختلف عدد الإلكترونات كثيراً بين مادة وأخرى، إلا أنه لا يمكن النظر إلى كل هذه الإلكترونات كالإلكترونات حرة تستطيع الحركة تحت تأثير الحقل الكهربائي وتوصل الكهرباء. فبعض الأجسام الصلبة – المعادن – موصل جيد للكهرباء والبعض الآخر عازل تماماً أو نصف موصل. تتراوح المقاومة الكهربائية بين 10^{-8}أوم/سم في المعادن و 10^{22}أوم/سم في العوازل الجيدة كالألماس مثلاً؛ وهذه النسبة 10^{30} هي أعلى حد، في درجات الحرارة المنخفضة، تبلغه خاصة ما من خواص الجسم.

إن توزع الإلكترونات في مستويات للطاقة تشكل قطاعات طاقة تفصل بينها قطاعات ممنوعة هو الذي يفسر هذا الاختلاف. ينطوي قولنا بتوزع الطاقة على مستويات تشكل قطاعات على قبول ميكانيك الكم كالإطار الطبيعي للتمييز بين الموصلات والعوازل وقبول الإحصاء الكمومي الناتج عنه لدراسة الخواص المشتركة للأعداد الكبيرة. لنا إذاً عودة إلى هذا الموضوع (V.3§5.2) ونقصر دراستنا هنا على دراسة الفروق الجهرية بين المعادن والعوازل.

إن الإلكترونات الحرة التي تميز الموصلات هي إلكترونات بعيدة عن نواة الذرة التي تنتمي إليها، بحيث لا يختلف هذا البعد عن بعدها عن نويات الذرات الأخرة المجاورة. تنعدم بالتالي حصيلة قوى جذب النويات لها عندما تكون داخل الموصل، وتبقى عمودية على السطح عندما تكون الإلكترونات على سطح الموصل. إنها إلكترونات التكافؤ التي يحدد عددها ناقلية الموصل.

رأينا أن الحقل الكهربائي داخل الموصل معدوم فلا حركة للإلكترونات الحرة فيه وأن سطح الموصل سطح متساوي الكمون : $V(x, y, z) =$ ثابت والحقل $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ عمودي على السطح ولا حركة للإلكترونات الحرة على السطح كذلك.

لا يوجد إطلاقاً في العازل التام إلكترونات حرة، تولد تياراً عند تطبيق حقل كهربائي $\vec{E}$ عليها، ولكن هذا لا يعني عدم وجود تفاعل بين الحقل المطبق والعازل. قد تكون مكونات العازل، الذرات أو الجزيئات، متناظرة كهربائياً أي أن مركز الشحنات الإلكترونية ينطبق على مركز الشحنات الموجبة. هذا هو حال جزيء الأكسجين على سبيل المثال، ونقول إن الجزيء لاقطبي، بينما لا يقع هذا في جزيء الماء H_2O التي لا يحدث فيها هذا الانطباق، فهو جزيء قطبي : يوجد ثنائي قطب كهربائي للجزيء بمعزل عن وجود أي حقل كهربائي. ولنبدأ بدراسة العوازل المتناظرة تحت تأثير حقل كهربائي $\vec{E}$ عليها.

الفصل الخامس: معادلات ماكسويل في داخل المادة

1. العوازل

1.1- الاستقطاب الإلكتروني

لا يختلف عدد الإلكترونات كثيراً بين مادة وأخرى، إلا أنه لا يمكن النظر إلى كل هذه الإلكترونات كإلكترونات حرة تستطيع الحركة تحت تأثير الحقل الكهربائي وتوصل الكهرباء. فبعض الأجسام الصلبة – المعادن – موصل جيد للكهرباء والبعض الآخر عازل تماماً أو نصف موصل. تتراوح المقاومة الكهربائية بين 10^{-8}أوم/سم في المعادن و 10^{22}أوم/سم في العوازل الجيدة كالألماس مثلاً؛ وهذه النسبة 10^{30} هي أعلى حد، في درجات الحرارة المنخفضة، تبلغه خاصة ما من خواص الجسم.

إن توزع الإلكترونات في مستويات للطاقة تشكل قطاعات طاقة تفصل بينها قطاعات ممنوعة هو الذي يفسر هذا الاختلاف. ينطوي قولنا بتوزع الطاقة على مستويات تشكل قطاعات على قبول ميكانيك الكم كالإطار الطبيعي للتمييز بين الموصلات والعوازل وقبول الإحصاء الكمومي الناتج عنه لدراسة الخواص المشتركة للأعداد الكبيرة. لنا إذاً عودة إلى هذا الموضوع (V.3§5.2) ونقصر دراستنا هنا على دراسة الفروق الجهرية بين المعادن والعوازل.

إن الإلكترونات الحرة التي تميز الموصلات هي إلكترونات بعيدة عن نواة الذرة التي تنتمي إليها، بحيث لا يختلف هذا البعد عن بعدها عن نويات الذرات الأخرة المجاورة. تنعدم بالتالي حصيلة قوى جذب النويات لها عندما تكون داخل الموصل، وتبقى عمودية على السطح عندما تكون الإلكترونات على سطح الموصل. إنها إلكترونات التكافؤ التي يحدد عددها ناقلية الموصل.

رأينا أن الحقل الكهربائي داخل الموصل معدوم فلا حركة للإلكترونات الحرة فيه وأن سطح الموصل سطح متساوي الكمون : $V(x, y, z) =$ ثابت والحقل $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ عمودي على السطح ولا حركة للإلكترونات الحرة على السطح كذلك.

لا يوجد إطلاقاً في العازل التام إلكترونات حرة، تولد تياراً عند تطبيق حقل كهربائي $\vec{E}$ عليها، ولكن هذا لا يعني عدم وجود تفاعل بين الحقل المطبق والعازل. قد تكون مكونات العازل، الذرات أو الجزيئات، متناظرة كهربائياً أي أن مركز الشحنات الإلكترونية ينطبق على مركز الشحنات الموجبة. هذا هو حال جزيء الأكسجين على سبيل المثال، ونقول إن الجزيء لاقطبي، بينما لا يقع هذا في جزيء الماء H_2O التي لا يحدث فيها هذا الانطباق، فهو جزيء قطبي : يوجد ثنائي قطب كهربائي للجزيء بمعزل عن وجود أي حقل كهربائي. ولنبدأ بدراسة العوازل المتناظرة تحت تأثير حقل كهربائي $\vec{E}$ عليها.

لتكن q شحنة النواة الموجبة – أو الشحنة الموجبة للجزيء الحيادي كهربائياً – المنطبقة على مركز الشحنات السالبة – الإلكترونات. يبتعد مركز الشحنات الموجبة بتأثير الحقل $\vec{E}$ مسافة $\vec{\delta}$ موازية للحقل ومتناسبة معه ويحدث ثنائي قطب من أجل كل ذرة

$$\vec{p} = q\vec{\delta} \tag{1.1}$$

وثنائي قطب من أجل واحدة الحجوم حيث يوجد N ذرة

$$\vec{P} = Nq\vec{\delta} \tag{1.2}$$

يطلق عليه اسم متجهة الاستقطاب الإلكتروني. لنأخذ حجماً ما من العازل τ، يحده سطح نرمز له بـ S. تتغير شحنة هذا الحجم Q بمقدار ΔQ نتيجة انتقال الشحنات عبر السطح S بواسطة المتجهة P حسب العلاقة التالية

$$\Delta Q = -\int \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\int \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{P}\right) d\tau \tag{1.3}$$

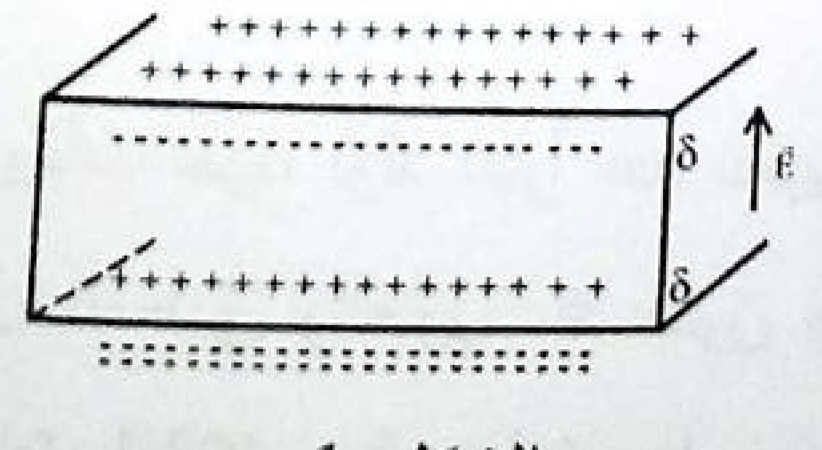
لتكن ρ كثافة الشحنة في العازل بعد تطبيق الحقل $\vec{E}$؛ إنها الكثافة الناتجة عن الاستقطاب، نرمز لها بـ ρ_{pol}. لدينا تعريفاً

$$\Delta Q = \int \rho_{pol} d\tau \tag{1.4}$$

نرى من العلاقتين السابقتين أن

$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \tag{1.5}$$

واضح أنه في حال تجانس الاستقطاب، $\vec{P}(x, y, z) =$ ثابت، فإن $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$، وكثافة الشحنة الناتجة عن الاستقطاب معدومة $\rho_{pol} = 0$ ولا تتغير الشحنة في الحجم τ أياً كان هذا الحجم. لكن الأمر يختلف على سطح العازل. لنفرض أننا اقتطعنا شريحة منه موازية لاتجاه الحقل $\vec{E}$ مقطعها العرضاني صغير، الشكل.1، نهمل فيه تغير الاستقطاب (1.1) بين وجهي الشريحة الطولانيين. ستتجه الشحنات الموجبة والسالبة في اتجاهين متعارضين، الأولى في اتجاه الحقل والأخرى في الاتجاه المعاكس. تدخل الشحنات الموجبة السطح العلوي مخلفة وراءها على بعد δ الشحنات السالبة وتخرج الشحنات السالبة من السطح السفلي مخلفة وراءها الشحنات الموجبة على بعد δ.



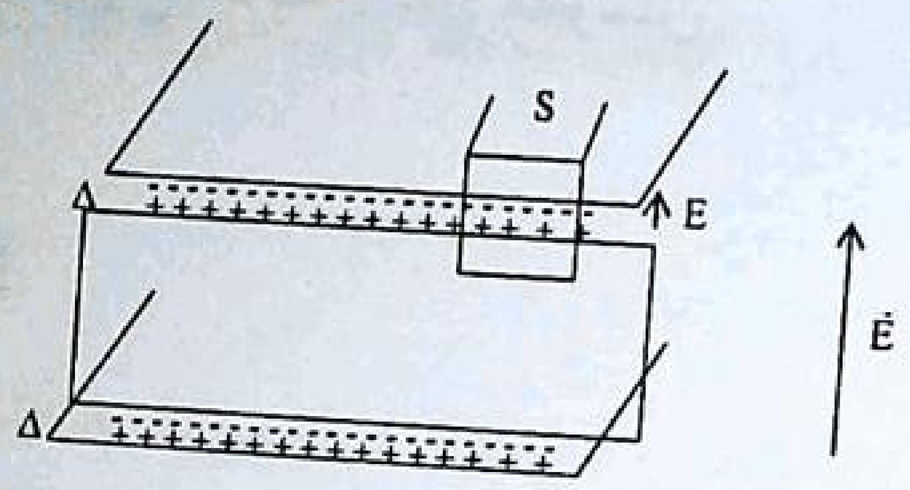
الشكل.1

لتكن σ_{pol} كثافة الشحنة السطحية الناتجة عن الاستقطاب : يتوضع على السطح S كل الشحنات التي كانت تبعد عنه مسافة δ قبل تطبيق الحقل أي كل الشحنات q الموجودة في الحجم $S\delta$، إنها $NS\delta$ وكثافة الشحنة σ_{pol} هي إذاً

$$\sigma_{pol} = qN\delta = P \quad (1.6)$$

لنفرض أن لدينا مكثفة مستوية وأننا ملأنا الخلاء بين لبوسيها بمادة عازلة استقطابها متجانس، تاركين فراغاً صغيراً بين اللبوسين وسطحي العازل؛ لتكن σ_0 كثافة الشحنة على سطحي اللبوسين و $E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ شدة الحقل الكهربائي قبل وضع العازل. نحصل على شدة الحقل $\vec{E}$ بوجود العازل بتطبيق مبرهنة غاوص. لدينا، الشكل.2

$$-ES = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{pol} - \sigma_0}{\varepsilon_0} S$$



الشكل.2

ومنه

$$E = \frac{\sigma_0 - \sigma_{pol}}{\varepsilon_0} \quad (1.7)$$

إن $P = \sigma_{pol}$ متناسب مع الحقل E، نكتب عامل التناسب على الشكل $\varepsilon_0 \chi$

$$P = \sigma_{pol} = \varepsilon_0 \chi E \quad (1.8)$$

<u>تعريفات 1</u> :

يطلق على χ اسم القابلية الكهربائية.

يمكن كتابة الحقل بدليل شحنة الموصل وحدها بأن نتخلص من σ_{pol} بين العلاقتين السابقتين

$$\varepsilon_0 E(1 + \chi) = \sigma_0 \quad (1.9)$$

$$E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 (1 + \chi)} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon}$$

يطلق على $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi)$ اسم سماحية العازل، وهي أكبر من سماحية الخواء ε_0، هذا يعني أن الحقل الكهربائي بين لبوسي المكثفة قد انخفض بالمقدار

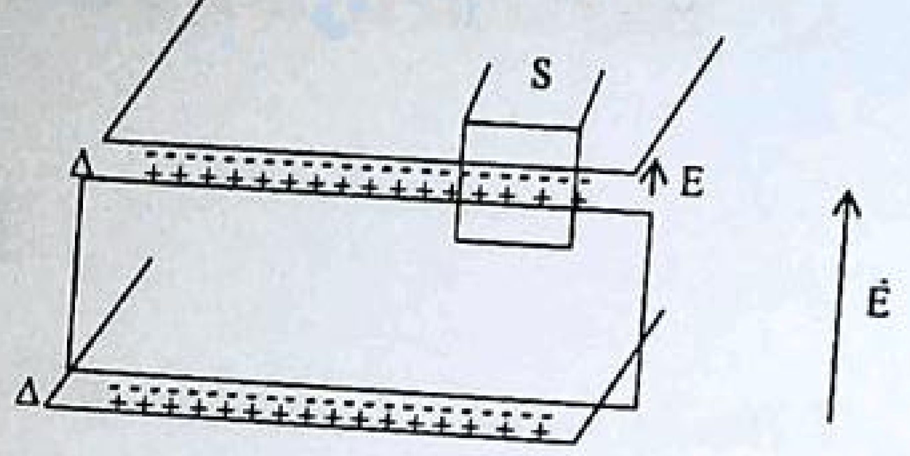
$$\kappa = 1 + \chi \quad (1.10)$$

لتكن σ_{pol} كثافة الشحنة السطحية الناتجة عن الاستقطاب : يتوضع على السطح S كل الشحنات التي كانت تبعد عنه مسافة δ قبل تطبيق الحقل أي كل الشحنات q الموجودة في الحجم $S\delta$، إنها $NS\delta$ وكثافة الشحنة σ_{pol} هي إذاً

$$\sigma_{pol} = qN\delta = P \qquad (1.6)$$

لنفرض أن لدينا مكثفة مستوية وأننا ملأنا الخلاء بين لبوسيها بمادة عازلة استقطابها متجانس، تاركين فراغاً صغيراً بين اللبوسين وسطحي العازل؛ لتكن σ_0 كثافة الشحنة على سطحي اللبوسين و $E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ شدة الحقل الكهربائي قبل وضع العازل. نحصل على شدة الحقل $\vec{E}$ بوجود العازل بتطبيق مبرهنة غاوص. لدينا، الشكل.2

$$-ES = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{pol} - \sigma_0}{\varepsilon_0}S$$



الشكل.2

ومنه

$$E = \frac{\sigma_0 - \sigma_{pol}}{\varepsilon_0} \qquad (1.7)$$

إن $P = \sigma_{pol}$ متناسب مع الحقل E ، نكتب عامل التناسب على الشكل $\varepsilon_0\chi$

$$P = \sigma_{pol} = \varepsilon_0\chi E \qquad (1.8)$$

<u>تعريفات 1</u> :

يطلق على χ اسم القابلية الكهربائية.

يمكن كتابة الحقل بدليل شحنة الموصل وحدها بأن نتخلص من σ_{pol} بين العلاقتين السابقتين

$$\varepsilon_0 E(1+\chi) = \sigma_0 \qquad (1.9)$$

$$E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0(1+\chi)} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon}$$

يطلق على $\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi)$ اسم سماحية العازل، وهي أكبر من سماحية الخواء ε_0، هذا يعني أن الحقل الكهربائي بين لبوسي المكثفة قد انخفض بالمقدار

$$\kappa = 1 + \chi \qquad (1.10)$$

وهي ثابتة العازل؛ وانخفض معه الكمون بنفس النسبة ولم يطرأ أي تغير على شحنة المكثفة، المسمى ثابتة العازل؛ والحصيلة إذاً هي ارتفاع سعة المكثفة بالمقدار κ :

$$Q = CV = C'V' = C'\frac{V}{\kappa} \qquad (1.11)$$

وهي النتيجة التجريبية التي اكتشفها فارادي عندما ملأ الفراغ الفاصل بين اللبوسين بمادة البارفين.

ملاحظة:
حصلنا على كثافة الشحنة على سطح العازل بتصور مسافة صغيرة Δ تفصل سطح العازل عن لبوس المكثفة، ومع ذلك فقد اعتبرنا أن الحقل الكهربائي E يملأ كل الفراغ بين اللبوسين، رغم أنه يساوي لـ E_0 في المجال Δ الذي لا يملأه العازل. إن $d \gg \Delta$ حيث d المسافة الفاصلة بين لبوسي المكثفة، $\Delta \to 0$ عندما يحتل العازل كل الفراغ الفاصل بين اللبوسين.

2.1- معادلات الكهربائية الراكدة

يعدل وجود العازل في حيز من الفضاء معادلة ماكسويل الأولى مضيفاً إلى كثافة الشحنة في واحدة الحجوم، التي نرمز لها بـ ρ_0، كثافة الشحنة $\rho_{pol} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$ الناتجة عن وجود استقطاب غير متجانس في جزء من هذا الحجم. لدينا بالتالي

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_0 + \rho_{pol}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}}{\varepsilon_0} \qquad (1.12)$$

قلنا إن الاستقطاب متناسب مع الحقل الكهربائي المطبق؛ وافترضنا في (1.8) أنه خطي، χ ثابتة و

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

نضع هذا المقدار في العلاقة السابقة لنجد أن

$$\varepsilon_0(1+\chi)\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho_0$$

وكما في (1.9)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon} \qquad (1.13)$$

تعريف 2 :

يطلق على المتجهة

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\vec{E} \qquad (1.14)$$

اسم التحريض الكهربائي.

نكتب (1.12) على الشكل

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_0 \qquad (1.12)'$$

إن (1.12) و'(1.12) هما معادلة ماكسويل الأولى بوجود العازل. يعبر إدخال المتجهة $\vec{D}$ عن رغبة فيزيائيي القرن التاسع عشر بكتابة كل المعادلات بدليل الشحنات الحرة، التي تشكل التيار والوحيدة الملموسة في نظرهم وإزاحة الاستقطاب "الافتراضي" من نتائجهم. هذا قبل أن تحتل النظرية الذرية مكانها وقبل معرفة آلية تشكل ثنائيات الاقطاب أو معرفة وجودها في الذرات القطبية.

تبين (1.13) أن مفعول وجود العازل على الحقل الكهربائي الراكد هو بالانتقال من الثابتة ε_0 إلى الثابتة ε وبالتالي فإن معادلة ماكسويل الثانية تبقى دون تغيير

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad (1.15)$$

وهذا هو الشرط اللازم والكافي لكي يكون الحقل مشتقاً من كمون، نكتب القوة كغراديان الطاقة الكهربائية الراكدة

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

لنأخذ على سبيل المثال مكثفة مستوية تفصل المسافة d لبوسيها، طاقتها الكامنة

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad (1.16)$$

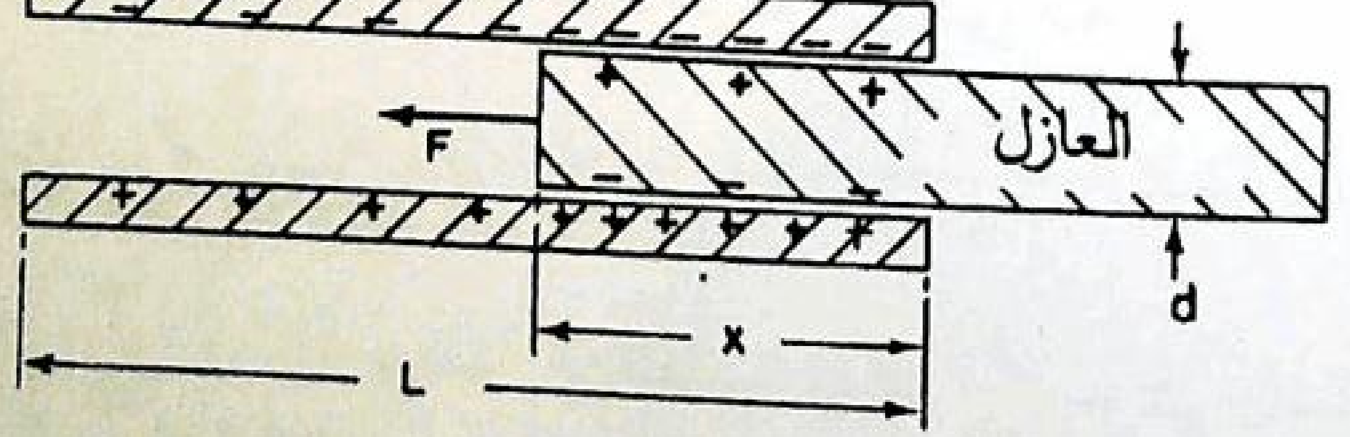
وسعتها بوجود عازل هي حسب (1.11)

$$\frac{\kappa\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon S}{d}$$

ومنه

$$U = \frac{1}{2\varepsilon}\frac{Q^2}{S}d$$

والطاقة الكهربائية الراكدة أصغر في حال امتلاء الفراغ بين اللبوسين بعازل منها في حال وجود الخلاء. وهكذا فإن إدخال شريحة العازل جزئياً يخفض قيمة الطاقة وتقع الحركة بحيث تصبح قيمتها أصغرية : تدفع القوى الكهربائية الشريحة لملئ كل الفراغ الفاصل بين اللبوسين، الشكل.3. ليكن S = ab سطح اللبوس ولنفرض أن العازل قد دخل مسافة x بين اللبوسين.



الشكل.3

إن سعة المكثفة الكلي هي حسب (1.11)

$$C = \kappa\frac{\varepsilon_0 x b}{d} + \frac{\varepsilon_0 (a-x) b}{d}$$

والقوة التي تدفع العازل لملئ كل الفراغ، في اتجاه x الموجب هي

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{Q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2}V^2\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2}V^2\frac{\varepsilon_0 b}{d}(\kappa - 1) \qquad (1.17)$$

ملاحظات:

1- لا تصح الدراسة التي قمنا بها إلا في حالة العوازل السائلة، ذلك أن حركة الشحنات (الأيونات) في مادة عازلة صلبة تغير شروط تانسور القوة في المادة العازلة الصلبة (الضغط والإجهاد) وتغير بالتالي خواصها الكهربائية. وهكذا فإن القول إن قوة تفاعل شحنتين q و q' داخل العازل هي

$$|\vec{F}| = \left|\frac{qq'}{4\pi\varepsilon r^2}\right|$$

مع ثبات ثابتة العازل κ $\varepsilon = \varepsilon_0\kappa$ في كل السائل. ومع ذلك فقد لا يصح إلا في حالة العوازل السائلة مع ثبات ثابتة العازل كقانون الكهرباء الراكدة الأساسي.

جرت كتب عديدة على إعطاء هذه العلاقة كقانون الكهرباء الراكدة الأساسي.

2- درجت كتب عديدة على إعطاء جذب جسم مشحون – مشط بعد حكه – لقطع العوازل الصغيرة – فتاتات الورق – في بدء عرضها كمثال على تجاذب الشحنات من نوعين مختلفين وعلى وجود قوة متناسبة مع الحقل الكهربائي. إلا أن قطع الورق ليست مشحونة في البداية ووجود الشحنات السالبة والموجبة على طرفيها ناتج عن الاستقطاب الذي أنتجه حقل المشط والمتناسب معه. يقع التجاذب لأن حقل المشط يتناقص بسرعة بين الطرف الذي يشحن سالباً والطرف الآخر المشحون موجباً وبما أن الاستقطاب متناسب مع الحقل المتغير والتفاعل مع المشط متناسب مع هذا الحقل، فإن شدة التفاعل متناسبة مع غراديان مربع الحقل! وليست المسألة بغاية السهولة.

3- فرضنا في كل ما فعلناه خطية العلاقة بين الحقل المطبق والاستقطاب وهي علاقة لا تصح إلا في حالة الحقول الضعيفة، كما أن القابلية الكهربائية تابعة لتغيرات الحقل مع الزمن. تفقد والحال هذه العلاقة بين التحريض والحقل عموميتها ويجب النظر إلى $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ كعلاقة تقريبية ومحدودة الصلاحية خلافاً لمعادلتي ماكسويل $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ و $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ العامتين والشاملتين.

3.1- حساب القابلية الإلكترونية والقطبية في الغازات

أشرنا مرات عديدة إلى تمثل حركة الإلكترون حول النواة عندما ننظر إليها من بعيد، أي من مسافات كبيرة بالنسبة لأبعاد الذرة بحركة هزاز توافقي (I.4§2) تحقق القوة التي يخضع لها قانون هوك، تتناسب

إن سعة المكثفة الكلي هي حسب (1.11)

$$C = \kappa\frac{\varepsilon_0 x b}{d} + \frac{\varepsilon_0 (a-x) b}{d}$$

والقوة التي تدفع العازل لملئ كل الفراغ، في اتجاه x الموجب هي

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{Q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2}V^2\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2}V^2\frac{\varepsilon_0 b}{d}(\kappa - 1) \qquad (1.17)$$

__ملاحظات:__

1- لا تصح الدراسة التي قمنا بها إلا في حالة العوازل السائلة، ذلك أن حركة الشحنات (الأيونات) في مادة عازلة صلبة تغير شروط تانسور القوة في المادة العازلة الصلبة (الضغط والإجهاد) وتغير بالتالي خواصها الكهربائية. وهكذا فإن القول إن قوة تفاعل شحنتين q و q' داخل العازل هي

$$|\vec{F}| = \left|\frac{qq'}{4\pi\varepsilon r^2}\right|$$

لا يصح إلا في حالة العوازل السائلة مع ثبات ثابتة العازل κ $\varepsilon = \varepsilon_0\kappa$ في كل السائل. ومع ذلك فقد جرت كتب عديدة على إعطاء هذه العلاقة كقانون الكهرباء الراكدة الأساسي.

2- درجت كتب عديدة على إعطاء جذب جسم مشحون – مشط بعد حكه – لقطع العوازل الصغيرة – فتاتات الورق – في بدء عرضها كمثال على تجاذب الشحنات من نوعين مختلفين وعلى وجود قوة متناسبة مع الحقل الكهربائي. إلا أن قطع الورق ليست مشحونة في البداية ووجود الشحنات السالبة والموجبة على طرفيها ناتج عن الاستقطاب الذي أنتجه حقل المشط والمتناسب معه. يقع التجاذب لأن حقل المشط يتناقص بسرعة بين الطرف الذي يشحن سالباً والطرف الآخر المشحون موجباً وبما أن الاستقطاب متناسب مع الحقل المتغير والتفاعل مع المشط متناسب مع هذا الحقل، فإن شدة التفاعل متناسبة مع غراديان مربع الحقل! وليست المسألة بغاية السهولة.

3- فرضنا في كل ما فعلناه خطية العلاقة بين الحقل المطبق والاستقطاب وهي علاقة لا تصح إلا في حالة الحقول الضعيفة، كما أن القابلية الكهربائية تابعة لتغيرات الحقل مع الزمن. تفقد والحال هذه العلاقة بين التحريض والحقل عموميتها ويجب النظر إلى $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ كعلاقة تقريبية ومحدودة الصلاحية خلافاً لمعادلتي ماكسويل $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ و $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$ العامتين والشاملتين.

3.1- حساب القابلية الإلكترونية والقطبية في الغازات

أشرنا مرات عديدة إلى تمثل حركة الإلكترون حول النواة عندما ننظر إليها من بعيد، أي من مسافات كبيرة بالنسبة لأبعاد الذرة بحركة هزاز توافقي (I.4§2) تحقق القوة التي يخضع لها قانون هوك، تتناسب

مع الاستطالة x، $F = kx$. ووجدنا أن الحركة دورية تواترها الزاوي هو $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. درسنا بعد ذلك حركة الهزاز المتخامد ثم القسري الخاضع لقوة خارجية (حقل كهربائي دوري تواتره ω) وأتبعنا ذلك بظاهرة الإرنان. المسألة هنا أسهل بكثير حيث لا يوجد تخامد وحيث الحقل الكهربائي راكد. معادلة حركة الإلكترون هي إذاً

$$mx'' + kx = eE \tag{1.18}$$

حيث e شحنة الإلكترون، نكتبها بدليل ω_0 على الشكل

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{eE}{m}$$

يبلغ الهزاز مداه – الاستطالة العظمى حيث ينعدم التسارع –، ولنرمز له بـ δ عندما تتحقق العلاقة $\omega_0^2\delta = \frac{eE}{m}$. إن δ هنا هي المسافة الفاصلة بين قطبي ثنائي القطب ومتجهة الاستقطاب حسب (1.2)

$$\bar{P} = Ne\bar{\delta} = \frac{Ne^2}{m\omega_0^2}\bar{E}$$

لكن $\bar{P}$ هو $\varepsilon_0\chi\bar{E}$ حسب (1.8)، ومنه

$$\chi = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega_0^2} \tag{1.19}$$

نكتب هذه العلاقة بدليل ثابتة العازل $\kappa = 1 + \chi$، على الشكل

$$\kappa - 1 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega_0^2} = N\alpha \tag{1.19'}$$

تعريف 3 :

نسمي $\alpha = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m\omega_0^2}$ استقطابية ذرة المادة العازلة.

إن منوال الهزاز التوافقي التقليدي لا يناسب دراسة الأجسام المجهرية الخاضعة إلى ميكانيك الكم؛ إن للهزاز التوافقي الكمومي تواترات متعددة وطاقات مكممة من الشكل $\frac{(2n+1)\hbar\omega}{2}$، وطاقة الذرة مكممة هي أيضاً وتتبع قيمتها قيمة العزم الزاوي المكمم لإلكتروناتها. سنرى في المجلد القادم (IV.3.§3) أن أخفض طاقة لذرة الهدروجين، طاقة ريدبرغ، هي 13,6 – إلكترون فولت – نكتبها في نظمة الوحدات السغثية $(4\pi\varepsilon_0 = 1)$ على الشكل $E = \frac{1}{2}\frac{me^4}{\hbar^2}$، يقابلها تواتر هو $\omega_0 = \frac{E}{\hbar}$. نحصل عندما نضع هذه القيمة في '(1.19) ونستبدل ε_0 بـ $\frac{1}{4\pi}$ على استقطابية الهدروجين $\alpha = 16\pi\left(\frac{\hbar^2}{me^2}\right)^3$ حيث $\frac{\hbar^2}{me^2}$ هو نصف قطر بور $0{,}528\cdot10^{-10}$م. ونحصل، من جهة أخرى، على عدد الذرات في واحدة الحجوم بتقسيم عدد أفوغادرو على حجم المول في شروط الضغط والحرارة الاعتياديين لنصل إلى ثابتة العازل لهذا الغاز

$\kappa = 1,00020$ القريبة من القياس التجريبي 1,00026؛ خاصة وأن هذا القياس هو لجزيء الهدروجين H_2 وليس لذرة الهدروجين.

لنلاحظ كذلك أن حساب ثابتة العوازل هي للحالات الغازية حيث تعرف N بدقة وليس للحالات المائعة. هذا في حال الغازات اللاقطبية، أما من أجل الغازات القطبية كبخار الماء فلجزيئاته استقطاب وتتجه استقطابات الجزيئات عشوائياً في مختلف اتجاهات الفضاء المتناحي والاستقطاب الكلي معدوم بالتقاص بينها. إن طاقة الجزيء بوجود حقل خارجي ثابت الاتجاه $\vec{E}$ هي

$$u = -\vec{p}_0 \cdot \vec{E}$$
$$= -p_0 E\cos\theta$$

حيث $\vec{p}_0$ استقطاب الجزيء و θ الزاوية التي يعملها مع اتجاه الحقل. لدينا بإهمال تفاعلات ذرات الغاز فيما بينها، أي باعتبار الغاز غازاً كاملاً يخضع لتوزع بولتزمان (انظر (II.3§2) الذي يحدد احتمال وجود الذرة في طاقة ودرجة حرارة محددتين

$$n(\theta) = n_0 e^{-\frac{u(\theta)}{kT}} = n_0 e^{+\frac{p_0 E\cos\theta}{kT}} \quad (1.20)$$

حيث T درجة الحرارة و k[1] ثابتة بولتزمان، n_0 ثابتة تناسب يحددها الجمع على واحدة الحجوم الذي يعطي العدد N. نأخذ عنصر الحجم الزاوية المجسمة $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ ونكتب

$$N = n_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\, e^{+\frac{p_0 E\cos\theta}{kT}} \sin\theta$$

الدالة الأسية صغيرة لأن الحقل الكهربائي والاستقطاب الذري صغيران ودرجة الحرارة مرتفعة (وإلا لاستحال استعمال توزع بولتزمان) أي أن لدينا في تقريب أولي

$$N = n_0 2\pi \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{p_0 E\cos\theta}{kT}\right) \sin\theta d\theta$$

ومنه

$$N = n_0 \times 4\pi$$

و

$$n_0 = \frac{N}{4\pi}$$

لنحسب الآن الاستقطاب P المتناسب مع E، إنه في التقريب الذي قبلناه

$$P = \int n(\theta) p_0 \cos\theta d\Omega \quad (1.21)$$
$$= \frac{N}{4\pi} \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{p_0 E\cos\theta}{kT}\right) p_0 \cos\theta\, 2\pi \sin\theta d\theta$$
$$= \frac{-N}{2} \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{p_0 E\cos\theta}{kT}\right) p_0 \cos\theta\, d\cos\theta$$

---

[1] قسنا في كتاب الميكانيك الإحصائي والترموديناميك T بوحدات الطاقة بحيث تأخذ k القيمة 1 ولا تظهر في أغلب العلاقات؛ نضعها عندما نقيس T بدرجات الحرارة المطلقة.

$\kappa = 1,00020$ القريبة من القياس التجريبي $1,00026$؛ خاصة وأن هذا القياس هو لجزيء الهدروجين H_2 وليس لذرة الهدروجين.

لنلاحظ كذلك أن حساب ثابتة العوازل هي للحالات الغازية حيث تعرف N بدقة وليس للحالات المائعة. هذا في حال الغازات اللاقطبية، أما من أجل الغازات القطبية كبخار الماء فلجزيئاته استقطاب وتتجه استقطابات الجزيئات عشوائياً في مختلف اتجاهات الفضاء المتناحي والاستقطاب الكلي معدوم بالتقاص بينها. إن طاقة الجزيء بوجود حقل خارجي ثابت الاتجاه $\vec{E}$ هي

$$u = -\vec{p}_0 \cdot \vec{E}$$
$$= -p_0 E\cos\theta$$

حيث $\vec{p}_0$ استقطاب الجزيء و θ الزاوية التي يعملها مع اتجاه الحقل. لدينا بإهمال تفاعلات ذرات الغاز فيما بينها، أي باعتبار الغاز غازاً كاملاً يخضع لتوزع بولتزمان (انظر (II.3§2) الذي يحدد احتمال وجود الذرة في طاقة ودرجة حرارة محددتين

$$n(\theta) = n_0 e^{-\frac{u(\theta)}{kT}} = n_0 e^{+\frac{p_0 E\cos\theta}{kT}} \qquad (1.20)$$

حيث T درجة الحرارة و k [1] ثابتة بولتزمان، n_0 ثابتة تناسب يحددها الجمع على واحدة الحجوم الذي يعطي العدد N. نأخذ عنصر الحجم الزاوية المجسمة $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ ونكتب

$$N = n_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \, e^{+\frac{p_0 E\cos\theta}{kT}} \sin\theta$$

الدالة الأسية صغيرة لأن الحقل الكهربائي والاستقطاب الذري صغيران ودرجة الحرارة مرتفعة (وإلا لاستحال استعمال توزع بولتزمان) أي أن لدينا في تقريب أولي

$$N = n_0 2\pi \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{p_0 E\cos\theta}{kT}\right) \sin\theta d\theta$$

ومنه

$$N = n_0 \times 4\pi$$

و

$$n_0 = \frac{N}{4\pi}$$

لنحسب الآن الاستقطاب P المتناسب مع E، إنه في التقريب الذي قبلناه

$$P = \int n(\theta) p_0 \cos\theta d\Omega \qquad (1.21)$$
$$= \frac{N}{4\pi} \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{p_0 E\cos\theta}{kT}\right) p_0\cos\theta \, 2\pi\sin\theta d\theta$$
$$= \frac{-N}{2} \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{p_0 E\cos\theta}{kT}\right) p_0\cos\theta \, d\cos\theta$$

---

[1] قسنا في كتاب الميكانيك الإحصائي والترموديناميك T بوحدات الطاقة بحيث تأخذ k القيمة 1 ولا تظهر في أغلب العلاقات؛ نضعها عندما نقيس T بدرجات الحرارة المطلقة.

تنعدم نتيجة التكامل عندما تكون قوة زوجية لـ $\cos\theta$ وتبقى النتيجة الفردية

$$-\frac{N}{2}\frac{p_0^2E}{kT}\int_0^{\pi}\cos^2\theta d\cos\theta$$

قيمة التكامل $-2/3$ ومنه

$$=\frac{Np_0^2E}{3kT}=\varepsilon_0\chi E$$

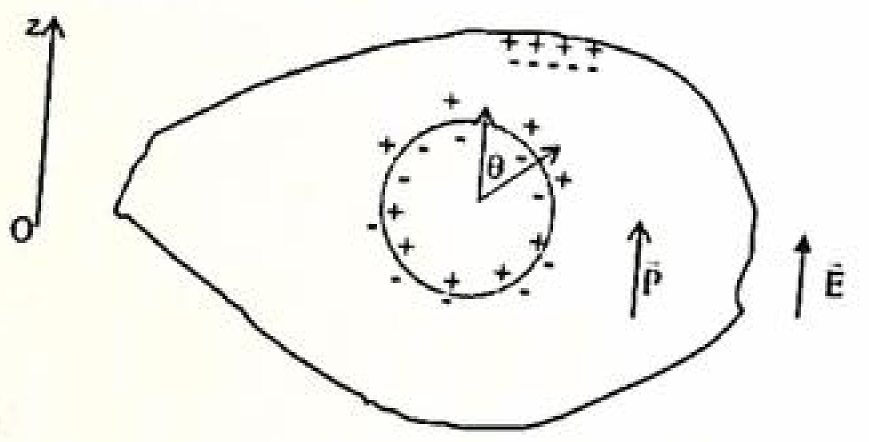
والقابلية الكهربائية للغاز القطبي هي

$$\chi=\frac{Np_0^2}{3\varepsilon_0 kT} \quad (1.22)$$

يعرف تناسب القابلية مع T^{-1} باسم قانون كوري Curie : ينخفض الاستقطاب (في اتجاه الحقل) عندما ترتفع درجة الحرارة ويرتفع معها تصادم الجزيئات الذي يعيق اصطفاف الجزيئات في اتجاه الحقل.

4.1- الاستقطاب الإلكتروني في المائع

لا يصح تقريب الغاز الكامل؛ الذي يهمل تفاعل الجزيئات فيما بينها، تفاعل ثنائيات الأقطاب، عندما تكون الجزيئات قريبة من بعضها. يجب بالتالي حساب القابلية الكهربائية بطريقة جهرية تأخذ بعين الاعتبار تأثير استقطاب المائع على حيز ما من الحجم الكلي. لنتصور أننا اقتطعنا كرة صغيرة في هذا الحجم، نصف قطرها r كبير أمام أبعاد ثنائي القطب $\delta \ll r$، وليكن $\bar{P}$ استقطاب المائع المتناسب مع $\bar{E}$، الشكل.4



الشكل.4

ينتج عن هذا الاستقطاب ظهور شحنات على سطح الفجوة موجبة في نصف الكرة الجنوبي وسالبة في النصف الشمالي. كثافتها في اتجاه يعمل زاوية θ مع اتجاه $\bar{P}$ هي

$$\sigma=-P\cos\theta$$

تنتج هذه الكثافة حقلاً كهربائياً $\frac{-P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ في مركز الكرة، في اتجاه المركز من أجل الشحنات الموجبة وفي الاتجاه المعاكس من أجل الشحنات السالبة؛ مسقطه على Oz هو بضربه بـ $\cos(\theta+\pi)$ والحقل الكلي في مركز الكرة هو بالتكامل على كل السطح الكروي

تنعدم نتيجة التكامل عندما تكون قوة زوجية لـ $\cos\theta$ وتبقى النتيجة الفردية

$$-\frac{N}{2}\frac{p_0^2E}{kT}\int_0^{\pi}\cos^2\theta d\cos\theta$$

قيمة التكامل 2/3- ومنه

$$=\frac{Np_0^2E}{3kT}=\varepsilon_0\chi E$$

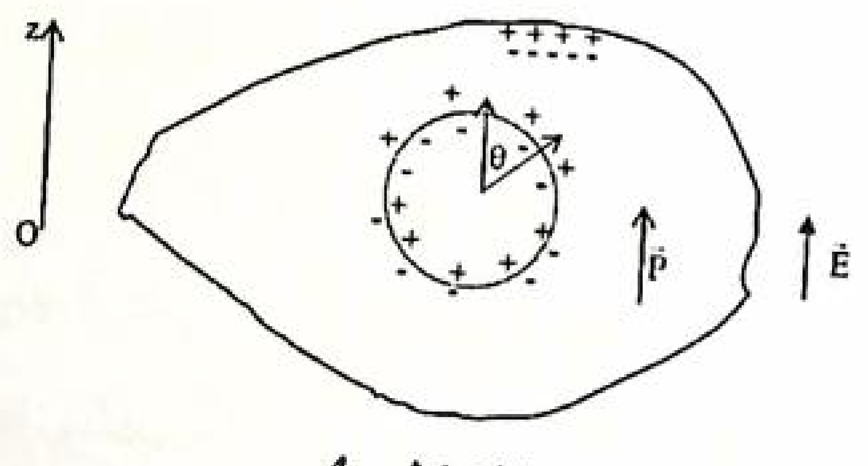
والقابلية الكهربائية للغاز القطبي هي

$$\chi=\frac{Np_0^2}{3\varepsilon_0 kT} \tag{1.22}$$

يعرف تناسب القابلية مع T^{-1} باسم قانون كوري Curie : ينخفض الاستقطاب (في اتجاه الحقل) عندما ترتفع درجة الحرارة ويرتفع معها تصادم الجزيئات الذي يعيق اصطفاف الجزيئات في اتجاه الحقل.

4.1- الاستقطاب الإلكتروني في المائع

لا يصح تقريب الغاز الكامل؛ الذي يهمل تفاعل الجزيئات فيما بينها، تفاعل ثنائيات الأقطاب، عندما تكون الجزيئات قريبة من بعضها. يجب بالتالي حساب القابلية الكهربائية بطريقة جهرية تأخذ بعين الاعتبار تأثير استقطاب المائع على حيز ما من الحجم الكلي. لنتصور أننا اقتطعنا كرة صغيرة في هذا الحجم، نصف قطرها r كبير أمام أبعاد ثنائي القطب $\delta \ll r$، وليكن $\vec{P}$ استقطاب المائع المتناسب مع $\vec{E}$، الشكل.4



الشكل.4

ينتج عن هذا الاستقطاب ظهور شحنات على سطح الفجوة موجبة في نصف الكرة الجنوبي وسالبة في النصف الشمالي. كثافتها في اتجاه يعمل زاوية θ مع اتجاه $\vec{P}$ هي

$$\sigma=-P\cos\theta$$

تنتج هذه الكثافة حقلاً كهربائياً $\frac{-P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ في مركز الكرة، في اتجاه المركز من أجل الشحنات الموجبة وفي الاتجاه المعاكس من أجل الشحنات السالبة؛ مسقطه على Oz هو بضربه بـ $\cos(\theta+\pi)$ والحقل الكلي في مركز الكرة هو بالتكامل على كل السطح الكروي

$$\int_0^{\pi} \frac{P\cos^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 2\pi r^2 \sin\theta d\theta = \frac{P}{3\varepsilon_0} \quad (1.23)$$

والحقل الكلي في التجويف E_0 هو الحقل المطبق E مضافاً إليه الحقل الناتج عن استقطاب الجوار

$$E_0 = E + \frac{P}{3\varepsilon_0} \quad (1.23)'$$

وبالتالي فإنه الحقل الذي يستقطب كل ذرة من ذرات المائع. ولدينا من أجل واحدة الحجوم حيث توجد N ذرة بدليل الحقل المطبق E

$$P = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3}} \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \chi E \quad (1.24)$$

ومنه القابلية

$$\chi = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3}} \quad (1.25)$$

المعروفة باسم معادلة كلاوزيوس–موسوتي Clausius-Mossotti. تختزل هذه العلاقة عندما يكون السائل مخلخلاً – قريباً من الغاز الكامل –، حيث عدد الذرات في واحدة الحجوم صغير و $N\alpha$ صغير أمام 1 في المخرج إلى علاقة الغاز '(1.19)

$$\chi = N\alpha$$

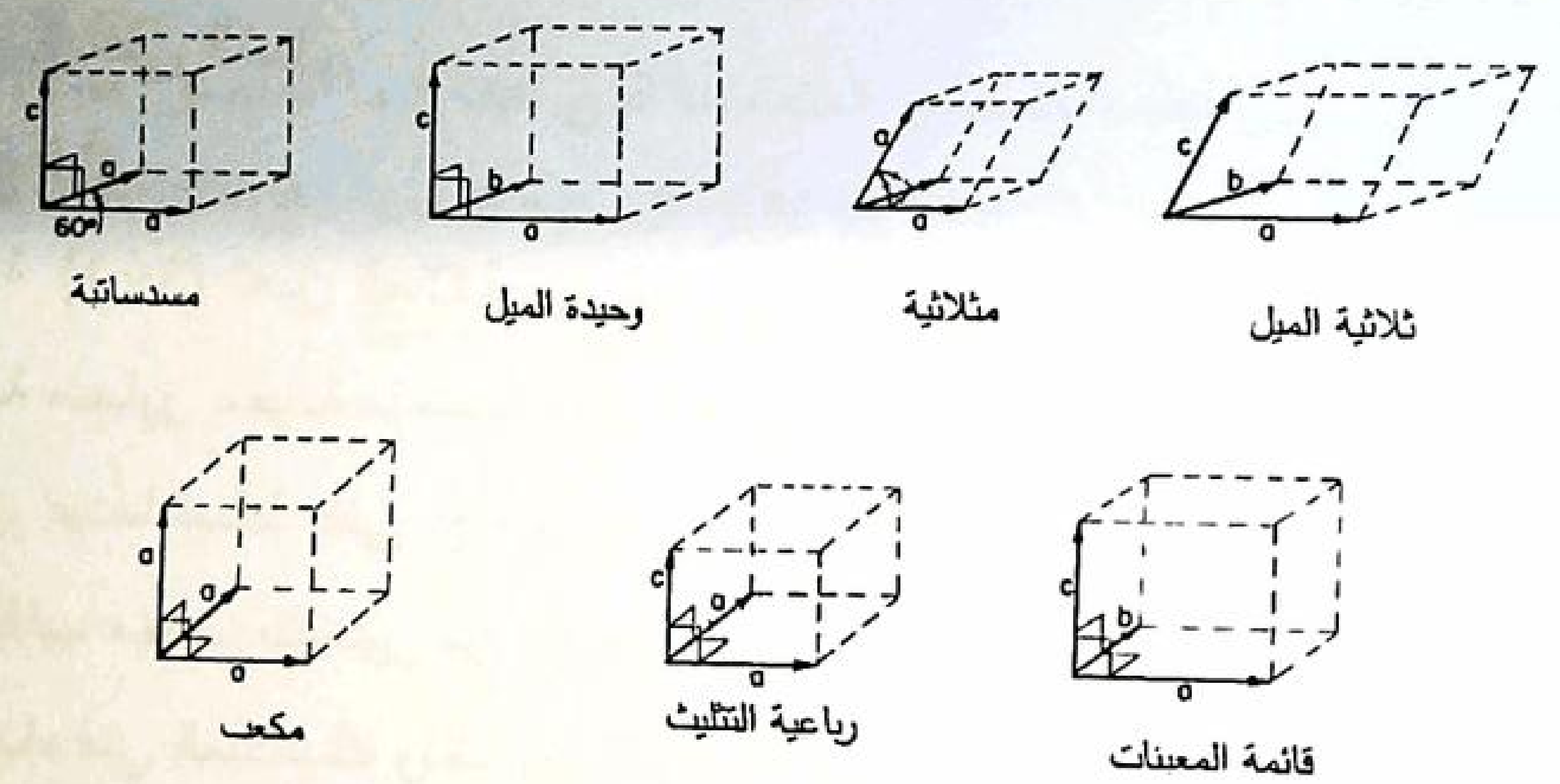
ذكرنا منذ قليل بطريقة حساب كثافة الغاز في شروط الضغط ودرجة الحرارة الاعتيادية؛ أما كثافة المائع فتحددها الجداول التجريبية في درجة الحرارة 20°C. إن نسبة هاتين الكثافتين من أجل الأكسجين O_2 هي 832 وعدد الذرات في واحدة الحجم المائع أكبر بـ 832 مرة منها في الغاز. إن ثابتة غاز الأكسجين هي $\kappa = 1 + \chi = 1,000523$ ومنه $N\alpha = 0,000523$. لنفرض في تقريب أولي ثبات الاستقطابية الذرية عند الانتقال من الحالة الغازية إلى الحالة المائعة فإن $N\alpha$ في (1.25) أكبر بـ 832 مرة من هذه القيمة و $\chi = 0,509$ نظرياً. والقيمة التجريبية هي 0,507. وكذلك الأمر بالنسبة لغاز الأرغون حيث النسبة 810 و $N\alpha$ الغازية هي 0,000545 والقيمة التي تعطيها (1.25) هي 0,517 والتجريبية 0,54.

5.1– استقطاب الجسم الصلب

فرضنا حتى الآن تناسب الاستقطاب مع الحقل المطبق $\vec{P} = \alpha\vec{E}$. إلا أن الأمر يختلف في حالة الجسم الصلب التي يزول فيها مفهوم التجانس والتناحي، فللجسم الصلب بنية بلورية تحتل الذرات فيها مواقع محددة وتتميز بتناظرها الهندسي : بدورانات منتهية وانعكاسات وانسحابات لا تغير الانتظام المجهري للجسم الصلب. تُبنى الخلية البدائية (الشبيكة Lattice) انطلاقاً من موقع ذرة ما بتعيين مواقع الذرات الثلاثة الأولى الأقرب إليها أي بتحديد ثلاث متجهات لا تقع في مستو واحد $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ مبدؤها الذرة

المختارة. فالخلية البدائية هي متوازي السطوح المقام على هذه المحاور التي تشكل انسحاباته في هذه الاتجاهات البلورة كاملة؛ ويطلق عادة على أي مجموعة من الذرات تبنى البلورة انطلاقاً منها اسم الخلية الواحدية. فالخلية البدائية هي نوع من أنواع الخلية الواحدية الأصغر حجماً : $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.

إن أقل الشبيكات تناظراً هي المسماة ثلاثية الميل Triclinic حيث تختلف الأطوال $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ عن بعضها وكذلك الزوايا، الشكل.5، والخلية البدائية هي متوازي سطوح مقام على هذه المتجهات، يتحسن التناظر عندما تتساوى الأطوال وتتساوى الزوايا بينها زوجاً زوجاً وتسمى الشبيكة مثلاثية Trigonal. وإذا كانت إحدى المتجهات عمودية على المتجهتين الباقيتين $\vec{c} \perp \vec{a}$، $\vec{b}$ مثلاً فالخلية وحيدة الميل Monoclinic؛ وإذا كانت الزاوية بين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تساوي 60° تصبح الخلية وحيدة الميل مسدساتية Hexogonal. وإذا أصبحت كل الزوايا قائمة أي أصبح متوازي السطوح متوازي مستطيلات فالخلية قائمة المعينات Orthorhombic، وهي رباعية التثليث Tetragonal إذا تساوى طولا متجهتين، إضافة إلى الزوايا القائمة. وأكثر الخلايا تناظراً المكعب.

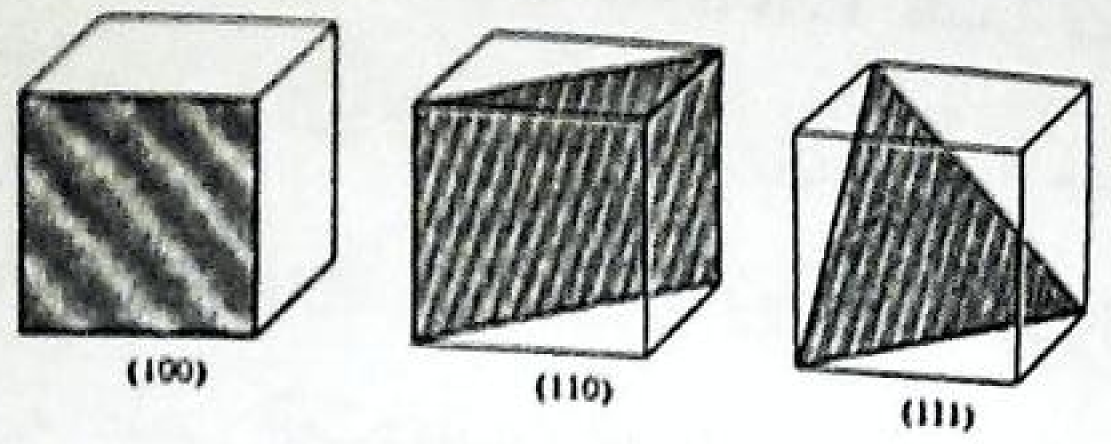


الشكل.5

إن عدد زمر التناظر التي تحققها هذه الأصناف السبعة هو 230.

يمكن تعيين وضع واتجاه مستو ما في البلورة بأخذ ثلاث ذرات تقع كل ذرة منها على أحد محاور البلورة ويتعين المستوي بثابتات الشبيكة $|\vec{a}|$، $|\vec{b}|$، $|\vec{c}|$. لتكن هذه الذرات في الوضع $(4, 0, 0)$، $(0, 1, 0)$، $(0, 0, 2)$ على الترتيب، تعين الأعداد $(4, 1, 2)$ المستوي. يؤخذ عادة مقلوب هذه الأعداد $\frac{1}{4}$، 1، $\frac{1}{2}$ وتكتب بواسطة أصغر مخرج مشترك (4) على الشكل $(1, 4, 2)$ أما إذا كان المستوي موازياً لأحد المحاور (تقاطعه مع المحور الثالث في اللانهاية) فيتعين بـ (n, n, ∞) يقابله المقلوب $\frac{1}{n}$، $\frac{1}{n}$، 0 ويتميز المستوي بـ $(1, 1, 0)$ تسمى الأعداد (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) التي تعين المستوي على هذا النحو مدلات ميلر Miller indices.

يوضح، الشكل.6، بعض هذه المدلات لبعض المستويات الهامة في البلورة المكعبة. سنعود إلى هذه المدلات بعد قليل لنرى مغزى أخذ مقلوب الأعداد الصحيحة التي تعين تقاطع المستوي مع المحاور الثلاثة.



الشكل.6

تبين هذه الإطلالة على بنية البلورة أن الأجسام الصلبة غير متناحية وأن التناسب بين الحقل الكهربائي والاستقطاب لا يصح إلا إذا وقع الحقل في اتجاه $\vec{a}$ أو $\vec{b}$ أو $\vec{c}$ على سبيل المثال. سنبقي مع ذلك فرضنا بتناسب القيمة المطلقة لـ $\vec{E}$ مع القيمة المطلقة لـ $\vec{P}$ عندما لا يكون الحقل المطبق كبيراً ونكتب العلاقة الخطية بين $\vec{P}$ و $\vec{E}$ على الشكل

$$\vec{P} = \alpha\vec{E} \qquad (1.26)$$

حيث α مصفوفة (3×3) تعين العلاقة بين المتجهتين $\vec{P}$ و $\vec{E}$ في الفضاء ثلاثي الأبعاد. لدينا، عندما نسقط على نظمة محاور معينة متعامدة (مستقلة عن محاور البلورة) $P_x = \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z$ وعلاقتين مماثلتين عندما نسقط على Oy و Oz.

وهكذا فإن الاستقطاب معرف بتانسور من الرتبة الثانية في الفضاء ثلاثي الأبعاد. فهو على غرار تانسور العطالة الذي رأيناه في الميكانيك وتانسور القوى المؤثرة على حجم ما من السائل التي رأيناها في الترموديناميك.

$$\begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \qquad (1.27)$$

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij}E_j \qquad x, y, z = i, j \qquad (1.26)'$$

إن العمل اللازم لانتقال شحنة ذرية q مسافة $d\vec{r}$ في الحقل $\vec{E}$ هو $qd\vec{r}\vec{E}$ ولـ N شحنة في واحدة الحجوم هو $Nqd\vec{r}\cdot\vec{E}$ ويساوي تعريفاً $d\vec{P}\cdot\vec{E}$ والعمل الكلي الواجب بذله انطلاقاً من الاستقطاب $\vec{P}=0$ إلى $\vec{P}$ هو تطبيق $(1.26)'$

$$u = \int_0^P \vec{E}\cdot d\vec{P} = \vec{P}\cdot\vec{E} = \sum_i P_i \cdot E_i = \frac{1}{2}\sum_{ij}\alpha_{ij}E_jE_i \qquad (1.28)$$

إن الطرف الثاني صيغة من الدرجة الثانية (صيغة تربيعية) تعين في الفضاء مجسم قطع ناقص (لأن u موجبة) يماثل مجسم القطع الناقص العطالي الذي درسناه في الميكانيك (I.(5§2.4) نسميه مجسم القطع الناقص الطاقي

$$2u = \alpha_{xx}E_x^2 + \alpha_{yy}E_y^2 + (\alpha_{xy} + \alpha_{yx})E_xE_y + (\alpha_{xz} + \alpha_{zx})E_xE_z + (\alpha_{yz} + \alpha_{zy})E_yE_z + \alpha_{zz}E_z^2 \quad (1.29)$$

لنلاحظ أن الطرف الثاني متناظر بالنسبة لأي زوج من المتغيرات بمعنى أن الطاقة المبذولة عندما نضع الحقل في اتجاه Ox ثم في اتجاه Oy $\alpha_{xy}E_xE_y$ هي ذاتها المبذولة عندما نضع الحقل في اتجاه Oy أولاً ثم في اتجاه Ox $\alpha_{yx}E_yE_x$، إذ تعود الطاقة إلى الصفر عند إزالة E_y أولاً وبعده E_x في الحالة الأولى، أو E_x أولاً و E_y بعده في الحالة الثانية. إن تناظر التانسور (المصفوفة) $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ يعني أنه من الممكن وضع الصيغة التربيعية على شكل قانوني، يزيل الحدود "المستطيلة" في (1.29) ويتيح كتابة المصفوفة α على شكل قطري في جملة محاور جديدة نسميها كما في حال مجسم القطع الناقص العطالي المحاور الرئيسية.

لتكن B مصفوفة الانتقال من نظمة المحاور المتعامدة التي عينا فيها عناصر α (1.27) إلى نظمة المحاور الأساسية، حيث α قطرية و $|\alpha - \lambda I|$ كثير الحدود المميز. إن $\tilde{B} = B^{-1}$ حيث $\tilde{B}$ منقول المصفوفة B و B^{-1} مقلوبها. نكتب (1.26) في جملة المحاور الأساسية

$$\vec{P}' = \alpha'\vec{E}'$$

إن $\vec{P}' = \tilde{B}\vec{P}$ ، $\vec{E}' = \tilde{B}\vec{E}$ ومنه

$$\vec{P}' = \tilde{B}\vec{P} = \tilde{B}\alpha\vec{E} = \tilde{B}\alpha\tilde{B}^{-1}\vec{E}' = \alpha'\vec{E}'$$

و

$$\alpha' = B^{-1}\alpha B$$

يمكن للقيم الخاصة الثلاثة لـ α' أن تكون مختلفة عن بعضها وطول محاور مجسم القطع الناقص مختلفة ولا يوجد أي تناظر وهذا ما يقابل الشبيكات ثلاثية الميل الأقل تناظراً؛ يمكن أن تتطابق قيمتان خاصتان ولمجسم القطع الناقص تناظر دوراني حول المحور الثالث، وهذا ما يقابل الشبيكات رباعية التثليث (الدوامة المتناظرة في الميكانيك). يمكن كذلك أن تتطابق القيم الخاصة الثلاثة ويصبح المجسم كرة، وهذا ما يقابل الشبيكة المكعبة (الدوامة الكروية في الميكانيك). أما ما يقابل الشبيكة وحيدة الميل المتناظرة بدوران زاوية π حول المحور c فهو مجسم قطع ناقص له نفس التناظر : يقع أحد محاوره في اتجاه محور تناظر البلورة. وبما أن تناظرات الشبيكة قائمة المعينات هي دورانات زاوية π حول أي محور من محاورها الثلاثة فإن اتجاه محاور مجسم القطع الناقص تقابل اتجاه محاور الشبيكة. والخلاصة أن التناظر الكروي المقابل لتناحي الفضاء لا يظهر إلا في حال الشبيكات المكعبة الأكثر تناظراً.

لنفرض إذاً أن الجسم الصلب متجانس $\vec{P} \sim \vec{E}$ ولنعد لدراسة حركة الإلكترون في الذرة إلى تقريب الهزاز التوافقي المقسور والمتخامد – قوى التبدد التي يخضع لها متناسبة مع السرعة – ذي التواتر $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ الخاضع إلى حقل كهربائي دوري $E = E_0 e^{i\omega t}$ (درسنا بالتفصيل حركة هذا الهزاز في ((I.(4.§2)). نكتب معادلة حركته[2] في اتجاه الحقل

$$m\left(x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x\right) = eE_0 e^{i\omega t} \qquad (1.30)$$

نفتش عن حل من الشكل $x = x_0 e^{i\omega t}$ لنحصل على ينوس الهزاز بنفس التواتر ω مع فرق طور φ، المعادلة التي تعين x بدليل E

$$\left(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2\right)x_0 = \frac{e}{m}E_0$$

ومنه

$$x = \frac{\frac{e}{m}}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}E \qquad (1.31)$$

ولدينا كما في (§3.1) العلاقة بين الاستقطابية الذرية p والحقل E

$$p = \frac{e^2/m}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}E = \varepsilon_0\alpha(\omega)E$$

ومنه

تعريف 4 :

نسمي الاستقطابية الذرية المقدار

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2/m\varepsilon_0}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} \qquad (1.32)$$

لا تختلف المعالجة الكمومية لحركة الإلكترون في الذرة كثيراً عن هذه النتيجة إلا بوجود مستويات عديدة لطاقة الإلكترون وبالتالي تواترات خاصة له نكتبها على الشكل ω_{0k} ... $k = 0, 1, 2,$ (لا ننسى الصلة في الميكانيك الكم بين الطاقة والتواتر $E = \hbar\omega$). يقابل كل تواتر تبدد خاص به نرمز له بـ γ_k ومعامل شدة f_k قريب من الواحد بحيث تأخذ $\alpha(\omega)$ الشكل

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m}\sum_k \frac{f_k}{-\omega^2 + i\gamma_k\omega + \omega_{0k}^2} \qquad (1.33)$$

ولدينا متجهة استقطاب واحدة الحجوم $\vec{P}$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 N\alpha(\omega)\vec{E} \qquad (1.34)$$

---

[2] أخذنا هنا ثابتة التناسب γ من أجل واحدة الكتلة فهي إذاً $\frac{1}{\tau}$ المعرفة في (((I.4.(2.23)).

إنه الاستقطاب الذي يحدثه حقل كهربائي دوري داخل المادة. إن الاستقطابية الذرية $\alpha(\omega)$ صغيرة في التواترات العالية، هذا من جهة، ومن جهة ثانية فإن الطور بين $\bar{E}$ و $\bar{P}$ يعني أن الاستقطاب متأخر عن الحقل الكهربائي. نرى بحساب بسيط بضرب الصورة والمخرج في (1.31) بمرافق المخرج وكتابة x على الشكل $x = x_0 e^{i(\omega t+\varphi)}$ أن فرق الطور φ هو

$$\varphi = tg^{-1}\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad (1.35)$$

حيث ترمز $arctg = tg^{-1}$ للدالة العكسية لـ tg.

2. الاستقطاب المغنطيسي

1.2– العزم الزاوي والعزم المغنطيسي

لتكن لدينا شحنة كهربائية نقطية، q، كتلتها m تتحرك تحت تأثير قوة مركزية حركة دائرية بسرعة $\bar{v}$؛ ليكن r نصف الدائرة. نرمز للعزم الزاوي المنحفظ لهذه الشحنة بـ $\bar{J}$ ويساوي في مركز الدائرة لـ

$$\bar{J} = m\bar{r} \times \bar{v} = \bar{r} \times \bar{p} \qquad (2.1)$$

حيث $\bar{p}$ الاندفاع الخطي للشحنة. نسمي $\bar{J}$ المرتبط بحركة الجسيم، بمداره، العزم الزاوي المداري. تحدث هذه الشحنة في حركتها تياراً كهربائياً شدته مقاسة بتردد الشحنة υ

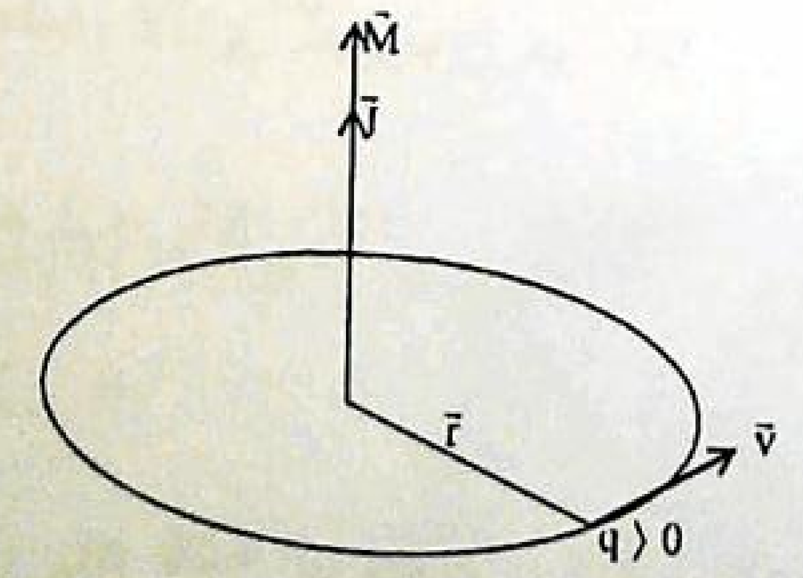
$$I = q\upsilon = q\left(\frac{2\pi r}{v}\right)^{-1}$$

وتنتج بالتالي عزماً مغنطيسياً عمودياً على اتجاه التيار الموجب، طويلته شدة التيار مضروبة بسطح الدائرة

$$\left|\bar{M}\right| = q\upsilon\pi r^2 = \frac{qvr}{2} \qquad (2.2)$$

إنه في اتجاه العزم الزاوي أو في الاتجاه المعاكس حسبما تكون q موجبة أو سالبة، الشكل.7، ولدينا

$$\bar{M} = \frac{q}{2m}\bar{J} \qquad (2.3)$$



الشكل.7

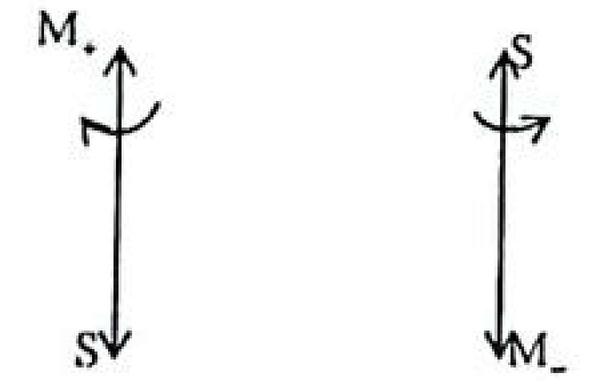
تبقى علاقة التناسب بين هذين العزمين صحيحة في ميكانيك الكم أيضاً، رغم انعدام مفهوم المسار فيه. إلا أن العزم الزاوي مكمم في هذا الميكانيك : لا يأخذ مسقطه على محور ما إلا قيماً صحيحة عددها $2J+1$، J، $-J+1$، ...، 0، 1، ...، J، حيث J طويلة العزم. وحدة قياس العزم الزاوي في ميكانيك الكم هي $\hbar$ لأن $\bar{p}$ مقاس بهذه الوحدات عندما نكمم العلاقة (2.1).

تتمتع الجسيمات بعزم زاوي آخر، مستقل عن حركتها يسمى السبين (وتعني الكلمة لغةً اللف) يعرّفها كما تُعرفها كتلتها وشحنتها وصفاتها المميزة الأخرى، فهو عزم زاوي صميمي يحدث عزماً مغنطيسياً كما في (2.3) لكن ثابتة التناسب تختلف من جسيم أولي إلى آخر ومن نواة أو ذرة إلى أخرى حسب عدد الجسيمات الأولية التي تكونها. تأخذ (2.3) في ميكانيك الكم الشكل

$$\vec{M} = g\frac{q}{2m}\vec{J} \qquad (2.4)$$

يحدد ميكانيك الكم (IV.3§4) قيمة هذه الثابتة g المسماة معامل لاندي Landé ويبين في الوقت نفسه أن سبين الجسيمات الأولية هو إما عدد صحيح – وتسمى الجسيمات عندئذ بوزونات – أو نصف صحيح – وتسمى الجسيمات فيرميونات. فالإلكترون فيرميون سبينه $\frac{1}{2}$ ومسقطه على محور ما يأخذ قيمتين هما $\pm\frac{\hbar}{2}$ $(-\frac{1}{2}$، $+\frac{1}{2})$ ومعامل لاندي للإلكترون $g = 2$ وللعزم المغنطيسي المقابل لهذا العزم مسقطان أيضاً على هذا المحور هما، الشكل.8

$$M_+ = 2 \times \frac{-e}{2m_e} \times \frac{-\hbar}{2} = \frac{|e|\hbar}{2m_e} \quad \text{و} \quad M_- = 2 \times \frac{-e}{2m_e}\frac{\hbar}{2} = \frac{-e\hbar}{2m_e} \qquad (2.5)$$



الشكل.8

الأول في الاتجاه السالب، في اتجاه معاكس لاتجاه مسقط العزم الزاوي الموجب (e- سالبة) والثاني في الاتجاه الموجب. يسمى المقدار $\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m_e}$ ماغنتون بور.

إن سبين البروتون هو $\frac{1}{2}$ كذلك ومعامل لاندي للبروتون هو $2 \times 2{,}793$ والمسقط

$$M_\pm = 2 \times 2{,}793\frac{|e|}{2m_p} \times \pm\frac{\hbar}{2}$$

$$= \pm 2{,}793\mu'_B$$

حيث $\frac{|e|}{2m_p}$ هو ماغنتون بور النووي m_p كتلة البروتون و $\frac{\mu_B}{\mu'_B} = 1835$، نسبة الكتلتين $\frac{m_p}{m_e}$.

لنلاحظ أن للنوترون عزماً مغنطيسياً رغم أن شحنته تساوي الصفر (ولكنه مؤلف من ثلاثة كواركات مشحونة) سبينه $\frac{1}{2}$ ومعامل لاندي للنوترون سالب $g = 2 \times (-1,913)$.

2.2- المغنطيسية المسايرة Paramgnetism

يرمز عادة للعزم الزاوي المداري بـ $\vec{L}$ وللعزم الزاوي الصميمي (السبين) بـ $\vec{S}$ والعزم الزاوي الكلي المقابل للعزم المغنطيسي بـ $\vec{J} = (\vec{L} + \vec{S})$. نقول عن المادة التي لذارتها أو جزيئاتها عزم مغنطيسي $\vec{M}$ (أي عزم زاو يولد تياراً) إنها مسايرة التمغنط لأن طاقتها بوجود الحقل المغنطيسي $\vec{B}$ هي

$$U = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -MB\cos\theta \qquad (2.6)$$

حيث θ الزاوية بين اتجاه الحقل واتجاه العزم المغنطيسي. تبلغ هذه الطاقة قيمتها الدنيا من أجل $\theta = 0$ أي عندما يتجه العزم المغنطيسي باتجاه الحقل في حالة الحقل الثابت، حيث لا تتوقف الطاقة إلا على تغيرات θ (ومنه كلمة مسايرة التمغنط). تنجذب المادة في حقل مغنطيسي متغير في اتجاه ارتفاع شدة الحقل، الاتجاه الموجب لغراديان الحقل. هذا هو حال الألمنيوم على سبيل المثال. لا تمتلك الذرات ذات العدد الزوجي للإلكترونات عزماً مغنطيسياً لأن مبدأ الاستبعاد لباولي يحظر على الفيوميونات الوجود في نفس الحالة الكمومية، وعليه فلا يوجد في طاقة معينة سوى إلكترونين عزم أحدهما $+\frac{\hbar}{2}$ وعزم آخر $-\frac{\hbar}{2}$ ويعدم هذا العزمان بعضهما. أما في حالة العدد الفردي للإلكترونات فإن الإلكترون الأخير (وهو بصورة عامة إلكترون التكافؤ) يزود الذرة بعزم سبيني وبعزم مغنطيسي. لنلاحظ بالمناسبة أن أغلب الجزيئات لا تمتلك عزماً مغنطيسياً لأن اتحاد الذرات يجري عبر إلكترونات التكافؤ وينعدم السبين. وبصورة عامة فإن الذرات التي لم تمتلأ فيها طبقات الإلكترونات الداخلية تمتلك عزماً مغنطيسياً وهي مسايرة التمغنط؛ هذا هو حال العناصر الانتقالية Transition elements في الجدول الدوري وحال عناصر التربة النادرة.

يمكن معالجة المغنطيسية المسايرة في إطار الفيزياء التقليدية – غير الكمومية – عندما تكون الطاقات عالية بالنسبة لـ $\hbar$، أي عندما تكون درجات الحرارة مرتفعة وتوزع بولتزمان مقبولاً. نعالج المسألة كما عالجنا في الفقرة السابقة الاستقطاب الكهربائي للذرات القطبية ونستبدل بعزم ثنائي القطب الكهربائي عزم ثنائي القطب المغنطيسي. نرمز لعزم الذرة المغنطيسي في (2.6) بـ M_0 ونكتب كما في (1.20) و(1.21)

$$n(\theta) = n_0 e^{-\frac{u}{kT}} = n_0 e^{\frac{M_0 B\cos\theta}{kT}} \cong n_0\left(1 + \frac{M_0 B\cos\theta}{kT}\right)$$

$$M = \int n(\theta) M_0 \cos\theta \, d\Omega \qquad (2.7)$$

$$M = \frac{N M_0^2 B}{3kT}$$

تعريف 5 :

نطلق اسم القابلية المغنطيسية على عامل التناسب بين M (مسقط العزم المغنطيسي على اتجاه الحقل B) و B ونكتب كما في (1.22) قانون كوري

$$\chi = \frac{NM_0^2}{3kT} \tag{2.8}$$

تعني هذه الكتابة أننا فرضنا أن للعزم المغنطيسي مسقطاً واحداً على اتجاه الحقل، ولنرمز له بـ Oz. إلا أن له في واقع الأمر $2J+1$ مسقطاً كما أشرنا. فـ M_0 هو إذاً القيمة الوسطية لهذه المساقط وهي حسب تعريف القيمة الوسطية

$$\langle M_0 \rangle = \frac{\sum_{J_z=-J}^{+J} g\mu J_z e^{\frac{g\mu J_z B}{kT}}}{\sum_{J_z=-J}^{+J} e^{\frac{g\mu J_z B}{kT}}} \tag{2.9}$$

حيث g معامل لاندي و μ ماغنتون الذرة.

لن نجري الحساب هنا إذ أننا سنعود إلى هذا الموضوع (V.1.§3.1) مكتفين بإعطائه من أجل درجات الحرارة المرتفعة. إنه

$$\langle M_0 \rangle = \frac{g^2\mu^2 J(J+1)}{3kT} B \tag{2.10}$$

ومنه قانون كوري

$$\chi = \frac{Ng^2\mu^2 J(J+1)}{3kT} \tag{2.11}$$

ملاحظة:

لم ننظر في دراستنا للكهرطيسية في الخلاء إلا إلى الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$، الكهربائي والمغنطيسي، ثم أدخلنا في دراسة الاستقطاب الكهربائي حقلاً آخر هو $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ سميناه التحريض الكهربائي، الهدف منه إقصاء الشحنات الناتجة عن الاستقطاب، '(1.12)، ولدينا في الخلاء $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$. نميز في حال المغنطيسية أيضاً بين الحقل $\vec{B}$ وحقل آخر $\vec{H}$ نسميه الحقل المغنطيسي تربطهما العلاقة $\vec{B} = \mu\vec{H}$ في داخل المادة و $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ في الخلاء. يقوم الحقل $\vec{B}$ في هاتين العلاقتين بدور التحريض الكهربائي $\vec{D}$ ولذا يسمى التحريض المغنطيسي، والحقل $\vec{H}$ بدور الحقل $\vec{E}$ ويسمى الحقل المغنطيسي. ثم إن μ_0 متناسبة مع $\frac{1}{\varepsilon_0}$، $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$، وتلعب هاتان الثابتتان نفس الدور بحيث يمكننا كتابة (2.7) بدليل H عوضاً عن B لتأخذ (2.8) صيغة مقابلة لـ (1.22) عندما نكتب $\mu_0 H$ عوضاً عن B في (2.7)

$$\chi = \frac{N\mu_0 M_0^2}{3kT} \tag{2.8'}$$

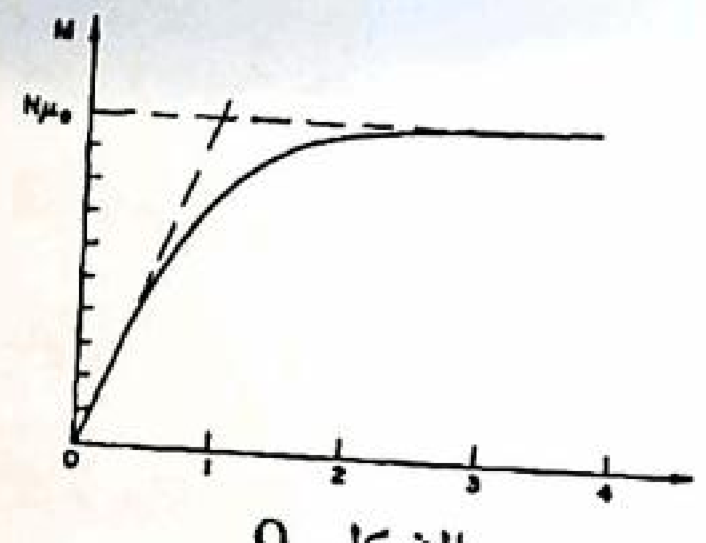
تأخذ القيمة الوسطية (2.9) شكلاً مبسطاً عندما يكون للذرة سبين يساوي $\frac{1}{2}$ ($g=2$)، الجمع في الصورة والمخرج على حدين فقط هما $M_{\pm}$، المقابلين في (2.5) على الترتيب لـ $\pm\frac{1}{2}$ ونرمز للقيمة المطلقة $M_{\pm}$ بـ μ_0، إنها ماغنتون بور الذري، والحدان المقابلان لـ $J_z = \mp\frac{1}{2}$ في الدالة الأسية هما $\mp\mu_0 B$ ومنه

$$\langle M_B \rangle = \frac{\mu_0\left(e^{\frac{\mu_0 B}{kT}} - e^{-\frac{\mu_0 B}{kT}}\right)}{e^{\frac{\mu_0 B}{kT}} + e^{-\frac{\mu_0 B}{kT}}} \qquad (2.12)$$

$$= \mu_0 \operatorname{th}\frac{\mu_0 B}{kT}$$

يأخذ التمغنط الوسطي للذرة (ولوحدة الحجم عند ضربه بـ N) الشكل التالي المألوف للمماس الزائدي المتناهي إلى 1 عندما يصبح الحقل كبيراً جداً، الشكل.9. يصل التمغنط إلى حد الإشباع، بمعنى اصطفاف كل العزوم (السبينات) في اتجاه واحد هو اتجاه الحقل. لنلاحظ أن الإشباع يحصل أيضاً في درجات الجرارة المنخفضة جداً حيث تتناهى الأنتروبية إلى الصفر و"تتجمد" السبينات في اتجاه واحد. أما في درجات الحرارة العادية حيث يمكن كتابة $\operatorname{th}x \simeq x$ فإن التمغنط هو

$$\frac{N\mu_0\mu_0 B}{kT} = \frac{N\mu_0^2 B}{kT} \qquad (2.13)$$



الشكل.9

لنقارن هذه العلاقة مع (2.7) حيث مربع عزم الذرة المغنطيسي M_0^2، لدينا حسب (2.4)

$$M_0^2 = \left(\frac{g\,q}{2m}\right)^2 \vec{J}\cdot\vec{J}$$

و $\vec{J}\cdot\vec{J} = J(J+1)\hbar^2$ [3] ويساوي من أجل $j=\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}\hbar^2$؛ وبعبارة أخرى فإن مربع عزم الذرة المغنطيسي بأخذ $g=2$ وهو

---

[3] إن القيمة الوسطية لـ $J^2 = \vec{J}\cdot\vec{J}$ هي ثلاثة أضعاف القيمة الوسطية للمسقط على محور ما (لا تمييز بين هذه المحاور $\langle J \rangle^2 = 3\langle J_z \rangle^2$) و

$$\langle J_z^2 \rangle = \frac{J^2 + (j-1)^2 + \ldots + (-j+1)^2 + (-j)^2}{2j+1}\hbar^2$$

$$= \frac{2\left(J^2 + (j-1)^2 + \ldots + 1^2 + 0^2\right)}{2j+1}\hbar^2$$

تحدد أعداد برنوللي قوى أي مجموع للأعداد الطبيعية المرفوعة إلى قوة ما، لنجد أن

$$\langle J_z^2 \rangle = \frac{1}{3} J(J+1)\hbar^2$$

$$M_0^2 = \left(\frac{g\,q}{2m}\hbar\right)^2 \frac{3}{4} = 4\mu_0^2 \frac{3}{4} = 3\mu_0^2$$

وتتطابق العلاقتان (2.7) و(2.13).

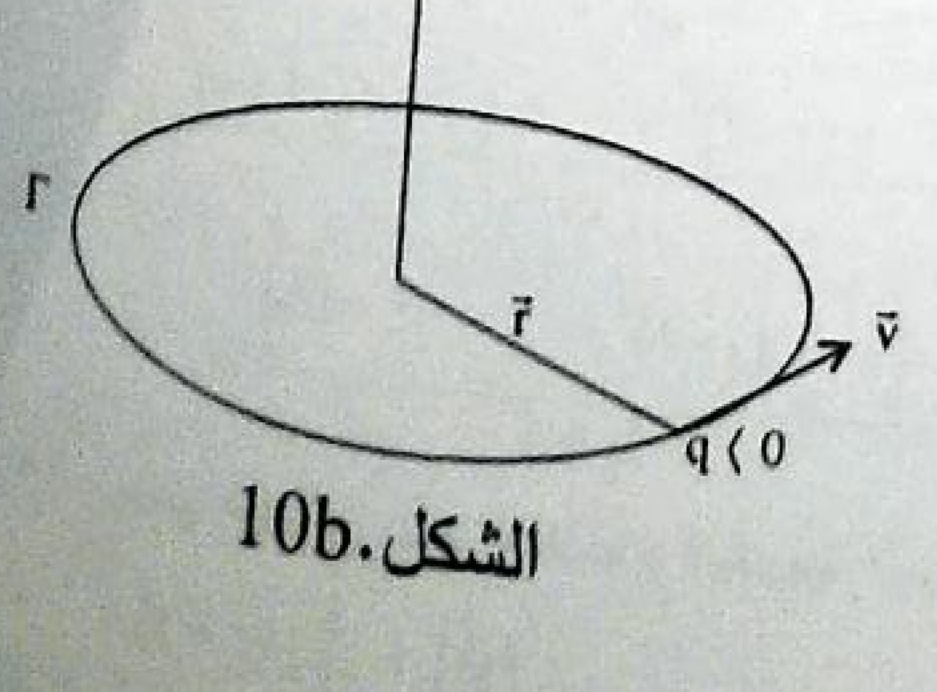
3.2- المغنطيسية المعاكسة Diamagnetism

تنبذ المادة معاكسة المغنطيسية في حقل مغنطيسي متغير عندما توضع في اتجاه ارتفاع شدة الحقل، في اتجاه تناقص غراديان الحقل على نقيض المادة مسايرة التمغنط. ولها بالتالي قابلية مغنطيسية χ سالبة. أو بعبارة أخرى، ينتج الحقل الكهرطيسي المتغير بالتحريض تياراً في ذرات المادة يعارض حسب قاعدة لنز ارتفاع شدة الحقل. منشأ هذا المفعول الضعيف حركة الإلكترون الخاضع لجذب النواة له وللحقل المغنطيسي المطبق؛ فهو مستقل إذاً عن وجود عزم مغنطيسي للذرة الذي قارناه بالاستقطاب الكهربائي للذرات القطبية. إنه شبيه بالاستقطاب الإلكتروني للذرات اللاقطبية ويظهر في كل الذرات سواء أكان لها عزم مغنطيسي فينقص من قابليتها أم لم يكن ويظهر المفعول النابذ وحده كما في حال البزموت، الشكل.10a.

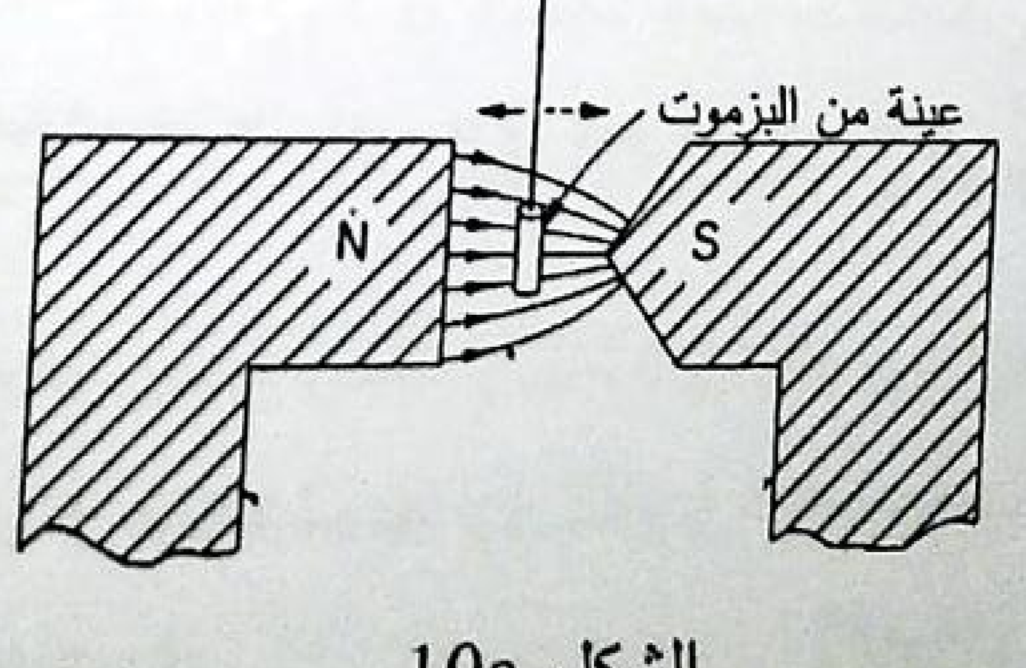
سنعالج مسألة المغنطيسية المعاكسة من وجهة نظر تقليدية تقبل بوجود مدارات للإلكترون في حركته حول النواة. مع أننا نعلم أن الميكانيك الكمومي يقوم على رفض هذا المفهوم. ليكن r نصف قطر الدائرة Γ التي يرسمها الإلكترون في حركته حول النواة ولنفرض أننا أدخلنا حقلاً مغنطيسياً متغيراً عمودياً على المدار، الشكل.10b. لدينا من معادلة ماكسويل $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ عندما نكتبها على شكل تكامل ونستعمل ستوكس

$$\int\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}B \cdot \pi r^2 = 2\pi r E$$



الشكل.10b



الشكل.10a

وشدة الحقل الكهربائي المحرض، المماس للمدار

$$E = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

عزم القوة المطبقة على الإلكترون في النقطة O ‎-eEr‎ ويساوي حسب قانون الحركة مشتق العزم الزاوي J بالنسبة للزمن أي أن

$$\frac{dJ}{dt} = -er \times \frac{-r}{2}\frac{dB}{dt} = \frac{er^2}{2}\frac{dB}{dt} \qquad (2.14)$$

لنفرض أن شدة الحقل B بدأت بالصفر في اللحظة t_0 لتصل إلى B في اللحظة t فأنتجت عزماً زاوياً إضافياً للإلكترون هو

$$J = \frac{er^2}{2}B$$

أي سرعة زاوية إضافية هي $\omega = \frac{eB}{2m}$، وعزماً مغنطيسياً إضافياً هو حسب (2.3)

$$M = -\frac{e^2r^2}{4m}B$$

هذا من أجل إلكترون واحد لذرة عددها الذري Z، ولدينا من أجل N ذرة في واحدة الحجوم

$$M = -\frac{NZe^2r^2}{4m}B \qquad (2.15)$$

و

$$\chi = -\frac{NZe^2r^2}{4m} < 0 \qquad (2.16)$$

إن المأخذ على هذا الحساب هو تناقضه مع المبدأ الأساسي لميكانيك الكم الرافض لمفهوم المسار. إن كل ما يستطيع ميكانيك الكم تحديده هو احتمال وجود الإلكترون في نقطة ما من جوار النواة ثم حساب القيمة الوسطية لأي مقدار ما. وهكذا فإن احتمالات أخذ إحداثيات الإلكترون لقيم x، y، z، متساوية واحتمال وجوده في مستوى معين يحدده وضعه بالنسبة للنواة هو $\frac{2}{3}$ احتمال أخذه القيمة r وبالتالي فلابد من أخذ ثلثي القيمة الوسطية لـ r^2 في حساب قابلية المغنطيسية المعاكسة لتصبح

$$\chi = -\frac{NZe^2\langle r^2\rangle}{6m} \qquad (2.17)$$

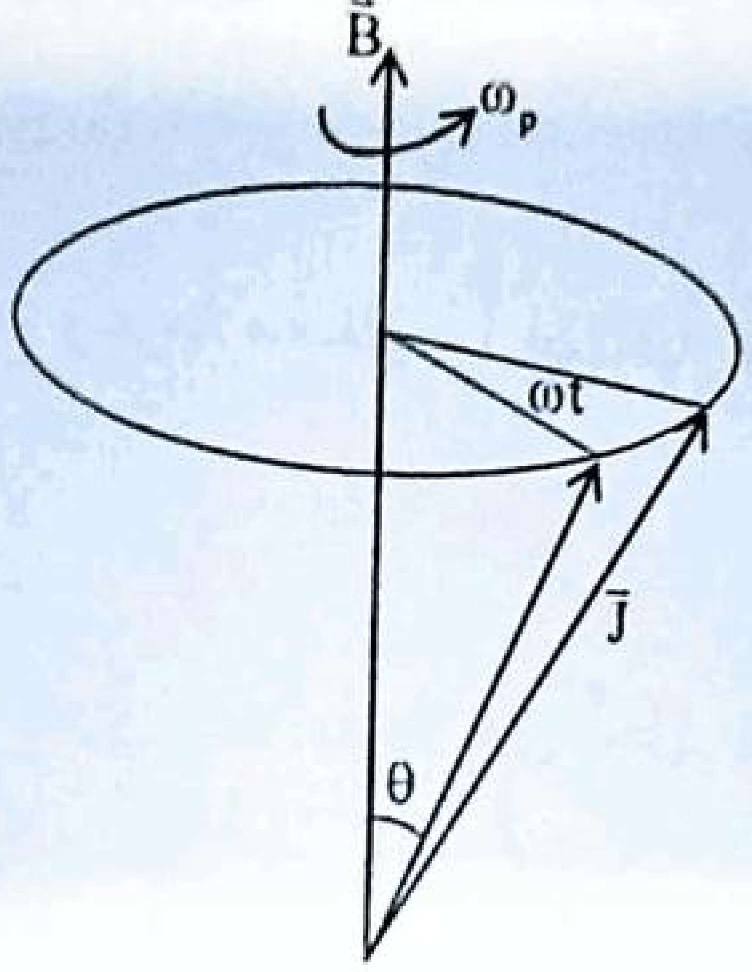
تتفق القيم المقيسة لـ χ مع هذا الحساب وهي $-1{,}5\cdot10^{-4}$ للبزموت و $-9\cdot10^{-6}$ للماء و $-7\cdot10^{-6}$ للكحول.

إن تغير السرعة الزاوية للإلكترون في مداره حول النواة بوجود حقل مغنطيسي عمودي عليه حالة خاصة من مبرهنة هامة في الفيزياء التقليدية اللانسبوية نعرضها فيما يلي:

4.2- مبرهنة لارمور Larmor

تخضع الذرة ذات العزم الزاوي $\vec{J}$ والعزم المغنطيسي الملازم له $\vec{M}$ عند وجود حقل مغنطيسي إلى عزم قوة هو $\vec{M} \times \vec{B}$ ((4.6).2). ليكن Oz اتجاه الحقل $\vec{B}$ و θ الزاوية التي يعملها $\vec{J}$ مع هذا الاتجاه، الشكل.11. إن معادلة الحركة هي

$$\left|\frac{d\vec{J}}{dt}\right| = \left|\left(\vec{M} \times \vec{B}\right)\right| = \left|\frac{gqBJ}{2m}\sin\theta\right|$$



الشكل.11

تطوف الذرة حول الحقل بسرعة زاوية ω_p (p من طواف precession)

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\omega}_p \times \vec{J}$$

$$\left|\frac{d\vec{J}}{dt}\right| = \omega_p J\sin\theta$$

ومنه سرعة الطواف الزاوية

$$\omega_p = \left(\frac{gq}{2m}\right)B \qquad (2.18)$$

هذه العلاقة صحيحة من أجل أي جسيم سواء كان أولياً، الإلكترون مثلاً أو مؤلفاً من عدة جسيمات، الذرة، النواة، الخ. والمهم هو معرفة معامل لاندي لهذا الجسيم أو ذاك. لدينا، على سبيل المثال، من أجل الإلكترون أو الذرة ومن أجل واحدة الحقل (غاوص)

$$\upsilon_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = g \cdot 1,4 \cdot 10^6 \text{ هرتز}$$

من أجل البروتون (النوترون)

$$= g \cdot 0,76 \cdot 10^3 \text{ هرتز}$$

لننظر الآن إلى حركة الإلكترونات في الذرة، يخضع الإلكترون إلى قوتين كهربائيتين هما جذب النواة له: $\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}$، والثانية تنابذه مع كل الإلكترونات الأخرى: $-\sum_{\substack{j\neq i \\ j=1}}^{Z-1} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2}$ حيث رمزنا بـ i للإلكترون الذي ندرس حركته و j للإلكترونات $Z-1$ الباقية. نرمز لمجموع هذه القوى بـ $\vec{F}(r_i)$. لنضع الذرة في حقل مغنطيسي $\vec{B}$، مضيفين إلى $\vec{F}(r)$ من أجل كل إلكترون $q\vec{V} \times \vec{B}$. حذفنا الدليل i وأعطينا الشكل العام q للشحنة. تنص مبرهنة لامور على ما يلي:

تكافؤ حركة الإلكترون في جملة محاور غاليلية بوجود الحقل المغنطيسي $\vec{B}$ حركته في جملة محاور تدور حول اتجاه الحقل بسرعة زاوية ω_L بدون وجود الحقل شريطة أن تكون السرعة الزاوية ω_L مساوية لسرعة الطواف ω_p. نريد إذاً أن نبرهن أن

$$m\vec{a}_r = \vec{F}$$

تكافؤ

$$m\vec{a} = \vec{F} + q\vec{V} \times \vec{B}$$

حيث $\vec{a}$ و $\vec{a}_r$ التسارع المطلق في الجملة الغاليلية والتسارع النسبي في الجملة الأخرى.

إن التسارع $\vec{a}$ يساوي (I.5§4)

$$\vec{a} = \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\right]$$

الحد الأول هو التسارع النسبي، الثاني تسارع كوريوليس والثالث تسارع الجر. نكتب السرعة $\vec{V}$ على الشكل $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e = \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$. ومعادلة الحركة

$$m\vec{a} = \vec{F} + q(\vec{V}_r + \vec{V}_e) \times \vec{B} = m\vec{a}_r + 2m\vec{\omega} \times \vec{V}_r + m\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\right] \quad (2.19)$$

نأخذ في (2.18) $g = 1$ ونكتب $\vec{\omega}_L$ على الشكل

$$\vec{\omega}_L = \frac{q}{2m}\vec{B} \quad (2.20)$$

فتحذف قوة كوريوليس عندئذ الحد $q\vec{V}_r \times \vec{B}$. نكتب كذلك (2.19) بعد ملاحظة أن $q(\vec{V}_e \times \vec{B}) = q(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B} = 2m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}$ على الشكل

$$\vec{F} + 2m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega} = m\vec{a}_r + m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

أو

$$\vec{F} = m\vec{a}_r + m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

وصغير نهمل معه حد القوة النابذة $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$ ثابت

تحقق مبرهنة لامور في حالة حقل مغنطيسي ثابت

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ المتناسب مع ω^2 ولا يبقى سوى

$\vec{F} = m\vec{a}_r$

من أجل كل الإلكترونات الخاضعة إلى قوة الجذب من النواة وقوة التنابذ مع الإلكترونات الأخرى وبالتالي فهي صحيحة من أجل كل الذرات مهما بلغ تعقدها. إلا أن المبرهنة تقليدية هذه المبرهنة صحيحة من أجل كل الذرات مهما بلغ تعقدها. إلا أن المبرهنة تقليدية بكل معنى الكلمة فهي لا تصح إلا من أجل $g = 1$ أي من أجل الحركات المدارية لا غير ولا تصح إلا من أجل قيمة سرعة طواف زاوية متناسبة مع عزم زاوي ثابت، وقد رأينا أن هذا العزم مكمم.

تجدر الإشارة هنا أن كل المغنطيسية، تلك التي تعرضنا لها والأخرى الحديدية التي سندرسها بعد قليل، لا تصح إلا في إطار الميكانيك الكمومي إذ لا وجود للسبين في الميكانيك التقليدي ولا وجود لعزم مغنطيسي لجسيمات حيادية كالنوترون؛ بل وأكثر من ذلك لا وجود للحقل المغنطيسي في توزع بولتزمان لأن الحقل المغنطيسي لا يعمل : $\left(\vec{V} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{r} = 0$ ولا محل لوجوده في الطاقة U المكونة من الطاقة الحركية والطاقة الكامنة التي تحدد الاحتمال : $e^{-\frac{u}{kT}}$. أو بعبارة أخرى لا وجود للمغنطيسية في المادة بدون العلاقة (2.4) التي تلحق بكل عزم زاوي عزماً مغنطيسياً متناسباً معه.

5.2– المغنطيسية الحديدية

تتميز بعض المعادن، الحديد والنيكل والكوبالت وخلائطها، بأمرين يجعلان تمغنطها مختلفاً تماماً عن كل المواد الأخرى ذات المغنطيسية المسايرة. الاختلاف الأول هو ظاهرة التمغنط العفوي : وجود حقل مغنطيسي داخل المادة حتى في حال انعدام الحقل المغنطيسي الخارجي، والاختلاف الثاني هو وجود درجة حرارة حرجة تختفي ظاهرة التمغنط كلياً عند بلوغها؛ فالمغنطيسية الحديدية هي عبور طور وهي ككل عبور الأطوار ظاهرة معقدة في الترموديناميك وفي ميكانيك الكم على السواء. ومع ذلك فسنحاول إيجاد صيغة مقبولة تفسر وتعين كمياً هاتين الميزتين والظواهر الأخرى الملازمة لهما، على أن نعود إلى هذا الموضوع في المجلد الخامس الذي سيلقي بعض الأضواء عليه ويشير إلى الأمور التي لم تجد لها حلاً بعد.

إن أول ما يخطر في البال هو معالجة هذا الاستقطاب المغنطيسي على نسق معالجتنا للاستقطاب الكهربائي. إن ما يفسر وجود مغنطيسية قوية في هذه المواد – قابلية مغنطيسية كبيرة – هو تأثير الحقل المغنطيسي الذي تحدثه الذرات المجاورة على ذرة ما، إضافة إلى تأثير الحقل الخارجي وهو ما لم نفعله في المغنطيسية المسايرة ضعيفة القابلية المغنطيسية. ينتج الاستقطاب المغنطيسي، العزم المغنطيسي في

واحدة الحجوم $\vec{M}$ عن التيارات الكهربائية داخل المادة على غرار الاستقطاب الكهربائي $\vec{P}$ الناتج عن الشحنات فيها.

لنتصور سطحاً S داخل المادة تملأه تيارات صغيرة تجري كلها في ذات الاتجاه. إن تكامل هذه التيارات على كل السطح لا يبقي إلا على التيار المحيط ولدينا حسب مبرهنة ستوكس

$$\int \vec{I} \cdot d\vec{\ell} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{I}) d\vec{S}$$

حيث I على السطح هو شدة التيار على واحدة السطوح أي أنه العزم المغنطيسي على واحدة السطوح. لنفرض أن لدينا عوضاً عن السطح S شريحة سمكها Δ. نستبدل بشدة التيار I المقدار $\vec{J} \cdot \vec{dS}$ حيث $\vec{J}$ كثافة التيار داخل المادة وبـ $d\ell$ المقدار Δ. يتحول الطرفان إلى تكامل ثلاثي وشدة التيار هي العزم المغنطيسي في واحدة الحجوم $\vec{M}$، نفرض السمك Δ ثابتاً ونكتب

$$\int \vec{J} \cdot \vec{dS} \cdot \vec{\Delta} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{M}) \cdot \vec{dS} \cdot \vec{\Delta}$$

و

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{M} \qquad (2.21)$$

وكما فعلنا في حال الاستقطاب الكهربائي حيث نعبر عن القوانين الكهربائية بدليل الشحنات الكهربائية "الحقيقية"، ونتخلص من شحنات الاستقطاب، فإننا نعبر عن القوانين المغنطيسية بدليل التيارات "الحقيقية" وحدها ونتخلص من تيارات الاستقطاب المغنطيسي:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_0 + \vec{\nabla} \times \vec{M}) + \frac{1}{C^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (2.22)$$

حيث $\vec{J}_0$ التيارات الحقيقية، الإلكترونات الحرة السائرة في اتجاه الحقل الكهربائي داخل المادة، أو أي تيار آخر خارجها.

<u>**تعريف 6 :**</u>

نُعرف الحقل $\vec{H}$ بالعلاقة

$$\vec{H} = \vec{B} - \mu_0 \vec{M} \qquad (2.23)$$

أو

$$\vec{B} = \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu H \qquad (2.23)'$$

تذكر هذه العلاقة بـ

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

يتقابل الاستقطاب الكهربائي والاستقطاب المغنطيسي في هذه العلاقة كما يتقابل $\vec{D}$، التحريض الكهربائي، مع $\vec{B}$ التحريض المغنطيسي ويطلق على $\vec{H}$ في هذا التقابل اسم الحقل المغطيسي لتقابله مع $\vec{E}$. هذا التقابل صوري فالحقلان الفعليان هما $\vec{E}$ و $\vec{B}$ الموجودان في معادلات ماكسويل، ولذا سمينا $\vec{B}$ الحقل المغنطيسي ولم نذكر $\vec{H}$ ولم نعطه اسماً.

لدينا من العلاقتين السابقتين (2.22) و(2.23)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \mu_0 \vec{J}_0 + \frac{1}{C^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (2.23)''$$

حيث تدخل في المعادلة التيارات "الحقيقية" لا غير. تماثل هذه العلاقة العلاقة '(1.12)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_0$$

فـ $\vec{H}$ من وجهة النظر هذه أقرب إلى $\vec{D}$ منه إلى $\vec{E}$! إن ما تهدف إليه هذه المقارنة الصورية هو معرفة تأثير تيارات الذرات المجاورة على ذرة ما، أي ما يحدث داخل تجويف كروي. وجدنا أن الحقل الكهربائي الناتج عن الاستقطاب هو '(1.23)

$$\vec{E}_0 = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

يقابله الحقل المغنطيسي $\vec{H}_0$ داخل التجويف

$$\vec{H}_0 = \vec{H} + \frac{\mu_0 \vec{M}}{3}$$

حيث $\vec{H}$ هو الحقل داخل المادة، تقوم μ_0 بدور $\frac{1}{\varepsilon_0}$ كما أشرنا. نرى من (2.23) أن $\vec{H} = \vec{B}$ في الخلاء وبالتالي أن الحقل $\vec{B}$ في التجويف

$$\vec{B}_0 = \vec{H}_0 = \vec{H} + \frac{\mu_0 \vec{M}}{3} = \vec{B} - \mu_0 \vec{M} + \frac{\mu_0 \vec{M}}{3} \qquad (2.24)$$

حيث عدنا إلى (2.23) في المساواة الأخيرة ومنه

$$\vec{B}_0 = \vec{B} - \frac{2\mu_0 \vec{M}}{3}$$

لنلاحظ أن التماثل الصوري بين الكهرباء والمغنطيسية يمتد إلى تصور ثنائي القطب المغنطيسي مماثلاً لثنائي القطب الكهربائي وكتابة كثافة "الكتلة المغنطيسية" m مثل كثافة شحنة الاستقطاب ρ_{pol}

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = -m \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_{pol}$$

مع الإشارة إلى أن بعض نظريات القرن الماضي تجاوزت التماثل الصوري إلى التنبؤ بوجود الكتل المغنطيسية – وحيد القطب المغنطيسي Monopole –؛ هذا ما فعله ديراك في 1930 وتخلى عن الفكرة بعد نصف قرن من هذا التاريخ إذ ثبت بطلان كل التجارب التي أجريت وادعت اكتشاف وحيد القطب في درجات الحرارة القريبة من الصفر المطلق. لكن هذا لا يمنعنا من الاستعانة بهذا التماثل والنظر إلى المغنطيسية الحديدية كمغنطيسية مسايرة ناتجة عن تفاعل سبينات الذرات فيما بينها وأخذ تأثير مجموعة السبينات على ذرة ما بعين الاعتبار : أي وضع B_0 المعطى في (2.24) محل B المعطى في (2.12).

سنكتب عوضاً عن μ_0 في (2.24) $\frac{1}{\varepsilon_0 C^2}$ حتى لا يقع الالتباس مع الماغنتون μ_0 ونستبدل بالمعامل $\frac{1}{3}$ معاملاً آخر λ يمكن تعديله لملائمة النتائج التجريبية. وهكذا نضع من أجل تمغنط واحدة الحجوم

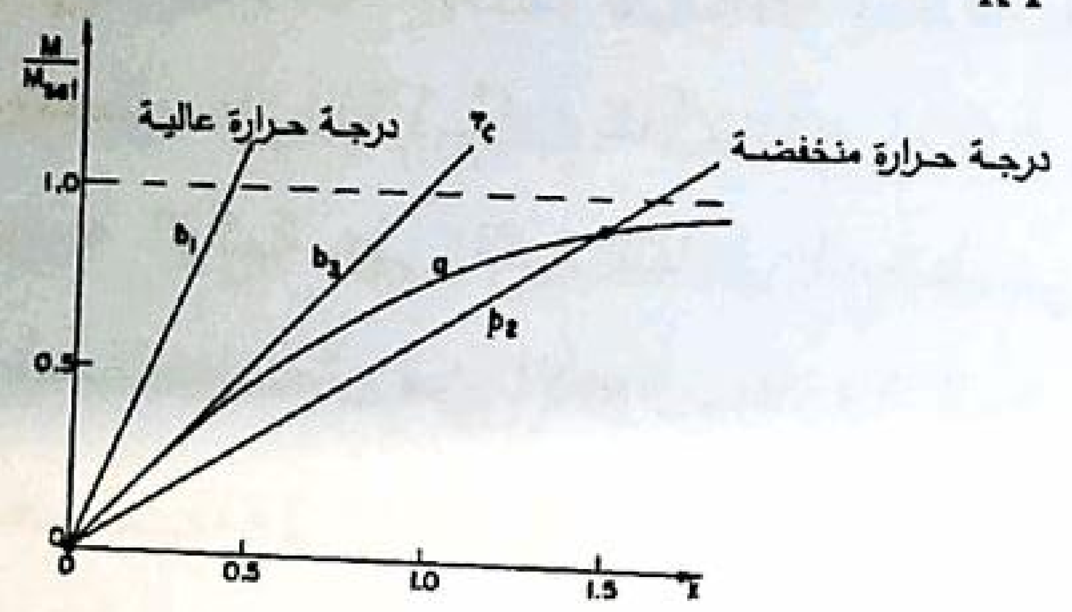
$$M = N\mu_0 th\left(\mu_0 \frac{H + \lambda M/\varepsilon_0 C^2}{kT}\right) \qquad (2.25)$$

إن $M_{st} = N\mu_0$ هو تمغنط الإشباع، أعلى قيمة يأخذها M عندما تتجه سبينات الذرات كلها في اتجاه واحد. يأخذ المماس الزائدي thx حيث

$$x = \mu_0 \frac{H + \lambda M/\varepsilon_0 C^2}{kT} \qquad (2.26)$$

الشكل التالي، الشكل.12، ونكتب معادلة المستقيم x بدليل $\frac{M}{M_{st}}$ كما يلي

$$x = \frac{\mu_0 H}{kT} + \frac{\mu_0 \lambda M_{st}}{\varepsilon_0 C^2 kT}\frac{M}{M_{st}} \qquad (2.27)$$



الشكل.12

ميل هذا المستقيم $tg\theta = \frac{\varepsilon_0 C^2 kT}{\mu_0 \lambda M_{st}}$ وتتعين قيمة M في (2.25) بنقطة تقاطع المستقيم مع المنحني thx . فالحل حل مبياني. يرتفع ميل المستقيم بارتفاع درجة الحرارة ولدينا في حالة انعدام الحقل المطبق $H = 0$ المستقيمات الثلاثة : b_1 في درجات الحرارة المنخفضة، b_3 في درجات الحرارة العالية التي ينعدم فيها التمغنط و b_2 المماس للمنحني الذي يحدد درجة الحرارة الحرجة، بدأ انعدام التمغنط مع ارتفاع درجة الحرارة : $tg\theta_c = 1$ وعبور الطور من حالة المغنطيسية الحديدية إلى المغنطيسية المسايرة

$$1 = \frac{\varepsilon_0 C^2 kT_c}{\mu_0 \lambda M_{st}} \qquad (2.28)$$

وهي درجة حرارة كوري الحرجة.

أما في درجات الحرارة المنخفضة جداً فيتناهى $tg\theta$ إلى الصفر ونقطة التقاطع مع المنحني α إلى اللانهاية حيث $x = \frac{M}{M_{st}} = 1$ وهو أمر طبيعي كما نعلم من الترموديناميك : تنخفض الأنتروبية مع انخفاض درجة الحرارة وتنتقل من العشوائية إلى الترتيب، من اتجاه السبينات في مختلف الاتجاهات إلى إصطفافها في اتجاه واحد : إلى "تجمدها" في هذا الاتجاه.

لنكتب x بدليل درجة الحرارة الحرجة المعطاة بـ (2.28) : $\mu_0 \lambda M_{st} = \varepsilon_0 C^2 k T_c$

$$x = \frac{\mu_0 H}{kT} + \frac{T_c}{T}\frac{M}{M_{st}} \quad (2.29)$$

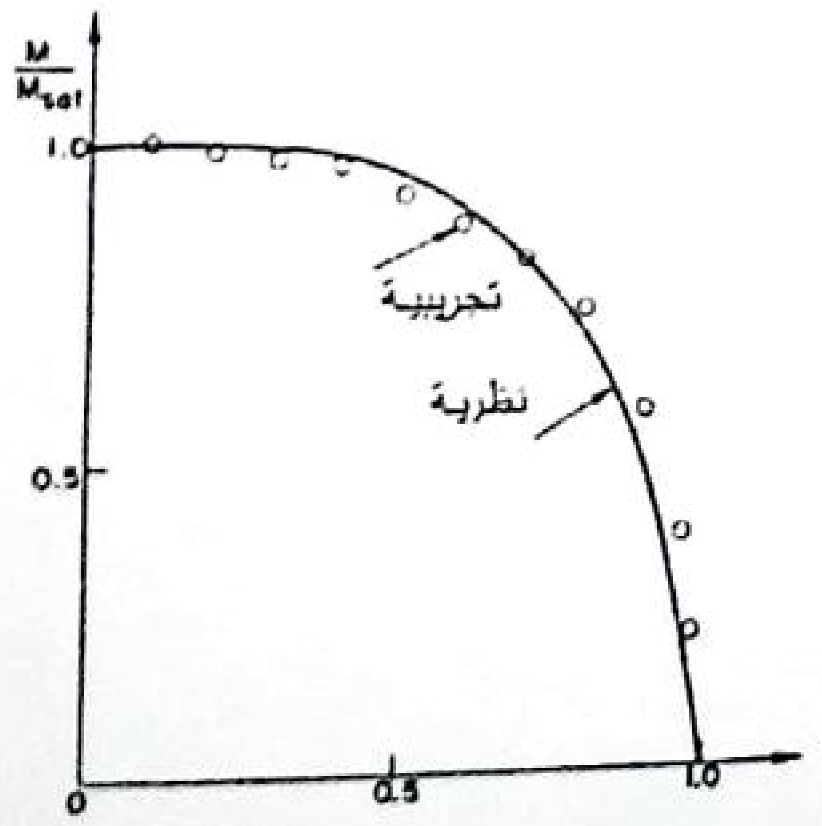
من أجل الحقول المغنطيسية الصغيرة ودرجات الحرارة العالية إلى x، أي إلى مماس المنحني في النقطة $x = 0$، $\frac{M}{M_{st}}$ يتناهى thx

$$\frac{M}{M_{st}} = \frac{\mu_0 H}{kT} + \frac{T_c}{T}\frac{M}{M_{st}}$$

ومنه

$$\frac{M}{M_{st}} = \frac{\mu_0 H}{k(T - T_c)} \quad (2.30)$$

لا تختلف هذه العلاقة عن مثيلتها (2.13) في المغنطيسية المسايرة إلا بوضع الحقل H عوضاً عن B واستبدال T بـ $T - T_c$؛ تعبر T_c عن وجود التفاعل بين الذرة والذرات المجاورة، ويكفي وضع $\lambda = 0$ (إهمال التفاعل) لتختفي T_c ونحصل على (2.13) : تقابل $\lambda = 0$ $T_c = 0$ في (2.28). إن الفرق بين النتائج التي تتنبأ بها هذه الدراسة القائمة على فكرة التفاعل المغنطيسي بين سبينات الذرات والنتائج التجريبية فرق هائل لا يمكن إصلاحه بحال من الأحوال. فدرجة الحرارة الحرجة المقيسة للنيكل هي 631°K في حين يعطيها الحساب في (2.28) القيمة 0,24°K من أجل $\lambda = \frac{1}{3}$؛ إنها أصغر بـ 2600 مرة من قيمتها التجريبية ! ومع ذلك فإن الحل المبياني لـ $\frac{M}{M_{st}}$ بدليل $\frac{T}{T_c}$ تقاطع المنحني مع المستقيم (2.29) الممثل بـ b_1 وصولاً إلى b_2 يتفق بشكل جيد مع النتائج التجريبية كما يبين، الشكل.13، من أجل النيكل.



الشكل.13

6.2– منشأ المغنطيسية الحديدية

يجب علينا الآن، بعد أن أسقطت التجربة النتائج التي وصلنا إليها، البحث عن آلية أخرى لا تعتمد على التفاعل المغنطيسي المباشر بين الذرات لتفسير المغنطيسية الحديدية المتصفة بالتمغنط العفوي وبوجود درجة حرارة حرجة تزول فيها المغنطيسية. وبما أن التمغنط العفوي يعني إصطفاف السبينات في اتجاه واحد، فمن اللازم معرفة آلية هذا الاصطفاف. ينطلق تفسير المغنطيسية من مبدأ الاستبعاد لباولي القائل باستحالة وجود إلكترونين (فيرميونين) في نفس الحالة الكمومية المحددة بالقيم التي تأخذها المقادير الفيزيائية : الوضع، العزم الزاوي، الطاقة، الخ. يستحيل إذاً على إلكترونين الوجود في نفس المكان وبنفس قيمة السبين (العزم الزاوي الصميمي)، فإذا كان مسقط سبين أحدهما على محور ما نحو الأعلى، $+\frac{\hbar}{2}$، فإن مسقط سبين الآخر هو حتما نحو الأسفل. لنتصور إذاً إلكترونين داخل الذرة، أو تابعين لذرتين متجاورتين، بعيدين عن بعضهما وإلكتروناً ثالثاً – إلكترون تعادل – يتحرك حول النواة ويقترب في حركته من كلا الإلكترونين فيضع سبينهما في اتجاه معاكس لسبينه أي في اتجاه واحد. وهذا ما يحدث تحديداً في المعادن ذات المغنطيسية الحديدية. يغير إلكترون إحدى الطبقات الإلكترونية العميقة، القريبة من النواة سبين الإلكترون الحر (إلكترون النقل الكهربائي) الذي يمر قريباً منه فيقلبه إن اقتضى الأمر ويقلب الإلكترون الحر بدوره سبين إلكترون آخر من الطبقات العميقة. فإلكترونات الطبقات العميقة هي إذاً الإلكترونات المسببة للتمغنط العفوي وللقيم الكبيرة التي تصل إليها القابلية المغنطيسية لهذه المعادن عندما تخضع لحقل مغنطيسي خارجي. إن معرفة الآلية لا يعني بالضرورة حسابها والتنبؤ بها. فكل ما يمكن فعله حتى الآن هو إجراء الحسابات على سبينات موزعة توزعاً منتظماً في المستوي، وكل ما يمكن استخلاصه من مبدأ الاستبعاد هو أن طاقة الإلكترونين بسبينين متوازيين أكبر بكثير من طاقتهما عندما يكونان في اتجاهين متعاكسين؛ تتطور النظمة أياً كانت – النظمة مؤلفة من إلكترونين هنا – بحيث تصل طاقتها إلى حد أدنى – هذا هو حال الإلكترونين عندما يوجدان في نفس المكان ويخضعان لمبدأ الاستبعاد. توجد إذاً طاقة تفاعل كبيرة بين السبينات المتوازية لإلكترونات الطبقات العميقة في المواد الحديدية ناتجة عن المفعول المزدوج (القلب مرتين) للإلكترون الحر، منشؤها في غالبه كهربائي راكد وهي المسؤولة عن المغنطيسية الحديدية، تسمى طاقة الاستبدال Exchange.

حاكينا في معالجة المغنطيسية الاستقطاب الكهربائي فأخذنا بعين الاعتبار الحقل الناتج عن الذرات المجاورة $\frac{\lambda \bar{M}}{\varepsilon_0 C^2}$، حاكينا المغنطيسية المسايرة التي تأخذ بعين الاعتبار اتجاهين متعاكسين للسبين (2.12) التي أوصلتنا إلى (2.25) في المغنطيسية الحديدية. يسمح المماس الزائدي في الصيغتين حساب القيم الوسطية للمقادير الفيزيائية. يجب عند حساب الطاقة الوسطية لذرة ما الانتباه إلى عدم الجمع على

عن تفاعل M أو بعبارة أخرى تعبر ، $\frac{\lambda \bar{M}}{\varepsilon_0 C^2}$ كل الذرات وإنما على أزواج الذرات أي أخذ نصف المقدار

إلكترون الذرة j الموجودة في نقطة ما من المعدن مع كل إلكترونات الذرات i المحيطة بها، ويتحول الجمع من $\sum_{i,j}$ إلى $\frac{1}{2}\sum_{i,j} = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}$. وهكذا فإن القيمة الوسطية لطاقة الاستبدال في كل ذرة عزمها المغنطيسي μ هي

$$\langle u \rangle = -\mu\left(H + \frac{\lambda M}{2\varepsilon_0 C^2}\right)\text{th}x \qquad (2.31)$$

وطاقة واحدة الحجوم

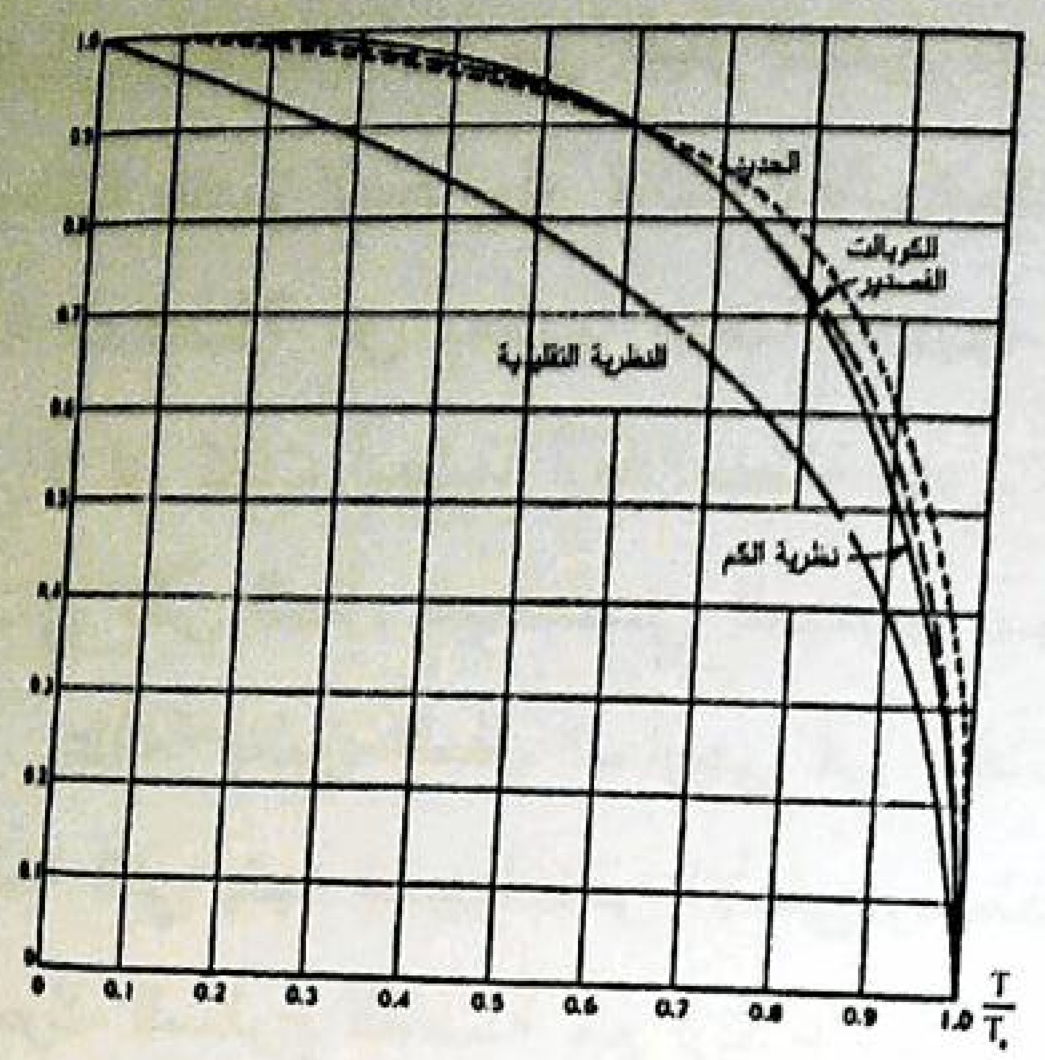
$$\langle U \rangle = -N\mu\left(H + \frac{\lambda M}{2\varepsilon_0 C^2}\right)\text{th}x$$

حيث $x = \mu\left(\frac{H + \frac{\lambda M}{\varepsilon_0 C^2}}{kT}\right)$ و $-\mu\left(H + \frac{\lambda M}{2\varepsilon_0 C^2}\right)$ طاقة السبين ذي المسقط $+\frac{\hbar}{2}$ نحو الأعلى، في اتجاه الحقل كما في (2.26).

ولدينا كما في (2.29) عندما ينعدم الحقل H

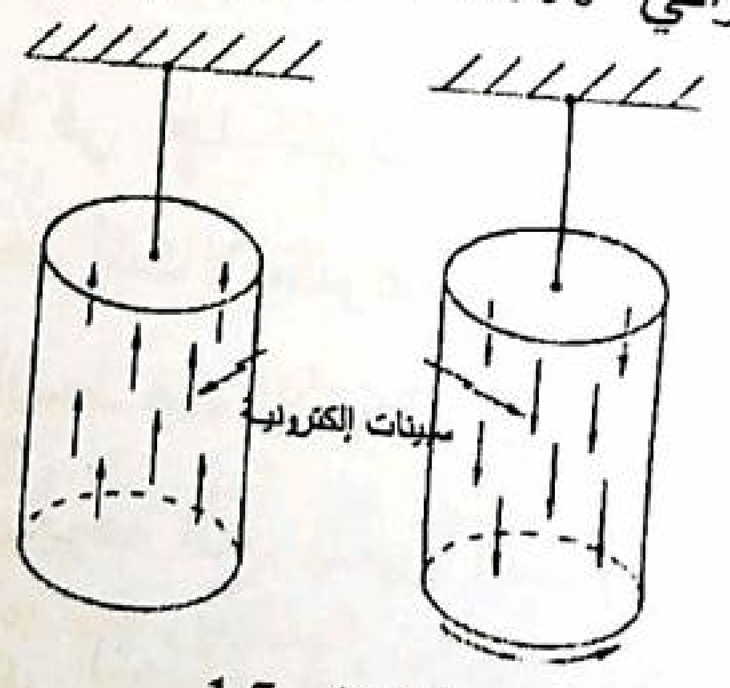
$$\frac{M}{M_{st}} = \text{th}\left(\frac{T_c}{T}\frac{M}{M_{st}}\right) \qquad (2.32)$$

يبين، الشكل.14، القيمة النظرية لهذه النسبة (2.32) المعتمدة على حساب M كتفاعل سبينات متوازية والقيم التجريبية للمعادن حديدية المغنطيسية وهي قيم تتفق مع القيمة النظرية ولكنها بعيدة عن القيم المحسوبة حسب (2.25) حيث تأخذ السبينات كل الاتجاهات الممكنة (النظرية التقليدية). تختلف القيم التجريبية عن القيم المحسوبة في درجات الحرارة المرتفعة T القريبة من درجة الحرارة الحرجة T_c، والمنخفضة. يعود السبب إلى ابتعاد التمغنط M عن قيمته الوسطية في هذين المجالين: عندما تنخفض درجة الحرارة وتنخفض معها الأنتروبية، تنتقل النظمة الترموديناميكية من الفوضى إلى الترتيب، تتجه أغلبية السبينات إلى التوازي لتصبح كلها في هذه الحالة في الصفر المطلق، ليصبح الاحتمال مساوياً للواحد بعيداً عن قيمته الوسطية؛ وعلى العكس تبلغ العشوائية أقصاها عند ارتفاع درجة الحرارة ($1000°K$ في جوار النقطة الحرجة) وتقترب القيمة الوسطية من الصفر لأن كل الاتجاهات أصبحت محتملة. ولم يستطع أحد حتى الآن تقييم الابتعاد عن القيم الوسطية كمياً.



الشكل.14

يمكن القيام بتجربة تؤيد منشأ المغنطيسية الحديدية من توازي السبينات، أجريت هذه التجربة وأعطت نتائج قريبة من النتائج المتوخاة رغم دقة وصعوبة تنفيذها: يعلق قضيب ممغنط أسطواني الشكل إلى نقطة ثابتة بواسطة خيط فتل رفيع، سبيناته متوازية كلها تقريباً، ثم يحاط بملف الهدف منه إحداث حقل مغنطيسي يعاكس حقل القضيب الممغنط، الشكل.15. لا يمس الملف القضيب الذي سيدور حول محوره عند إطلاق التيار المنتج لحقل الملف المغنطيسي. إن انقلاب اتجاه السبينات إلى الاتجاه المعاكس غير العزم الزاوي لكل سبين بالمقدار $\hbar$ (من $-\frac{1}{2}$ إلى $+\frac{1}{2}$)، $N\hbar$ في واحدة الحجوم وبما أن العزم الزاوي الكلي للقضيب منحفظ فإن دورانه هو لتعويض هذا التغير في العزم الزاوي الداخلي. إن معرفة فتل القضيب (تغير العزم الزاوي) وكثافة مادة القضيب N يعطي قيمة تجريبية للعزم المغنطيسي μ أعطت التجربة القيمة $\mu = 21500$غاوص وهي في الواقع حوالي 20000 غاوص أي بخطأ نسبي أقل من 10%.

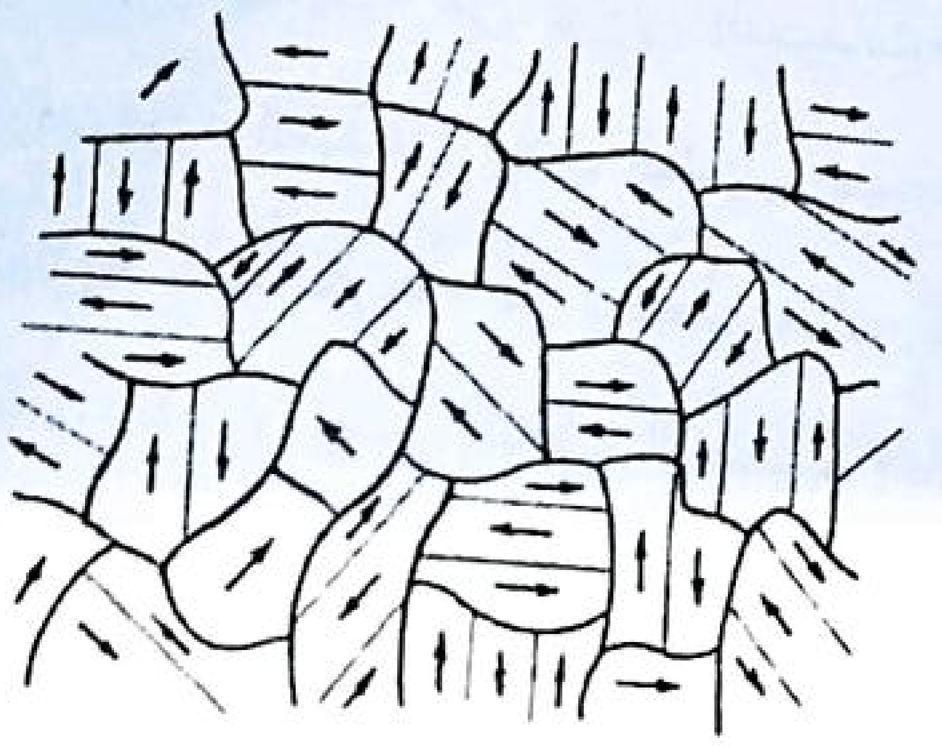


الشكل.15

7.2– مناطق فيس Weiss ومنحني البطاء Hysterisis

إن معامل الاقتران بين السبينين المتوازيين، وهو المقدار الذي يحدد شدة التفاعل بينهما، ليس ثابتاً ويتناقص بسرعة كبيرة عندما تبتعد الإلكترونات المنتمية إلى ذرات مختلفة عن بعضها، مما يجعل التفاعل مقتصراً من أجل سبين إلكتروني ينتمي إلى ذرة ما على عدد محدود من الذرات المجاورة، على منطقة

تكون فيها Domain من المتر تسمى منطقة فيس 10^{-5} محدودة من حجم المعدن لا تتجاوز أبعادها إلى عدد كبير من السبينات متوازية، الشكل.16. وهكذا ينقسم الحجم ولو كانت أبعاده بحدود السنتمتر المناطق ذات السبينات المتوازية المنفصلة عن بعضها بعضاً والنتيجة الأولى لهذا الأمر هو انعدام التمغنط العفوي للعينة المدروسة إلا إذا كانت أبعادها أبعاد منطقة فيس. والنتيجة الثانية هي أن للسطح الفاصل بين منطقتين طاقة يقتضي على الحقل المغنطيسي الممغنِط، سواء كان خارجياً أو ناتجاً عن المناطق المجاورة، التغلب عليها. عندما يطبق الحقل الخارجي في اتجاه ما، نحو الأعلى مثلاً، فإنه سيدفع السطح الفاصل بين المنطقة التي يتجه سبينها نحو الأعلى ومنطقة مجاورة سبينها نحو الأسفل ليوسع المنطقة الأولى؛ وهكذا تتحرك السطوح الفاصلة مع ارتفاع شدة الحقل لتقضي شيئاً فشيئاً على المناطق ذات السبينات المخالفة وتصبح العينة البلورية كلها منطقة واحدة تتجه سبيناتها في اتجاه واحد.



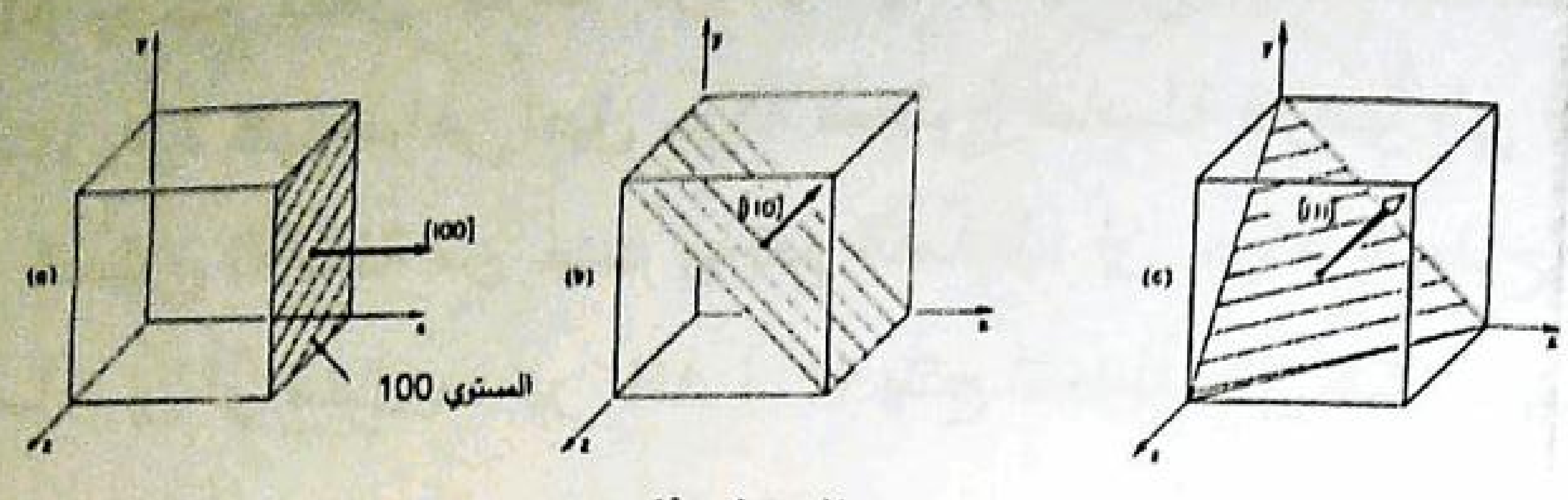
الشكل.16

أما كيف يجب أن يتجه الحقل الممغنط في البداية لكي تتمغنط البلورة ؟ هناك اتجاهات تسهل التمغنط: محور تناظر في الشبكة مثلاً يلزم لتعيينها معرفة التكوين البلوري للمادة وهذا ما سيدخلنا من جديد في فيزياء الجسم الصلب التي لا نعالجها في هذا الكتاب. قلنا باختصار إن للبلورات وجوه مستوية عديدة تتوضع فيها الذرات بشكل منتظم وتأخذ أشكالاً متنوعة في الفضاء، على شكل متعددة سطوح (متعددة الوجوه) تحدد نظرية الزمر تناظراتها. أبسط هذه الأشكال هو المكعب كما رأينا، قد تحتل الذرات رؤوسه، أو رؤوسه ومركزه، أو رؤوسه ومراكز وجوهه الخ. يتعين المستوي الحاوي على ثلاث ذرات بثلاثة أعداد صحيحة تحددها نقاط تقاطعه مع محاور الشبيكة، أما مدلات ميلر فتتناسب مع جيوب تمام الناظم على المستوي[4] وتعين اتجاه الناظم عليه. وعلى هذا النحو يشير المدل $[100]$ إلى العمودي على المستوي yz

---

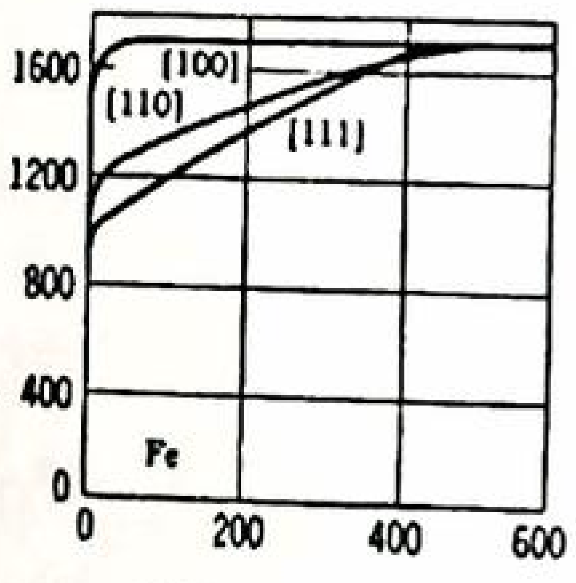
[4] لنذكر أن معادلة المستوي هي $\alpha x + \beta y + \gamma z = p$ حيث p طويلة الناظم $\overline{Op}$ و α، β، γ جيوب التمام للناظم $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. يتعين تقاطعه مع المحاور الثلاثة بـ $(a, 0, 0)$، $(0, b, 0)$ و $(0, 0, c)$، ومنه $a = \frac{p}{\alpha}$، $b = \frac{p}{\beta}$، $c = \frac{p}{\gamma}$ لتصبح معادلة المستقيم $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$، نكتبها بدليل المقلوبات $u = \frac{1}{a}$، $v = \frac{1}{b}$، $w = \frac{1}{c}$ على الشكل $ux + vy + wz = 1$ تتناسب هذه المقلوبات مع جيوب التمام للناظم.

و[110] إلى المتجهة التي تعمل زاوية 45° درجة مع كل من المحورين Ox و Oy و[111] متجهة قطر المكعب كما بينا في الشكل.6، الشكل.'6



الشكل.'6

يرتفع تمغنط بلورة الحديد ارتفاعاً شديداً من أجل الحقول الممغنطة الصغيرة بحيث يكاد لا يرى تغيرها. فإذا كان الحقل في الاتجاه [100] – اتجاه سهل التمغنط – فإن التمغنط يرتفع بسرعة ويصل إلى تمغنط الإشباع، [100] هو محور البلورة. أما تمغنط [110] المائل 45° عن محور البلورة فيرتفع مع توسع المناطق ولكنه يحتاج إلى حقل شديد للوصول إلى الإشباع. وهذا هو حال [111] يبين، الشكل.17، عندما نمدد منحني تمغنط هذين المستويين إلى البداية أن نسبة تمغنطهما إلى تمغنط المستوي [100] هي على الترتيب $\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\frac{1}{\sqrt{3}}$، نسبه ميل الناظمين على هذين المستويين بالنسبة إلى محور البلورة العمودي على [100] سهل التمغنط. هذا فيما يخص بلورة واحدة.



الشكل.17

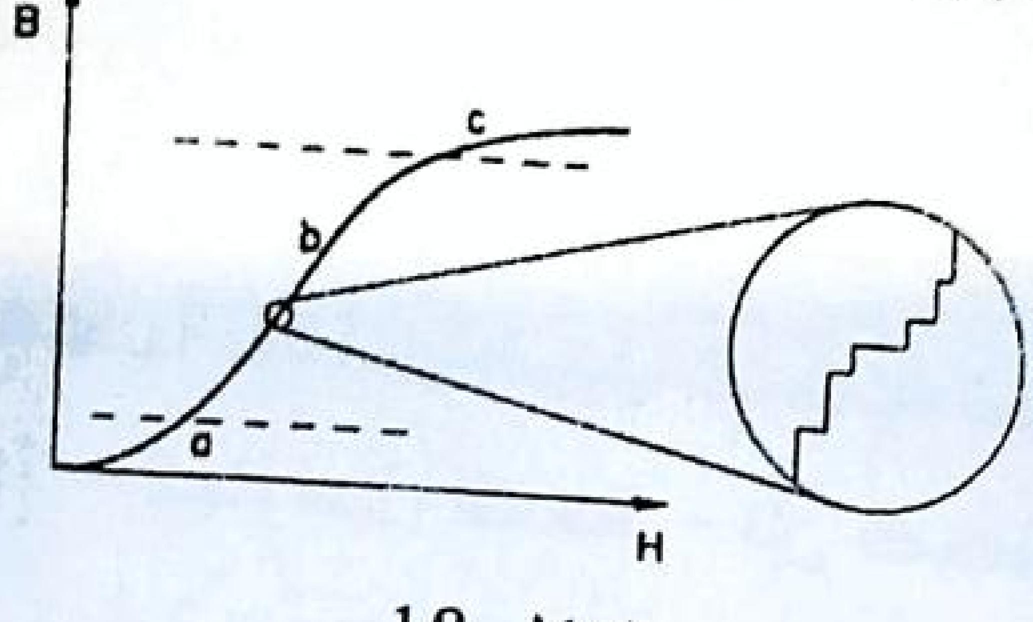
تتألف العينة البلورية لمادة حديدية من عدد كبير من البلورات وكل بلورة من عدد من البلورات البدائية (الشبيكات البلورية)، وفي كل بلورة بالتالي عدد من المناطق كما بينا في الشكل.16.

نستطيع الآن بعد أن ألقينا نظرة على ما يجري على الصعيد الذري شرح منحني التمغنط الأول، منحني تغيرات متجهة التحريض المغنطيسي $\vec{B}$ الناتجة عن تطبيق حقل H على مادة حديدية غير ممغنطة حسب (2.24)

$$\vec{B} = \vec{H} + \frac{\vec{M}}{\varepsilon_0 C^2} \qquad (2.24)'$$

يتغير B ببطء في بداية التمغنط، من أجل الحقول H الصغيرة ويعود إلى الصفر إذا قطعنا التيار المولد لـ H: تتوسع المناطق لتوجه سبينها في اتجاه الحقل ببطء ولكنها تعود إلى حالتها البدائية عند توقف H

الشكل.18، تتعقد الأمور عندما تزداد شدة a، يتمثل بقطعة المنحني فالتمغنط عكوس في هذا المجال، وهو ما يعرف باسم التضييق المغنطيسي H إذ يتغير شكل البلورة وتتطاول في اتجاه الحقل الحقل H، وهناك الشوائب Dislocation (التصدع) عن مواقعها Magnetostriction وتتخلع بعض الذرات فتوقفها إلى أن تزداد شدة الحقل والعيوب في الشبيكات، وهذه كلها ظواهر تعيق حركة السطوح الفاصلة من جديد ويرتفع التمغنط. إن حركة السطوح أبعد ما تكون عن H من جديد فتقفز السطوح الفاصلة ينتج تمغنطاً على شكل درجي مجهرياً. الحركة المتصلة الملساء. إن أي مجال صغير ΔH لـ H



الشكل.18

تعني إعاقة حركة السطوح ضياعاً للطاقة يظهر على شكل حرارة كالحرارة الناتجة عن الاحتكاك الذي يعيق الحركة ويعني كل تبديد للطاقة ارتفاع الأنتروبية والسيرورة بالتالي سيرورة لاعكوسة: لا يعود الحقل $\vec{B}$ المقابل لـ $H+\Delta H$ إلى قيمته $B(H)$ عند تحفيض الحقل H وهذا هو مفعول البطاء Hysterisis تعريفاً.

عندما تبلغ شدة الحقل H حداً كافياً لتحريك كل السطوح الفاصلة ومغنطة كل بلورة في الاتجاه المناسب فإن بعض البواقي البلورية تشذ عن الاتجاه في اتجاه الحقل وتحتاج إلى حقل إضافي لتغيير اتجاهها ولذا نجد أن التمغنط يتباطأ تباطأً شديداً في المرحلة الثالثة c إلى أن يصل إلى حد الإشباع.

نقيس الحقلين H و B بنفس الوحدات: فيبر/متر^2 المساوي 10^4 غاوص ونقيس التمغنط M حسب (2.21) بكثافة تيار مضروبة بطول أي بالأمبير/متر ونرى من "(2.23) عند غياب الحقل الكهربائي $\left(\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 C^2}\right)$

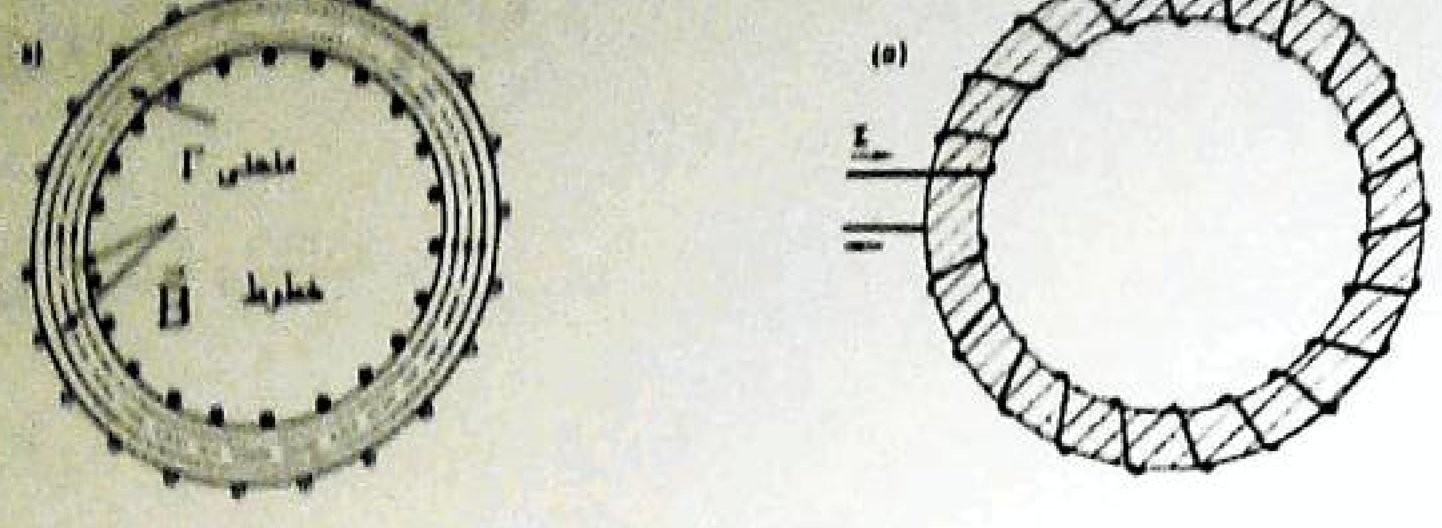
$$\int \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{\varepsilon_0 C^2} \int \vec{J} \cdot d\vec{S} \tag{2.33}$$

ومنه الحقل الناتج عن ملف على شكل طارة محيط إحدى دوائر مقطعها العرضاني ℓ، مؤلف من N لفة ويمر فيه تيار شدته I

$$H\ell = \frac{NI}{\varepsilon_0 C^2}$$

$$H = \frac{NI}{\varepsilon_0 C^2 \ell} \tag{2.34}$$

لنفرض أن الطارة مادة حديدية. إن خطوط الحقل المغنطيسي B هي دوائر الطارة والحقل معدوم تقريباً خارج الطارة، الشكل.19

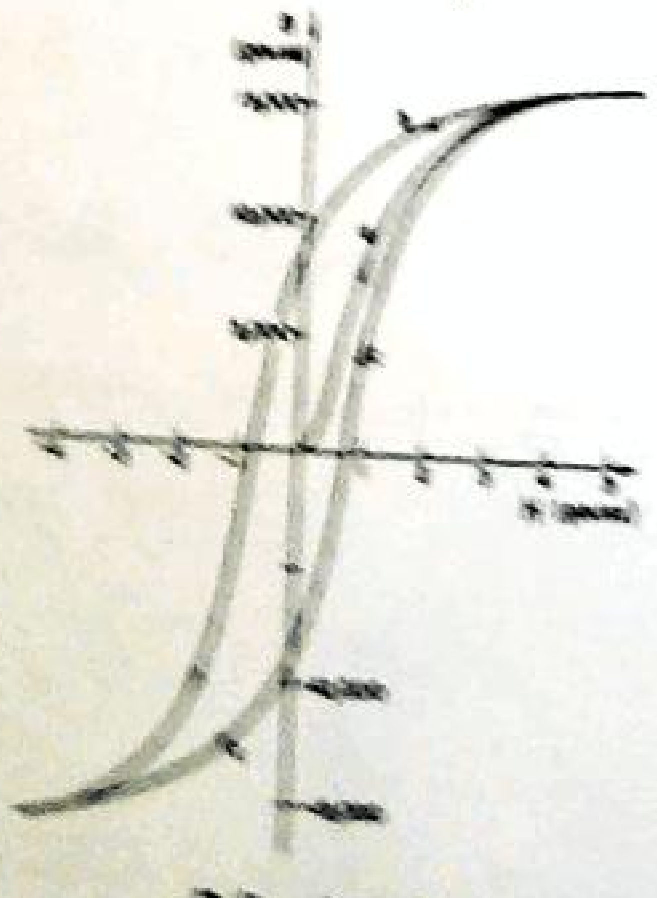


الشكل.19

لنفرض أن الملف غير ممغنط، أنه سخن إلى ما وراء النقطة الحرجة ثم برد بمعزل عن أي تأثير مغنطيسي قبل إغلاق الدارة التي يمر فيها التيار I؛ يطلق على H لهذا السبب الحقل الممغنط. نقيس B حسب معادلة ماكسويل الثانية

$$e = \int \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int B d\vec{S}$$

فتدفق الحقل هو جداء B بالمقطع العرضاني للطارة ويساوي للقوة المحركة الكهربائية e عبر اللفات خلال فترة زمنية معينة $\int edt$. أما H فنقيسه بالعلاقة (2.23) ولنرسم تجريبياً مخطط تغيرات B كتابع لـ H لنجد منحني التمغنط الأول a، الشكل.20، $B = H + \frac{M}{\varepsilon_0 C^2}$. يصل التمغنط M ومعه B حد الإشباع: لا تتغير قيمة B بتغير H إلا تغيراً ضئيلاً $\frac{\Delta B}{\Delta H} = 1$ و M ثابتـــة $= M_s$. إن تخفيض قيمة H بعد الوصول إلى الإشباع يخفض قيمة B ولكن B يبقى فوق منحني التمغنط الأول ويبقى الحديد ممغنطاً $B \neq 0$ عندما يصل الحقل الممغنط H إلى الصفر، المنحني b. ويجب تغيير اتجاهه، تغيير اتجاه التيار في اللفات لكي ينعدم الحقل المغنطيسي B ويغير اتجاهه إلى أن يقع الإشباع في الاتجاه المعاكس: يبقى الحقل المغنطيسي B سالباً عندما يصل الحقل H إلى الصفر ولا ينعدم إلا بعد تغير اتجاه H ليعود لإتمام دورة البطاء، المنحني c.



الشكل.20

3. معادلات ماكسويل في المادة

1.3- معادلات ماكسويل داخل المادة العازلة

لا تتغير معادلتا ماكسويل الثانية والثالثة

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{II}(3.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{III}(3.2)$$

و

لأن الأولى لا تتأثر بالاستقطاب والثانية تعبر عن عدم وجود الكتل المغنطيسية. رأينا أن الاستقطاب - متجهة الاستقطاب في واحدة الحجوم تنتج كثافة شحنة ρ_{pol} (1.5)

$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \qquad (3.3)$$

ونرى من جهة ثانية، من تعريف $\vec{P}$: $\vec{P} = Nq\vec{\delta}$، أن تغيره مع الزمن متناسب مع السرعة $\frac{d\vec{\delta}}{dt}$ ويكافئ تيار استقطاب نرمز له بـ J_{pol}:

$$\vec{J}_{pol} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \qquad (3.4)$$

تأخذ معادلة ماكسويل الرابعة الشكل التالي

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 C^2}\left(\vec{J}_0 + \vec{J}_\rho\right) + \frac{1}{C^2}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 C^2}\vec{J}_0 + \frac{1}{\varepsilon_0 C^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{P} + \varepsilon_0 E\right)\right] \qquad (3.5)$$

حيث تشير $\vec{J}_0$ إلى كثافة الشحنات الحرة.

كتبنا معادلة ماكسويل الأولى بوجود الاستقطاب بدليل كثافة الشحنات الحرة وحدها (الشحنات غير الناتجة عن الاستقطاب) ρ_0 على الشكل (1.12)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = \rho_0 \qquad \text{I}(3.6)$$

نكتب (3.5) بدليل هذه العلاقة على الشكل

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 C^2}\vec{J}_0 + \frac{1}{\varepsilon_0 C^2}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \text{IV}(3.5)'$$

يحل التحريض الكهربائي $\vec{D}$ محل الحقل الكهربائي $\vec{E}$ في معادلة ماكسويل الرابعة داخل المادة العازلةمبرراً إعطاء اسم التحريض المغنطيسي للحقل $\vec{B}$. استبدلنا في داخل المادة الحديدية $\vec{B}$ بـ H وكتبنا معادلة ماكسويل الرابعة على الشكل "(2.23)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{\varepsilon_0 C^2}\vec{J}_0 + \frac{1}{C^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (3.7)$$

إنها معادلة ماكسويل في الخلاء شريطة مقابلة الحقل الكهربائي بالحقل $\vec{H}$.

لنتذكر من جديد أن $\vec{D}$ و $\vec{H}$ وُضعا في القرن التاسع عشر لأن الفيزيائيين لم يكونوا على علم بالتيارات داخل المادة (2.21) وبالشحنات "الحقيقية" الناتجة عن الاستقطاب. لم تكن المفاهيم الذرية قد اتضحت بعد. كما وضعت العلاقتان

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \quad \text{و} \quad \vec{B} = \mu\vec{H} \qquad (3.8)$$

حيث $\varepsilon = \varepsilon_0$ في الخلاء وقد عبرنا في (1.14) عن السماحية في العازل بدليل سماحية الخلاء نظراً لتناسب الاستقطاب مع الحقل الكهربائي وهو أمر محقق تقريبياً في السوائل ولكنه لا يصح في الأجسام الصلبة إلا في حالة الشبيكات المكعبة كما رأينا. وكذلك $\mu = \mu_0$ في الخلاء، إنها نفوذية الخلاء. وهنا أيضاً لا تصح هذه العلاقة إلا إذا تناسب الحقل $\vec{H}$ مع التمغنط $\vec{M}$. يجب أيضاً ألا تتغير الحقول تغيراً سريعاً مع الزمن، إذ ستصبح السماحية ε والنفوذية μ دالتين عقديتين بالتواتر عندما يكون الحقلان جيبيين. كل هذا يبرر عودتنا إلى الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ داخل المادة وفي الخلاء وكتابة معادلة الموجه لهذين الحقلين داخل المادة.

لدينا المعادلات الأربعة التالية داخل العازل مع انعدام الشحنات غير الناتجة عن الاستقطاب.

لدينا من (3.3) و(3.6)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0} \qquad (I)'$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (II)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (III)$$

ومن '(3.5)

$$\varepsilon_0 C^2 \nabla \times B = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}\right) \qquad (IV)'$$

ومنه، من (II) و'(IV)

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \equiv \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0 C^2}\left(\frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\right)$$

ثم بأخذ '(I) بعين الاعتبار

$$\Box^2 \vec{E} \equiv \left(\frac{1}{C^2 \partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{P}\right) - \frac{1}{\varepsilon_0 C^2}\frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \qquad (3.9)$$

إنها معادلة موجة بطرف ثان لوجود شحنات وتيارات الاستقطاب.

وكذلك، من '(IV) و(III) ، بأخذ (II) بعين الاعتبار

$$\Box^2 \vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 C^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{P}\right) \qquad (3.10)$$

لنلاحظ أن علينا حل المعادلة بالحقل الكهربائي أولاً لأن $\vec{P}$ تابعة لـ $\vec{E}$، بل ومتناسبة معه عندما يكون الوسيط المادي متناحياً، ثم نحل المعادلة بالحقل المغنطيسي بعد حسابنا للحقل الكهربائي ومعرفتنا بالاستقطاب التابع له.

2.3- معامل الانكسار في العوازل

سنفرض أن العازل متناح والحقل الكهربائي موجة مستوية مستقطبة – لا يتغير اتجاهها العمودي على اتجاه الانتشار. ليكن Oz هذا الاتجاه و Ox اتجاه الموجة الثابت.

لنلاحظ أولاً أن دالامبرسي الموجة المستوية هو

$$\square^2\vec{E} = \left(-\frac{\omega^2}{C^2} + k^2\right)\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \qquad (3.11)$$

لمتجهة الموجة المستقطبة $\vec{k}$ مركبة واحدة $\vec{k} = (0, 0, k)$ ونكتب الموجة المستوية على الشكل $\vec{E} = E_x e^{i(\omega t - kz)}$، دالامبرسيها هو

$$\square^2 E = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{C^2}\right)E_x e^{i(\omega t - kz)} \qquad (3.11)'$$

إن $\vec{P}$ متناسب مع $\vec{E}$ في الوسط العازل المتناحي (العازل متجانس أو ذو بنية بلورية شبيكتها مكعبة) $\vec{P} = (P_x, 0, 0)$ $P_x \sim E_x e^{i\omega t}$ $\frac{\partial P_x}{\partial x} = 0$ وبالتالي $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$. تأخذ معادلة الموجة (3.9) الشكل المبسط التالي

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{C^2}\right)E_x = -\frac{1}{\varepsilon_0 C^2}\frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{\varepsilon_0 C^2}P_x \qquad (3.12)$$

لكن P_x تعريفاً هو $\varepsilon_0 N\alpha(\omega)E_x$ ومنه

$$k^2 = \frac{\omega^2}{C^2}\left(1 + N\alpha(\omega)\right) \qquad (3.13)$$

إن $\frac{\omega}{k}$ هي سرعة الطور v_φ (المختلفة عن سرعة الزمرة $\frac{d\omega}{dk}$) ومعامل الانكسار تعريفاً هو نسبة سرعة الموجة في الخلاء إلى سرعتها داخل المادة[5]، فهو $n = \frac{C}{v_\varphi}$ بحيث تصبح المعادلة معادلة بمعامل

---

[5] رأينا أن سرعة الموجة في الخلاء هي $C = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ وقد جرت العادة على التعبير عن السرعة v_φ داخل المادة بدليل النفوذية والسماحية وكتابة $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ ومعامل الانكسار n على الشكل $n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}$ وذلك بإظهار سرعة الموجة داخل المادة بأن نكتب المعادلة (3.9) بدليل $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ و $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$. نكتب عوضاً عن (3.1)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \qquad (3.1)'$$

الانكسار والاستقطابية الذرية $\alpha(\omega)$. حسبناها في (1.31) في الحالة التقليدية وعدلناها في (1.32) لتتلاءم مع ميكانيك الكم. نكتب إذاً

$$n^2 = 1 + N\alpha(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\,\frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} \tag{3.14}$$

لم نأخذ في حسابنا للاستقطابية الذرية للغازات التبدد بعين الاعتبار $(\gamma = 0)$، تصبح هذه العلاقة من أجل الغازات حيث $n \simeq 1$

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\,\frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2}$$

$$n = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\,\frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2} \tag{3.15}$$

لم نأخذ في حسابنا كذلك الحقل الناتج عن الذرات المجاورة، ومعه الاستقطاب الناتج عنها، التي لا غنى عنها في المواد ذات الكثافة العالية والذي أعطانا معادلة كلاوزيوس-موسوتي. إن الحقل المطبق الكلي هو حسب '(1.23)

$$E_{\text{الكلي}} = \left(E_0 + \frac{P}{3\varepsilon_0}\right)$$

الذي أعطانا (1.24) $P = \dfrac{N\alpha}{1 - \dfrac{N\alpha}{3}}\varepsilon_0 E$.

وعوضاً عن (3.5)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma\vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (3.5)'$$

حيث فرضنا التيار متجانساً والناقلية الكهربائية ثابتة، نفرض ثبات ε و μ داخل العازل المتجانس وانعدام الشحنات الحرة فيه. نأخذ كالمعتاد '(3.1) $\vec{\nabla} \times$ آخذين '(3.5) بعين الاعتبار

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\mu\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

لدينا حسب فرضنا من (3.6) $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varepsilon\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_0 = 0$

ومنه معادلة الموجة بطرف ثان

$$\mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{E} = -\mu\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (3.9)'$$

سرعة الموجة $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

لدينا عملياً $\mu = \mu_0$ ومعامل الانكسار $n = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\varepsilon_r}$، حيث ε_r ثابتة العازل النسبية بالنسبة للخواء.

لنلاحظ أننا عندما نكتب '(3.1) و'(3.5) من أجل موجة مستوية تنتشر في اتجاه Ox مثلاً فإننا نحصل على العلاقة بين سعتي الحقلين الكهربائي والمغنطيسي $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}$، $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - kx)}$، بفرض الجسم عازلاً $(\sigma = 0)$ ونجد أن $B_{0_y} = -\dfrac{k}{\mu\omega}E_{0_z}$ و $B_{0_z} = -\dfrac{k}{\mu\omega}E_{0_y}$ وبما أن $\dfrac{k}{\omega} = \dfrac{1}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu}$ فإن النسبة بين السعتين هي $\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}$.

يكفي إذاً أن نبدل $N\alpha$ بـ $\dfrac{N\alpha}{1-\dfrac{N\alpha}{3}}$ في (3.14) لنجد

$$n^2 = 1 + \frac{N\alpha}{1-\dfrac{N\alpha}{3}}$$

ومنه

$$n^2 - 1 = \frac{3N\alpha}{3 - N\alpha}$$

$$3\left(n^2 - 1\right) = N\alpha\left(2 + n^2\right)$$

وأخيراً

$$3\frac{n^2-1}{n^2+2} = N\alpha \qquad (3.16)$$

إنها صيغة كلاوزيوس-موسوتي بدليل معامل الانكسار. نكتبها في الحالة الكمومية (1.33)

$$3\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\sum_k \frac{f_k}{-\omega^2 + i\gamma_k\omega + \omega_{0_k}^2} \qquad (3.17)$$

عندما تكون المادة ذات الكثافة العالية مكونة من عدة مواد مختلفة، الخلائط الصلبة والمحاليل فإن صيغة كلاوزيوس-موسوتي خطية وتكتب من أجل خلائط من n مادة عدد ذرات كل مادة منها في واحدة الحجوم N_j واستقطابيتها الذرية α_j على الشكل

$$3\frac{n^2-1}{n^2+2} = \sum_{j=1}^{n} N_j\alpha_j = \frac{e^2}{m\varepsilon_0}\sum_{j,k}\frac{N_j f_{kj}}{-\omega^2 + i\gamma_{kj}\omega + \omega_{0_{kj}}^2} \qquad (3.18)$$

وهو الشكل الأعم في مسألة معامل الانكسار التي لا تحل إلا في بعض الحالات الخاصة للمواد البسيطة. تبين هذه العلاقة كما تبين سابقتها المبسطة (3.14) أن معامل الانكسار عدد عقدي في كل الأحوال. نعطي قيمته التقريبية من (3.14)، بفرض n قريبة من الواحد

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2}\left(\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega\right)\right]$$

$$n = 1 + \frac{1}{2}\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\left[\frac{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2}\left(1-\frac{i\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right]$$

$$= n_R - in_I$$

وهكذا فالقسم التخيلي لمعامل الانكسار هو

$$n_I = \frac{1}{2}\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\frac{\gamma\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2} > 0 \qquad (3.19)$$

لأن معامل الاحتكاك γ موجب دوماً. لنكتب الموجة المستوية E بدليل معامل الانكسار $n = \frac{kc}{\omega}$ على الشكل

$$E = E_0 e^{i\omega\left(t - \frac{k}{\omega}z\right)} = E_0 e^{i\omega\left(t - \frac{n}{c}z\right)}$$

يعطي القسم التخيلي لـ n دالة أسية متناقصة تجعل الحقل يتخامد بسرعة داخل المادة العازلة

$$E = E_0 e^{\frac{-\omega n_I z}{c}} e^{i\omega\left(t - \frac{n_R}{c}z\right)} \qquad (3.20)$$

وبما أن شدة الحقل (شدة الضوء) متناسبة مع مربع السعة فإنها متناسبة مع

$$\beta = e^{-\frac{2\omega n_I}{c}} \qquad (3.21)$$

الذي يطلق عليه اسم معامل الامتصاص.

تصل سعة الحقل إلى $E_0 e^{-1}$ (حوالي ثلث قيمتها) من أجل مسافة $z = \frac{c}{\omega n_I}$. نقول عن المادة إنها شفافة عندما تكون هذه المسافة كبيرة بالنسبة لأبعاد العينة.

__تطبيق:__ محلول السكر في الماء على سبيل المثال

لننظر إلى المعادلة (3.18) من أجل مزيج من مادتين،

$$3\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N_1\alpha_1 + N_2\alpha_2 \qquad (3.22)$$

نحسب عدد الجزيئات في واحدة الحجوم من أجل أحد مركبي المزيج بدليل عدد آفوغادرو N_a إن $\frac{N_i}{N_a}$ يساوي $\frac{\text{وزن واحدة الحجوم من المادة } i}{\text{وزن المول الغرامي}}$، $i = 1, 2$ ووزن واحدة الحجوم من المادة i هو كثافة المزيج مضروبة بنسبتها المئوية.

إن وزن المول الغرامي للمادة $i = 1$ (الماء) هي 18 ووزن المول الغرامي للسكر $(C_{12}H_{22}O_{11})$ $i = 2$ هو 342. نحصل على كثافة المزيج من أجل مختلف قيم تركيز السكر من الجداول كما نحصل منها على قيم معامل الانكسار من أجل هذه النسب (Hand book of chemistry and physics) نحسب الطرف الأيسر من أجل مختلف قيم التركيز. ومنه، من أجل الماء الصافي : تركيز السكر يساوي الصفر، على α_1 : نسبة الطرف الأيسر على عدد الذرات N_1 ومنه من أجل أي تركيز آخر N_1':

$$N_1'\alpha_1 = 3\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\right)\frac{N_1'}{N_1}$$

إنها من أجل التركيز (بالوزن) 30%

$$0{,}617 \times \frac{43{,}8}{55{,}5} = 0{,}4869$$

إن

لأن معامل الاحتكاك γ موجب دوماً. لنكتب الموجة المستوية E بدليل معامل الانكسار $n = \frac{kc}{\omega}$ على الشكل

$$E = E_0 e^{i\omega\left(t - \frac{k}{\omega}z\right)} = E_0 e^{i\omega\left(t - \frac{n}{c}z\right)}$$

يعطي القسم التخيلي لـ n دالة أسية متناقصة تجعل الحقل يتخامد بسرعة داخل المادة العازلة

$$E = E_0 e^{\frac{-\omega n_I z}{c}} e^{i\omega\left(t - \frac{n_R}{c}z\right)} \quad (3.20)$$

وبما أن شدة الحقل (شدة الضوء) متناسبة مع مربع السعة فإنها متناسبة مع

$$\beta = e^{-\frac{2\omega n_I}{c}} \quad (3.21)$$

الذي يطلق عليه اسم معامل الامتصاص.

تصل سعة الحقل إلى $E_0 e^{-1}$ (حوالي ثلث قيمتها) من أجل مسافة $z = \frac{c}{\omega n_I}$. نقول عن المادة إنها شفافة عندما تكون هذه المسافة كبيرة بالنسبة لأبعاد العينة.

<u>تطبيق:</u>

لننظر إلى المعادلة (3.18) من أجل مزيج من مادتين، محلول السكر في الماء على سبيل المثال

$$3\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N_1\alpha_1 + N_2\alpha_2 \quad (3.22)$$

نحسب عدد الجزيئات في واحدة الحجوم من أجل أحد مركبي المزيج بدليل عدد آفوغادرو N_a إن $\frac{N_i}{N_a}$ ووزن واحدة الحجوم من المادة i هو كثافة المزيج يساوي $\frac{\text{وزن واحدة الحجوم من المادة } i}{\text{وزن المول الغرامي}}$، $i = 1, 2$ مضروبة بنسبتها المئوية.

إن وزن المول الغرامي للمادة $i = 1$ (الماء) هي 18 ووزن المول الغرامي للسكر $(C_{12}H_{22}O_{11})$ $i = 2$ هو 342. نحصل على كثافة المزيج من أجل مختلف قيم تركيز السكر من الجداول كما نحصل منها على قيم معامل الانكسار من أجل هذه النسب (Hand book of chemistry and physics) نحسب الطرف الأيسر من أجل مختلف قيم التركيز. ومنه، من أجل الماء الصافي : تركيز السكر يساوي الصفر، على α_1 : نسبة الطرف الأيسر على عدد الذرات N_1 ومنه من أجل أي تركيز آخر N_1':

$$N_1'\alpha_1 = 3\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\right)\frac{N_1'}{N_1}$$

إنها من أجل التركيز (بالوزن) 30%

$$0,617 \times \frac{43,8}{55,5} = 0,4869$$

إن

$$N_2\alpha_2 = 3\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\right) - N_1\alpha_1$$

وبتقسيمه على $\frac{N_2}{N_a}$ نحصل على $N_a\alpha_2$.

أخذنا هذا التطبيق والجدول التالي عن فاينمان[6] ولم نجر الحساب

A نسبة السكر بالوزن	B الكثافة غرام/سم 2	C n 20°C	D مولات السكر في اللتر N_2 / N_a	E مولات الماء في اللتر N_1 / N_a	F $3\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\right)$	G $N_1\alpha_1$	H $N_2\alpha_2$	J $N_a\alpha_2$ غرام/لتر
0	0,9982	1,33	0	55,5	0,617	0,617	0	-
0,30	1,1270	1,3811	0,970	43,8	0,698	0,487	0,211	0,213
0,50	1,2296	1,4200	1,798	34,15	0,759	0,379	0,380	0,211
0,85	1,4454	1,5033	3,59	12,02	0,886	0,1335	0,752	0,210
1,00	1,588	1,5577	4,64	0	0,960	0	0,960	0,207

كان من المفروض أن يكون المقدار $N_a\alpha_2$ ثابتاً لأن N_a عدد آفوغادرو و α_2 الاستقطابية الذرية للسكر التي لا تتوقف على التركيز من حيث المبدأ، ولكن القيم المحسوبة لا تبين فرقاً كبيراً بين السكر المحلول والسكر البلوري. لنلاحظ أن قيمة معامل الانكسار المعطاة في الجدول هي قيمة وسطية لأن بلورات السكر ليست متناحية. وتعطي الجداول ثلاث قيم حسب المحاور الرئيسية $n_1 = 1,5376$، $n_2 = 1,5651$، $n_3 = 1,5705$.

3.3– معامل الانكسار في المعادن

تتميز المعادن عن المواد الأخرى بوجود إلكترونات حرة فيها – غير خاضعة إلى أي قوة داخل البلورة – إضافة إلى الإلكترونات الأخرى المرتبطة بالذرات المؤينة. هناك إذاً إضافة إلى كثافة الشحنة الناتجة عن الاستقطاب كثافة الشحنات الحرة التي نرمز لها بـ ρ_ℓ. وهكذا فإن معادلة ماكسويل الأولى I' هي

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_\ell}{\varepsilon_0} \qquad I'_م \quad \text{لمعدن}$$

ومعادلة ماكسويل الرابعة هي بأخذ تيار الإلكترونات الحرة بعين الاعتبار $\vec{J}_\ell$

[6] فاينمان، The Feynman Lectures on Physics المجلد الثاني 9–32.

$$IV'_{\ell} \qquad \varepsilon_0 C^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J}_{\ell} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}\right)$$

تبقى II و III دون تغيير في كل الأحوال، نحسب $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)$ كما في الرقم 1 لنجد معادلة الموجة في المعدن

$$\square^2 E = \frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{P}\right) - \frac{1}{\varepsilon_0 C^2}\frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\nabla}\rho_{\ell} - \frac{1}{\varepsilon_0 C^2}\frac{\partial \vec{J}_{\ell}}{\partial t} \qquad (3.23)$$

سنهمل في هذه المعادلة الحدين الأولين في الطرف الثاني – وكانا الوحيدين الموجودين في معادلة الموجة داخل العازل – أمام الحدين الناتجين عن الإلكترونات الحرة والطاغيين عليهما. لنفرض أن كثافة الإلكترونات الحرة ثابتة، وليس لتوزع الشحنات الحرة غراديان $\vec{\nabla}\rho_{\ell} = 0$، لا يبقى في المعادلة إلا الحد بمشتق J_{ℓ} بالنسبة للزمن:

$$\frac{1}{\varepsilon_0 C^2}\frac{\partial}{\partial t}Nq\left\langle \vec{V}_{\ell} \right\rangle \qquad (3.24)$$

حيث N كما في العلاقات السابقة كثافة الشحنات (الحرة)، و $\left\langle \vec{V}_{\ell} \right\rangle$ سرعة الشحنات الحرة الوسطية. لنفرض أن الانتقال الوسطي للإلكترون، مساره الحر الوسطي بين اصطدامين بالذرات الثابتة، هو $\vec{L}$ وسرعته الوسطية هي $\frac{\vec{L}}{\tau}$ حيث τ زمن الارتخاء، الزمن الفاصل بين اصطدامين متتاليين للشحنة الحرة $\left\langle \vec{V}_{\ell} \right\rangle = \frac{\vec{L}}{\tau}$. يلعب $\vec{L}$ دور $\vec{\delta}$ في الاستقطاب الإلكتروني و $\frac{1}{\varepsilon_0 C^2}\frac{\partial \vec{J}_{\ell}}{\partial t}$ دور المشتق الثاني للاستقطاب الذي بقي لوحده في معادلة العازل. نخضع المعدن إلى حقل كهربائي كما فعلنا في العازل ونحصل على معامل الانكسار المعدني الناتج عن الإلكترونات كما في (3.14) مع فارق أساسي هو عدم خضوع الإلكترون الحر تعريفاً، إلى أي قوة متناسبة مع الاستطالة $\omega_0 = 0$، ولكنه خاضع للإبطاء الذي يبدد الطاقة تبسخين المعدن $\gamma \neq 0$

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega} \qquad (3.25)$$

عرفنا الناقلية الكهربائية (((II.(5.(1.27 في وسط متجانس (حتى لا ندخل تانسور الناقلية σ_{ij}) على الشكل

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}$$

ووجدنا انطلاقاً من معادلة الحركة أن $\left\langle V_{\ell} \right\rangle = \frac{qE\tau}{m}$ ومن تعريف σ و $\vec{J}$

$$Nq\left\langle \vec{V}_{\ell} \right\rangle = \frac{Nq^2\tau}{m}\vec{E}$$

أن

$$\sigma = \frac{Nq^2}{m}\tau \qquad (3.26)$$

يأخذ معامل الانكسار بدليل الناقلية الكهربائية σ ونظراً لأن $\gamma = \frac{1}{\tau}$ الشكل

$$n^2 = 1 + \frac{\sigma/\varepsilon_0}{i\omega(1 + i\omega\tau)} \qquad (3.25)'$$

لنميز حالتين حديتين حسبما تكون التواترات منخفضة أو عالية:

أ- لنفرض أن التواترات منخفضة بحيث يكون جداؤها بزمن الارتخاء τ صغيراً $\omega\tau \ll 1$ (لنذكر أن زمن الارتخاء هو بحدود 10^{-14} ثانية). لدينا، بوضع $1 + i\omega\tau = 1$

$$\frac{\sigma/\varepsilon_0}{i\omega(1 + i\omega\tau)} = \frac{\sigma\tau/\varepsilon_0}{i\omega\tau(1 + i\omega\tau)} \simeq \frac{\sigma\tau/\varepsilon_0}{i\omega\tau}$$

وهذا الحد التخيلي كبير جداً أمام القسم الحقيقي 1، ومنه مربع معامل الانكسار وهو تخيلي بحت

$$n^2 = -i\frac{\sigma/\varepsilon_0}{\omega}$$

والجذر

$$n = \sqrt{\frac{\sigma/\varepsilon_0}{2\omega}}\,(1 - i) \qquad (3.27)$$

لأن $\frac{1 - i}{\sqrt{2}} = (-i)^{1/2}$.

ومعامل الامتصاص β حسب (3.21) هو

$$\beta = \frac{2\omega n_1}{C} = \sqrt{\frac{2\sigma\omega}{\varepsilon_0 C^2}}$$

وتصل سعة الحقل إلى E_0e^{-1} (حوالي ثلث قيمتها) من أجل مسافة $z = \frac{C}{\omega n_1} = \frac{2}{\beta}$ هي

$$z = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 C^2}{\sigma\omega}} \qquad (3.28)$$

يطلق عليها اسم سمك القشرة.

إن ناقلية النحاس هي $\sigma = 5{,}73.10^7$ أوم/متر وزنه الذري 63,5 g كثافته 8,9 cm^3/g ومنه عدد الذرات في المتر المكعب $8{,}9.10^6 \times \frac{Na}{63{,}5} = 8{,}5.10^{28}$ شحنة الإلكترون معروفة $1{,}6.10^{-19}C$ وكتلته كذلك $9{,}11.10^{-31}$ كيلوغرام وبفرض أن لدينا إلكتروناً واحداً في كل ذرة فإن زمن الارتخاء محسوب من (3.26): $\tau = 2{,}4.10^{-14}$ ثانية.

هذا من جهة، رأينا من جهة ثانية أننا فرضنا أمرين

$$\omega\tau \ll 1$$

$$\frac{\sigma/\varepsilon_0}{\omega} \gg 1$$

أو

$$\omega \gg \frac{1}{\tau} = 4{,}1.10^{13}/\text{ثانية}$$

$$\omega \gg \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 6{,}5.10^{18}/\text{ثانية} \qquad \text{لأن} \qquad \varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$$

يسلك النحاس إذاً سلوك الترددات المنخفضة من أجل $\upsilon = \frac{\omega}{2\pi}$ بحدود 10^{12} هرتز، أي بحدود أطوال موجة 0,3 مم – أطوال أمواج الراديو القصيرة جداً وسمك القشرة في هذه الحالة هو من أجل الموجات الميكروية 10^{13} هرتز (أمواج سنتمترية)

$$z = \sqrt{\frac{0{,}028\ \text{متر}^2/\text{ثانية}}{\omega}} = 6{,}7.10^{-4}\ \text{سم}$$

لا تخترق هذه الأمواج المعدن إلا إلى مسافة قصيرة جداً.

ب– لننظر الآن إلى الحالة النقيضة عندنا تكون الترددات عالية، الجداء $1 \ll \omega\tau$. لدينا على عكس الحالة السابقة $1 + i\omega\tau \simeq i\omega\tau$ (الواحد هو المهمل أمام $i\omega\tau$) ومربع معامل الانكسار حقيقي ويساوي لـ

$$n^2 = 1 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega^2\tau} = 1 - \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m\omega^2}$$

يطلق على المقدار

$$\frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} = \omega_p \qquad (3.29)$$

اسم تواتر البلاسما وتكتب n^2 على الشكل

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad (3.30)$$

الهدف من هذه الكتابة هو إظهار ω_p كتواتر حدي، فمعامل الانكسار تخيلي بحت من أجل $\omega < \omega_p$ ولا يخترق الحقل الكهربائي المعدن إلا لمسافات قصيرة هي سمك القشرة كما في الحالة السابقة. أما من أجل التواترات العالية جداً $\omega \gg \omega_p$ فمعامل الانكسار حقيقي ويصبح المعدن شفافاً : تخترق الأمواج الكهرطيسية المعدن بدءاً بالأشعة فوق البنفسجية، فالأشعة السينية، الخ. فالليتيوم على سبيل المثال شفاف من أجل طول الموجة 1550 Å وتساوي تماماً لـ $\lambda_p = \frac{2\pi C}{\omega_p}$ المحسوبة وكذلك الصوديوم من أجل طول موجة 2100 Å وتساوي في الحساب 2090.

ويقع اختلاف طفيف للكالسيوم من أجل طول موجة 3150 Å وتساوي في الحساب 2870.

يلزم علينا أن نعلل سبب إدخال تواتر البلاسما في حساب معامل الانكسار، فالبلاسما وسط مكون من أيونات وإلكترونات حرة كثافة الشحنة معدومة فيها في حال التوازن الترموديناميكي، إلا أنه من الممكن أن تتحرك الإلكترونات في اتجاه ما Ox حركة جماعية تصبح معها كثافة الشحنات السالبة كبيرة جداً أمام

الموجبة، الأيونات، التي كانت قد ابتعدت عنها وهكذا تتحرك الإلكترونات حركة اهتزازية في الاتجاه الموجب لـ Ox فبالاتجاه السالب، الخ. لتكن ρ كثافة الشحنة، لدينا من معادلة الاتصالية كثافة الشحنات الموجبة فيقع تنابذ بين الإلكترونات وجذب لها من قبل الشحنات

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

إن $\vec{J} = -Nq\vec{V}$ حيث $-q$ شحنة الإلكترون و $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial J}{\partial x}$، ومنه ρ في اللحظة t بعد بدء الحركة

$$\rho = -Nq\int_0^t \frac{dV}{dx} = NqV$$

هذا يعني أن كثافة الشحنة الموجبة قد ارتفعت في النقطة x واللحظة t حيث يوجد الإلكترون وأنتجت حقلاً E يحقق معادلة ماكسويل الأولى

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{Nq\vec{V}}{\varepsilon_0}$$

والمسألة ببعد واحد

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{NqV}{\varepsilon_0}$$

وبالتكامل

$$E = \frac{Nqx}{\varepsilon_0}$$

ومعادلة حركة الإلكترون الاهتزازية

$$mx'' = \frac{-Nq^2x}{\varepsilon_0}$$

والحل $x = e^{i\omega_p t}$ و $\omega_p = \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}$.

يؤين الإشعاع فوق البنفسجي الآتي من الشمس غاز الأجواء العليا ويحوله إلى بلاسما Ionosphere تسلك الإلكترونات الحرة في هذه الأجواء المؤينة سلوك الإلكترونات الحرة في المعدن ولذا فالأجواء المؤينة شفافة من أجل $\omega_p \langle \omega$ أي من أجل أطوال موجات الراديو القصيرة ولذا تستعمل هذه الأمواج للاتصال بالأقمار الصناعية.

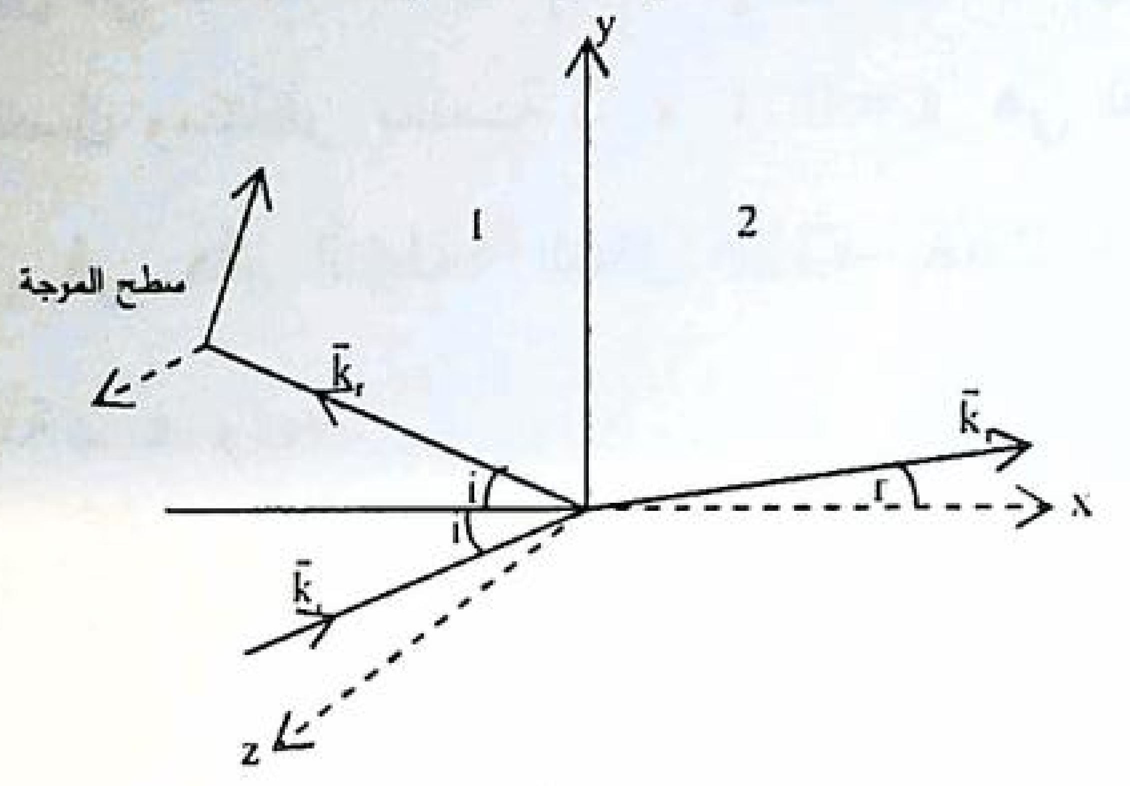
4. الانعكاس

1.4- الشروط على الحدود

لندرس الآن حل معادلات ماكسويل على السطح الفاصل بين وسطين ماديين، مبتدئين بوسطين عازلين. ليكن yz السطح الفاصل بين وسطين 1 و 2، نرمز لمعامل الانكسار فيهما بـ n_1 و n_2 ونحدد المستوى xy لكي يكون عمودياً على الموجة المستوية

$$\vec{E}_0 = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \tag{4.1}$$

فهو إذاً المستوي الذي تقع فيه متجة الموجة $\vec{k} = (k_x, k_y, 0)$، نسميه مستوى الورود، الشكل.21.



الشكل.21

نرمز لمتجهة الحقل المنعكسة بـ

$$\vec{E}_r = \vec{E}'_0 e^{i(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{r})} \tag{4.2}$$

ومتجهة الحقل العابرة إلى الوسط 2 بـ

$$\vec{E}_t = \vec{E}''_0 e^{i(\omega'' t - \vec{k}''\cdot\vec{r})} \tag{4.3}$$

نعبر عن فعل المؤثر التفاضلي $\frac{\partial}{\partial t}$ بـ $i\omega$ و عن فعل $\vec{\nabla}$ بـ $\frac{1}{i}\vec{k}$ عند تطبيقها على موجة مستوية ونكتب معادلة ماكسويل الثانية

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

على الشكل

$$\frac{1}{i}\vec{k} \times \vec{E} = -i\omega\vec{B}$$

أو

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} \quad (4.4)$$

لنذكر كذلك أن

$$\left|\vec{k}\right|^2 = \frac{\omega^2 n^2}{C^2} \quad (4.5)$$

تبين معادلة ماكسويل الأولى $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0}$ حصول انقطاع في قيمة الاستقطاب عند الانتقال من الوسط 1 إلى الوسط 2، فهي على سبيل المثال مساوية للصفر في الوسط 1 (الخلاء) لتقفز إلى $\vec{P}$ عند الانتقال على السطح الفاصل من $x = -\varepsilon$ إلى $x = +\varepsilon$، إنها متناسبة مع الدالة θ لهفيسايد ومشتقاتها متناسبة مع دالة ديراك. هذا إذا كان السطح الفاصل هو المستوي الهندسي yz. إلا أن الواقع الفيزيائي مختلف إذ تختلط ذرات الوسطين في منطقة الحدود $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ ويتغير $\vec{P}$ في هذا الوسط ولنسمه المنطقة 3 تغيراً سريعاً وإنما بشكل متصل ومتناظر بالنسبة لـ x : $x = 0$ هي نقطة انعطاف، الشكل.22a، وللمشتق $\frac{\partial P_x}{\partial x}$ نهاية عظمى في هذه النقطة، الشكل.22b، يحدث الأمر نفسه بالنسبة لـ $\vec{E}$، الشكل.22c، ولدينا عند المكاملة بـ $-\varepsilon$ و $+\varepsilon$

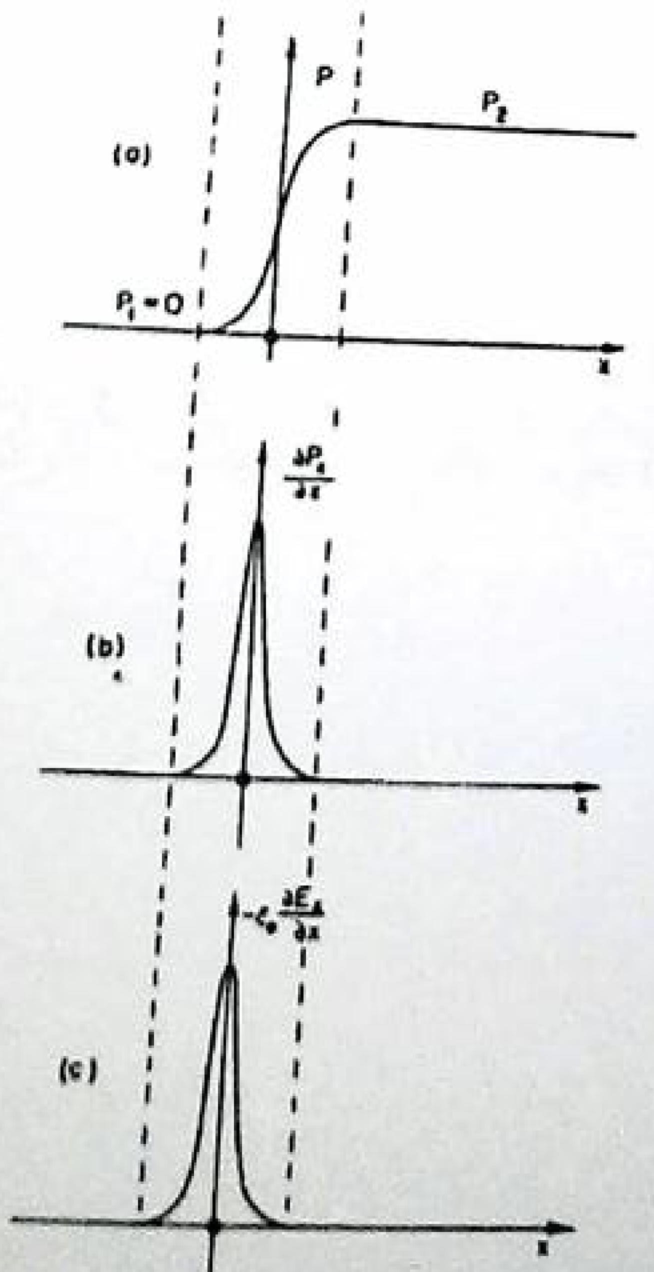
$$\varepsilon_0 \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\partial E_x}{\partial x} dx = -\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\partial P_x}{\partial x} dx$$

أو

$$\varepsilon_0 \left(E_{x_2} - E_{x_1}\right) = -\left(P_{x_2} - P_{x_1}\right)$$

حيث x_2 و x_1 تشيران إلى القيم في هذين الوسطين أو بعبارة أخرى

$$\varepsilon_0 E_{x_2} + P_{x_2} = \varepsilon_0 E_{x_1} + P_{x_1} \quad (4.6)$$



الشكل.22

أي أن مسقط التحريض الكهربائي على Ox ، D_x دالة متصلة عند العبور من وسط إلى آخر. لننظر إلى مركبات معادلة ماكسويل الثانية

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \qquad (1)$$

لا يوجد اشتقاق بالنسبة لـ x ولا نستخلص من هذه المعادلة شيئاً يخص منطقة الانقطاع، المركبة الثانية

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \qquad (2)$$

تبين استحالة وقوع أي تغير سريع لـ E_z عند الانتقال من وسط لآخر لأن B_y ليست مشتقة بالنسبة لـ x ، أي أن

$$E_{z_1} = E_{z_2} \qquad (4.7)$$

وعلى نفس النحو تبين المركبة الثالثة استحالة التغير السريع لـ E_y

$$E_{y_1} = E_{y_2} \qquad (4.8)$$

تبين معادلة ماكسويل الثالثة $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ في الوسطين أن

$$\frac{\partial B_{x_1}}{\partial x} = \frac{\partial B_{x_2}}{\partial x}$$

لأن المشتقات الأخرى متساوية

$$B_{x_1} = B_{x_2}$$

وأخيراً تبين معادلة ماكسويل الرابعة كالثانية أننا لا نستخلص شيئاً من المركبة الأولى، تبين المركبة الثانية

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial P_y}{\partial t} + \frac{1}{C^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}$$

أنه يستحيل على B_z أن تتغير بسرعة وأن

$$B_{z_1} = B_{z_2} \qquad (4.9)$$

والمركبة الثالثة استحالة تغير B_y بسرعة

$$B_{y_1} = B_{y_2} \qquad (4.10)$$

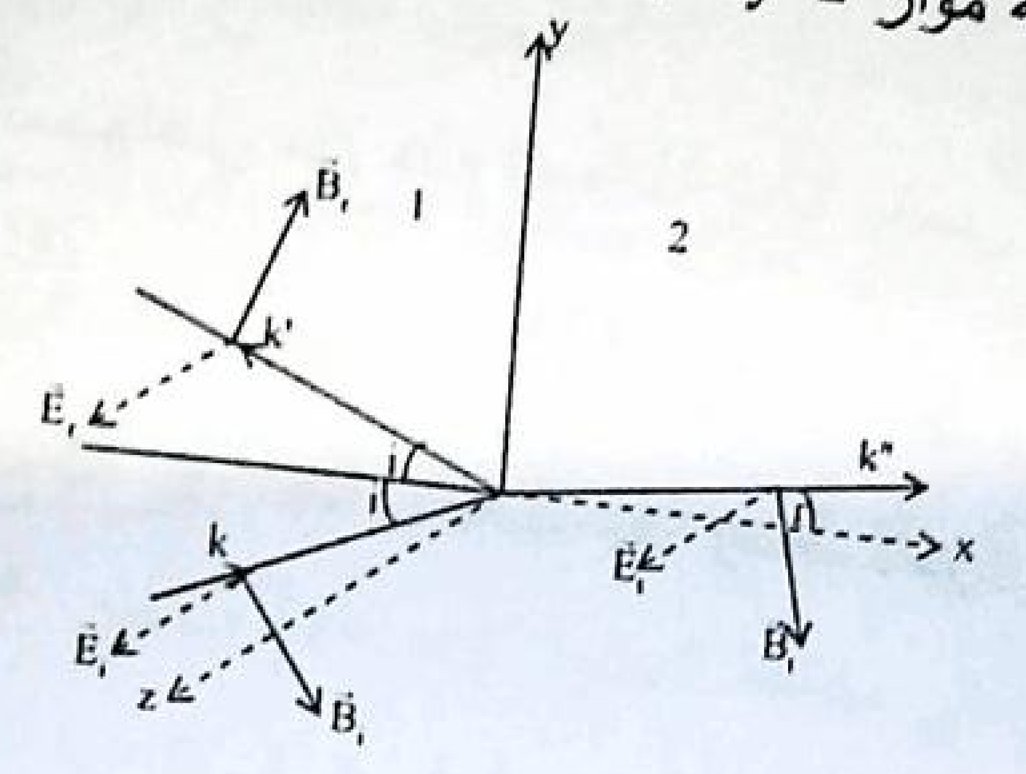
والخلاصة فإن الشروط على الحدود هي

$$\text{I} \qquad \begin{cases} \varepsilon_0\left(\vec{E}_1 + \vec{P}_1\right)_x = \varepsilon_0\left(\vec{E}_2 + \vec{P}_2\right)_x \\ E_{1y} = E_{2y} \\ E_{1z} = E_{2z} \\ \vec{B}_1 = \vec{B}_2 \end{cases}$$

إذ للحقل الكهربائي، عندما نعين على سطح الموجة اتجاهين، الأول عمودي على xy والآخر مواز له. مسقطان متغيران على هذين الاتجاهين :

لا يكون ذا استقطاب ثابت، مسقطان متغيران على هذين الاتجاهين، xy، مستقطب في الاتجاه Oz،

أ- لنفرض في البداية أنه مستقطب في الاتجاه العمودي على $\vec{E}$ ،$\vec{B}$ ،$\vec{k}$ ثلاثية مباشرة، الشكل.23a والثلاثية xy مواز لـ $\vec{B}$ العمودي عليه $\vec{E} = (0, 0, E)$



الشكل.23a

$\vec{P} = (0, 0, P)$ مستقطب في اتجاه $\vec{E}$ وهكذا فإن $\vec{P}$ متاحياً، عندما يكون الوسط متناسب مع $\vec{E}$ إن $\vec{P}$ هو مجموع الحقلين الوارد E_{1z} إن . $\vec{B}_1 = \vec{B}_2$: $E_{1z} = E_{2z}$ و $E_{1y} = E_{2y} = 0$: في كلا الوسطين، حيث $x = 0$ ، ومنه على الحدود، 2 والمنعكس و E_{2z} هو الحقل المنتقل إلى الوسط

$$E_i + E_r = E_t$$

أي

$$E_0 e^{i(\omega t - k_y y)} + E_0' e^{i(\omega' t - k_y' y)} = E_0'' e^{i(\omega'' t - k_y'' y)} \quad (4.11)$$

هذه العلاقة صحيحة أياً كانت قيمة y على المستوي الفاصل، نأخذها مساوية للصفر لنجد أن

$$E_0 e^{i\omega t} + E_0' e^{i\omega' t} = E_0'' e^{i\omega'' t}$$

ليس لهذه المعادلة حل إلا إذا تساوت التواترات : $\omega = \omega' = \omega''$ [7]. ينتج عن ذلك نظراً لـ (4.5) أن

$$\frac{k^2}{n_1^2} = \frac{k'^2}{n_1^2} = \frac{k''^2}{n_2^2} \quad (4.12)$$

يمكننا بوضع $t = 0$ في (4.11) واتباع نفس المحاكمة التي أدت إلى تساوي التواترات إثبات أن

$$k_y = k_y' = k_y'' \quad (4.13)$$

وبالعودة إلى المساواة الأولى في (4.12) نجد أن

$$k_x^2 = k_x'^2$$

أو

$$k_x' = \pm k_x \quad (4.14)$$

[7] إن وضع t تساوي 1 يبين أن $E_0 \cos(\omega + \omega' - 2\omega'') = E_0''$ ومنه $\omega + \omega' = 2\omega''$ لأن $E_0 = E_0' = E_0''$.

لا معنى لإشارة + لأنها تعطي موجة واردة أخرى عوضاً عن التعبير عن الانعكاس، وهكذا فإن (4.13) و(4.14) تعنيان أن الزاويتين i و i' اللتين يعملهما $\vec{k}$ و $\vec{k}'$ مع المحور x متساويتان.

نرى بوضع $k''_y = k_y$ في (4.12) أن

$$k''^2_x = k''^2 - k''^2_y = k^2 \frac{n_2^2}{n_1^2} - k_y^2 \qquad (4.14)'$$

لننظر إلى معاملي الانكسار كعددين حقيقيين، مهملين بذلك امتصاص الموجة المعبر عنها بالقسم التخيلي لـ n، والأعداد k حقيقية هي أيضاً؛ يمكننا أن نكتب

$$\frac{k_y}{k} = \sin i \quad ، \quad \frac{k''_y}{k''} = \sin r$$ حيث r الزاوية التي تعملها $\vec{k}''$ مع المحور x

لكن $\frac{k}{k''} = \frac{n_1}{n_2}$ و $k_y = k''_y$ ومنه قانون الانكسار

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \qquad (4.15)$$

لم يبق علينا إلا حساب سعات الحقل وشدة الضوء. لدينا من (4.11) بوضع $t = 0$ و $k = 0$

$$E_0 + E'_0 = E''_0 \qquad (4.16)$$

نجد علاقة أخرى بين هذه السعات بالاستعانة بـ (4.4) التي تعطينا من

$$B_y = -\frac{k_x E}{\omega}$$

الشرط على الحدود $B_{y_i} + B_{y_r} = B_{y_t}$ وملاحظة (4.13) وتساوي التواترات

$$k_x E_0 + k'_x E'_0 = k''_x E''_0 \qquad (4.17)$$

نعبر عن E'_0 و E''_0 بدليل E_0:

$$E'_0 = \frac{k_x - k''_x}{k_x + k''_x} E_0 \qquad (4.18)$$

$$E''_0 = \frac{2k_x}{k_x + k''_x} E_0 \qquad (4.19)$$

نحصل من (4.18) بدليل مركبات متجهة الموجة على النسبة التالية

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{n_1 \cos i - n_2 \cos r}{n_1 \cos i + n_2 \cos r} = \frac{\cos i \sin r - \cos r \sin i}{\cos i \sin r + \cos r \sin i} \qquad (4.20)$$

المساواة الثانية ناتجة عن استعمال (4.15)

$$\frac{E'_0}{E_0} = R_p = \frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)} \qquad (4.21)$$

وبما أن E'_0 و E_0 هما في نفس الوسط 1 فإن شدة الضوء متناسبة مع مربع الحقل الكهربائي، والنسبة بين شدة الضوء المنعكس والضوء الوارد معطاة بمربع (4.21)، إلا في حالة الورود الناظمي فهي غير محددة، ولذا نكتب في جوار هذا الورود $(i = 0)$ $\sin i = i$ ، $\sin r = r$ ، $\frac{i}{r} = \frac{n_2}{n_1}$ ونكتب مربع (4.21) في هذه الحالة

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \qquad (4.22)$$

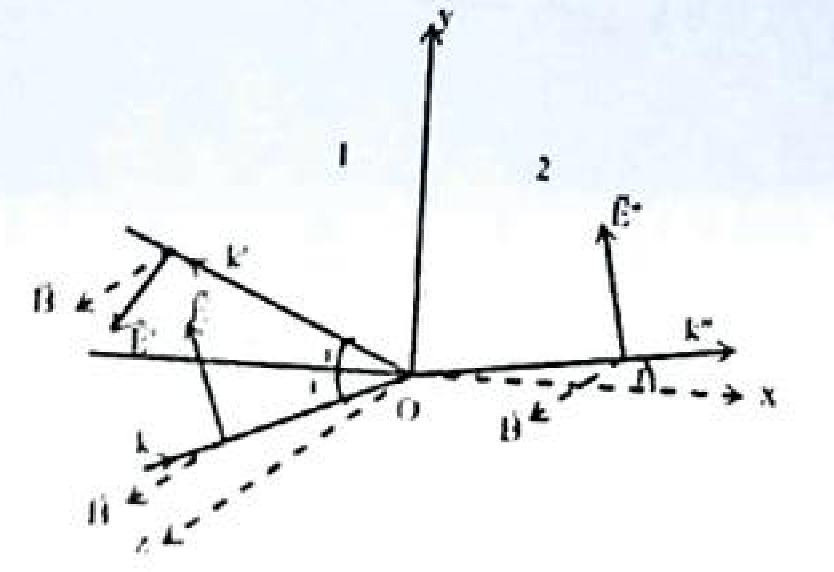
تبلغ R_p قيمتها العظمى في حال الورود المماسي، $i = \frac{\pi}{2}$، المساوي لـ 1.

ب- أما عندما يكون الاستقطاب موازياً للمستوي xy فإن للحقل مركبتين E_x و E_y مما يطيل الحساب ولا يختلف الشكل هنا عن الشكل السابق إلا باستبدال $\vec{E}$ بـ $\vec{B}$ والعكس بالعكس وملاحظة أن $\vec{E}_i$ و $\vec{E}_r$ متعاكسين في النقطة O في حال الورود الناظمي، الشكل.23b؛ يمكن الانطلاق من الحقل المغنطيسي ذي المركبة الوحيدة B_z للوصول إلى النتيجة التالية مستعملين (4.4) و(4.5)

$$\left|E_0'\right| = \frac{n_2^2 k_x - n_1^2 k_x^{\cdot}}{n_2^2 k_x + n_1^2 k_x^{\cdot}}\left|E_0\right| \qquad (4.23)$$

$$\left|E_0^{\cdot}\right| = \frac{2 n_1 n_2 k_x}{n_2^2 k_x + n_1^2 k_x^{\cdot}}\left|E_0\right| \qquad (4.24)$$

لدينا بطبيعة الحال $E_0 + E_0' = E_0^{\cdot}$.



الشكل.23b

لا حاجة بنا هنا لإجراء حساب نسبة شدة الحقلين في حال الورود الناظمي لأن هذا الورود يعني أن مستوى الموجة مواز للسطح الفاصل yz، نختار محوري هذا السطح بحيث يكون أحدهما y موازياً لاتجاه E ونطبق العلاقة (4.22). أو بعبارة أخرى لقد أصبحنا في غنى عن اختيار مستوى ورود. وضعنا العلاقتين (4.24,23) بالقيمة المطلقة لأن الحقل الكهربائي المنعكس يختلف في الإشارة عن الحقل الوارد ويدخل بذلك فرق طور π بين الحقلين. نكتب هاتين العلاقتين بدليل زاويتي الورود والانكسار على الشكل

$$\frac{E_0'}{E_0} = R_S = -\frac{tg(i - r)}{tg(i + r)} < 0 \qquad (4.25)$$

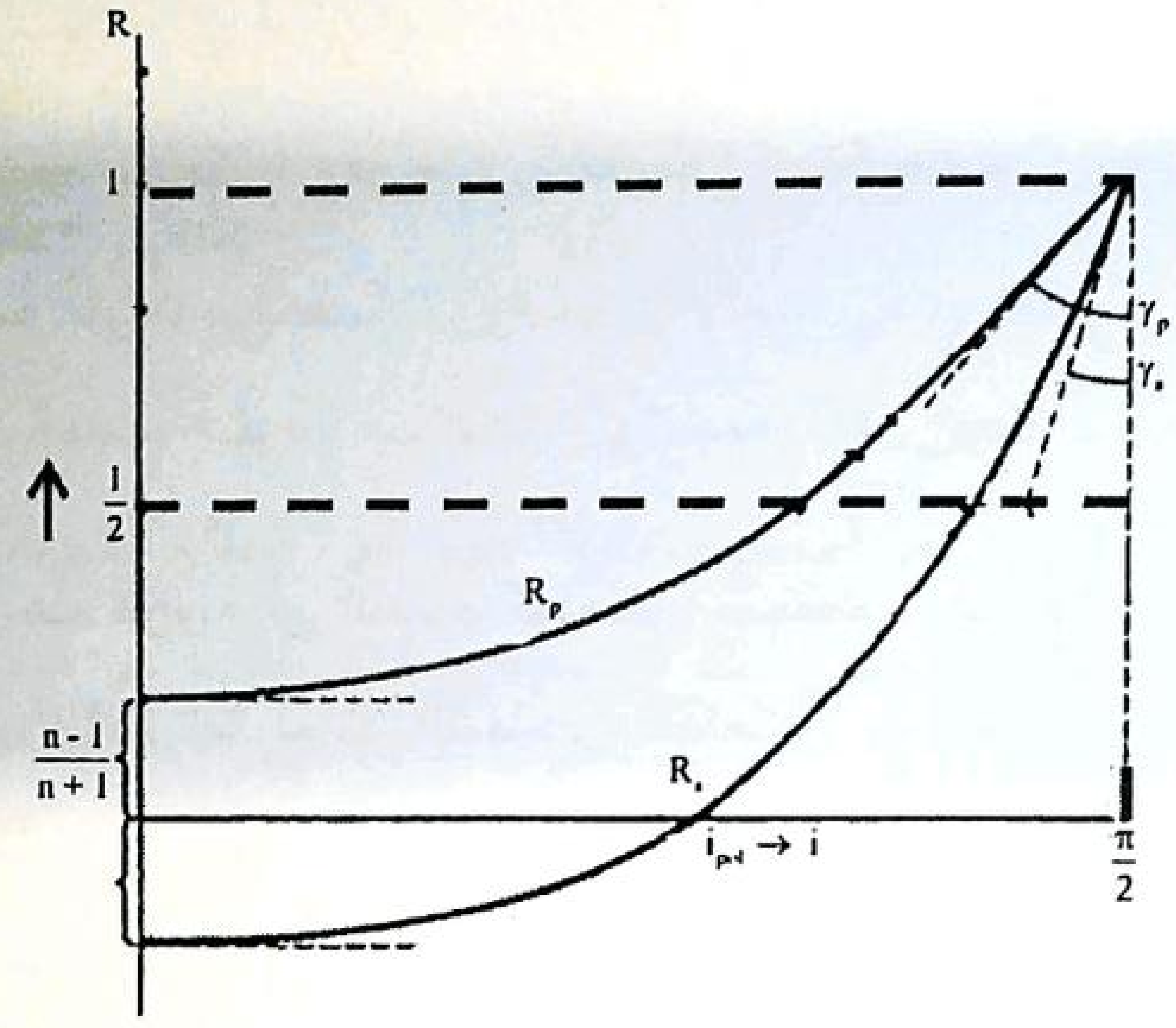
حيث فرضنا أن الانكسار يقع بين وسط أقل كثافة، الهواء، وآخر أكثر كثافة، الزجاج $(i > r)$. رمزنا لنسبة الانعكاس هنا بـ R_S (الحقل في مستوى الورود) لتمييزها عن R_p في (4.25) (الحقل عمودي على مستوى الورود).

عندما تتناهى i إلى الصفر – نحو الورود الناظمي – وتصبح $i = n\sin r$ حيث $\frac{n_2}{n_1} = n$ هو معامل الانكسار النسبي لتأخذ R_S الشكل

$$^{8}R_s = -\frac{1-n}{1+n}\left(1-\frac{i^2}{n}\right) \qquad (4.26)$$

يبين الشكل.24 تغيرات النسبتين R_p و R_s بدليل زاوية الورود i. وترسم كلا منهما قطعاً مكافئاً مماسه أفقي في النقطة $i = 0$، ويصلا إلى نهاية عظمى، من أجل $i = \pi/2$، الشكل.24، نحسب مشتقي (4.21) و(4.25) بالنسبة لـ i لنجد أن زاوية ميل المماس لـ R_s، γ_s أصغر من زاوية ميل المماس لـ R_p، γ_p

$$tg\gamma_s = \frac{\sqrt{n^2-1}}{2n^2} < tg\gamma_p \qquad (4.27)$$



الشكل.24

[8] هذه النتيجة ليست بديهية، إذ يجب أن ننشر $\sin r$، الصغير في هذه الحالة على الشكل

$$\sin r = r\left(1-\frac{r^2}{6}+\dots\right) = \frac{i}{n}\left(1-\frac{i^2}{6}+\dots\right) \qquad (1)$$

نبدل في القوس الأول $\frac{r^2}{6}$ بـ $\frac{i^2}{6n^2}$، مهملين الحدود الأعلى بـ i كما نبدل، في نفس القوس $\left(1-\frac{i^2}{6n^2}\right)^{-1}$ بـ $1+\frac{i^2}{6n^2}$ فنحصل من الطرفين الأخيرين في (1) على

$$r = \frac{i}{n}\left(1-\frac{i^2}{6}\right)\left(1+\frac{i^2}{6n^2}\right) = \frac{i}{n}\left(1-\frac{n^2-1}{6n^2}i^2\right) \qquad (2)$$

حيث أهملنا كل ما هو من الدرجة الخامسة بـ i. نحسب بسهولة $i \pm r$ لنجد عند التوقف عن الدرجة الثالثة بـ i

$$i \pm r = i\left(1 \pm \frac{1}{n}\left(1-\frac{n^2-1}{6n^2}i^2\right)\right)$$

لم تعد هناك أي صعوبة لحساب $\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}$ والتوقف عند الدرجة الثالثة بـ i لنجد أنه يساوي لـ $\frac{n-1}{n+1}\left(1+\frac{i^2}{n}\right)$، وكذلك حساب $\frac{\cos(i-r)}{\cos(i+r)}$ لنجد أنه يساوي لـ $\left(1-\frac{2i^2}{n}\right)$ ومنه (4.26).

وبما أن R_s تنتقل من القيمة السالبة (4.25) إلى القيمة الموجبة

$$R_s = -\frac{tg\left(\frac{\pi}{2} - r\right)}{tg\left(\frac{\pi}{2} + r\right)} = 1 \quad (4.28)$$

فإنها تنعدم من أجل زاوية نرمز لها بـ i_{pol} (زاوية الاستقطاب)، يأخذ مخرج (4.25) فيها القيمة $+\infty$ وينتقل فجأة من $+\infty$ إلى $-\infty$.

أي أن

$$i_{pol} + r = \frac{\pi}{2} \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{n}\sin i_{pol} = \sin r = \cos i_{pol}$$

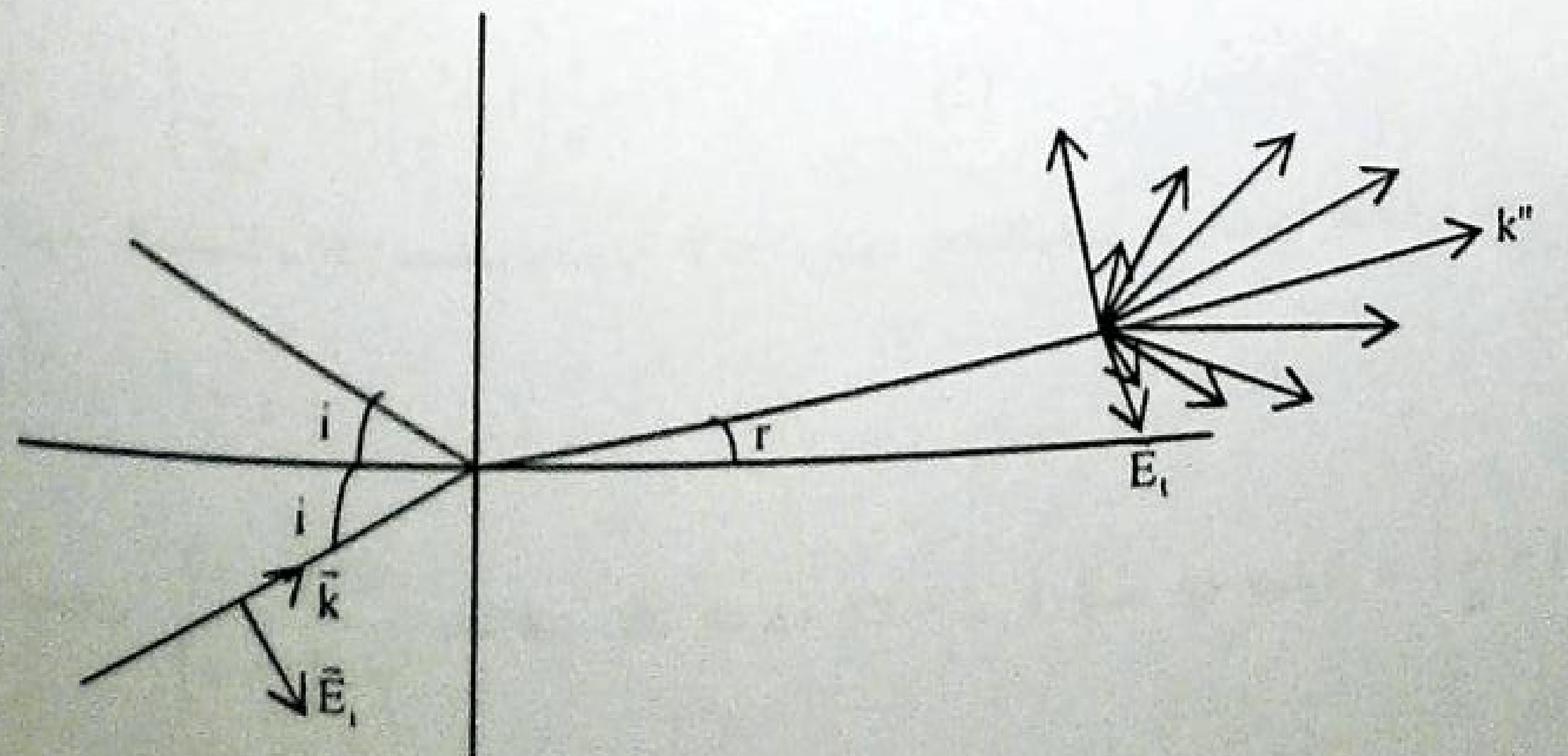
أو

$$tg i_{pol} = n \quad (4.30)$$

يعني انعدام R من أجل هذه الزاوية أن الضوء المنعكس مستقطب كلياً في اتجاه مواز لمستوى الورود. هذا ما اكتشفه مالوس Malus. أما تعامد الشعاعين المنعكس والمنكسر $i_{pol} + r = \pi/2$ فهو محتوى قانون برويستر Brwester.

نحصل على سبيل المثال من الزجاج $n = 3/2$ بالنسبة للهواء على $i_{pol} = 57°$ ومن أجل الماء $n = 4/3$ على $i_{pol} = 53°$.

لنعد إلى حركة الشحنات بتأثير الحقل الكهرطيسي لنفسر ظواهر الانعكاس والانكسار. تحرك الموجة الواردة من الوسط الأول إلى الوسط الثاني الإلكترونات الحرة في هذا الوسط – حركة هزاز ثنائي القطب، هزاز هرتز – تنتج هذه الهزازات بدورها حقلاً كهرطيسياً في الوسط الأول، موجة منعكسة، تؤثر على الحقل الوارد وتعدله. عندما يكون الحقل الوارد في مستوى الورود فالحقل المنكسر في هذا المستوى أيضاً وعمودي طبعاً على الشعاع المنكسر. يولد $\vec{E}_t$ اهتزازات ثنائي قطب تصدر حقلاً في كل الفضاء ماعدا اتجاه حركتها كما نعلم – الشكل.25، الذي هو اتجاه الحقل المنكسر حسب (4.29)



الشكل.25

ملاحظات:

1- ركزنا انتباهنا على حالة الحقل الكهربائي الوارد في مستوى الورود لأن شعاع الانعكاس ينعدم كلياً في هذه الحالة عندما يتعامد الشعاعان المنعكس والمنكسر، أما عندما يكون الحقل الكهربائي عمودياً على مستوى الورود فإن $R_p = \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}$ تساوي من أجل $i_{pol} + r = \pi/2$ (نظراً لأن $tgi_{pol} = n$)

$$R_p = \frac{sinicosr - cosisinr}{1} = \sin^2 i - \cos^2 i$$

$$= \left(tg^2 i - 1\right)\frac{1}{1+tg^2 i} = \frac{n^2-1}{n^2+1}$$

وتساوي $\frac{5}{13}$ من أجل الزجاج، لا ينعدم الشعاع المنعكس وإنما يقع استقطاب جزئي.

2- نريد أن نذكر، كي لا يقع القارئ في حيرة، أن مستوى الاستقطاب تعريفاً هو المستوى العمودي على "متجهة الضوء"، ولذا يختلف تعيين هذا المستوى باختلاف تعريف متجهة الضوء، هل هي الحقل الكهربائي أم الحقل المغنطيسي ؟ لقد أصبح متعارفاً عليه أنها الحقل الكهربائي. فعندما نقول إن هذا الحقل عمودي على مستوى الورود فمعنى ذلك أن مستوى الاستقطاب هو مستوى الورود وعلى العكس فإنه المستوى العمودي على مستوى الورود عندما يكون الحقل الكهربائي في مستوى الورود؛ ونحن لم ندخل في مناقشتنا مفهوم مستوى الاستقطاب المستعمل في كثير من الأحيان.

3- عالجنا في كلا حالتي الاستقطاب النسبة $\frac{E'_0}{E_0}$. يمكن بنفس الشكل معالجة النسبة $\frac{E''_0}{E_0}$. حساب مربعي هاتين النسبتين، شدة الضوء المنعكس أو المنكسر بالنسبة لشدة الضوء الوارد والتأكد من مبدأ انحفاظ الطاقة

$$\frac{I_r}{I_i} + \frac{I_t}{I_i} = 1$$

حيث r و t تشيران إلى الانعكاس والانتقال إلى الوسط الانكساري.

لنفسر أخيراً بالشروط على الحدود ظاهرة الانعكاس الكلي عند الانتقال من وسط 1 معامل انكساره n_1 إلى وسط 2 معامل انكساره $n_2 < n_1$، الانتقال من الزجاج إلى الهواء على سبيل المثال، لدينا من (4.15)

$$\sin i = \frac{n_2}{n_1}\sin r < \sin r$$

تبلغ i قيمة حدية من أجل $\sin r = 1$ يستحيل عندها الانتقال من الوسط الأول إلى الوسط الثاني

$$\frac{n_1}{n_2}\sin i_C = 1$$

ترينا العلاقة '(4.14) عندما نكتب $k = \frac{\omega n_1}{C}$ و $k_y = k\sin i$ أن

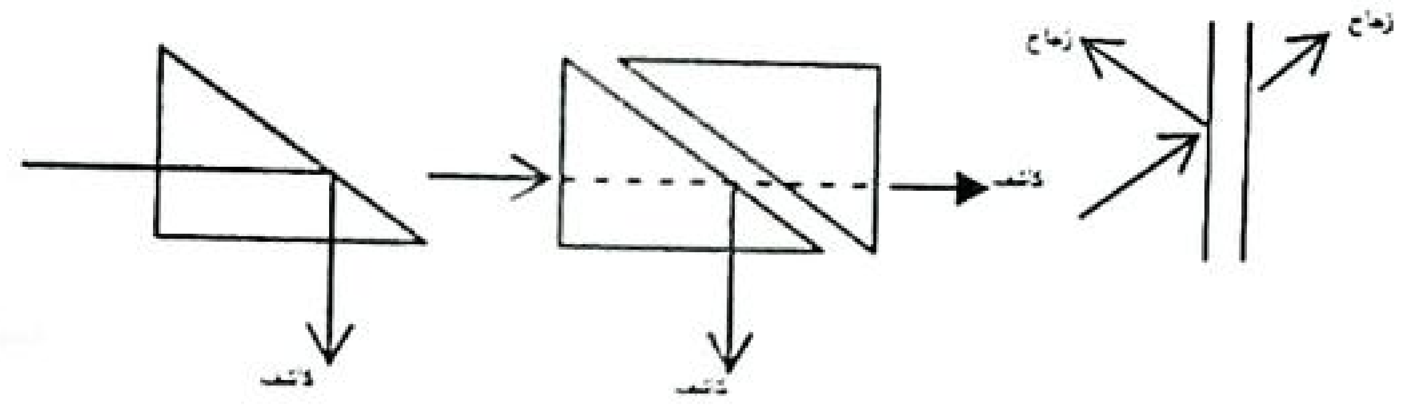
$$k_x''^2 = k^2 \frac{n_2^2}{n_1^2} - k_y^2 = \frac{\omega^2}{C^2} n_1^2 \left(\frac{n_2^2}{n_1^2} - \sin^2 i \right)$$

$$= \frac{\omega^2}{C^2} n_2^2 \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 i \right)$$

فإذا كان $\frac{n_1}{n_2}\sin i$ أكبر من الواحد فإن $k_x''^2$ سالب و k_x'' تخيلي بحت، k_1، يدخل في الحقل الكهربائي E_t كدالة أسية متناقصة

$$E_t = E_0'' e^{-k_1 x} e^{i(\omega t - k_y y)}$$

مما يعني أن الحقل في الوسط الثاني يتناقص بسرعة ولا ينتشر بشكل محسوس إلا على مسافة يحددها معامل الامتصاص $\lambda_2 = \frac{1}{k_1} \sim \varepsilon$ حيث λ_2 طول الموجة في الوسط 2، إنها طول الموجة في الخلاء الخاوي عندما يكون الوسط 2 هو الهواء. لنفرض أننا قربنا وسطاً زجاجياً إلى مسافة أقل من ε من الوسط الزجاجي الأول فإن الموجة تتابع انتشارها رغم هذا الفراغ الصغير بين الوسطين. إلا أنه يصعب رؤية هذا المفعول في تجربة ضوئية لصغر المسافة التي هي بحدود طول الموجة. لذا تجرى باستعمال أمواج ميكروية (سنتمترية) توجه عمودياً على موشور قائم من البارافين زاويته 45°، الشكل.26. تنعكس هذه الأشعة كلياً لأن الزاوية الحدية للبارافين هي 41,5° درجة وهذا ما يبينه الكاشف



الشكل.26

ولكننا إذا وضعنا موشوراً آخراً لا يلتصق بالأول على محوره بل يبتعد عنه بضع سنتمترات فإن قسماً من الأمواج ينعكس والقسم الآخر ينتقل إلى الموشور الآخر كما يظهر الكاشفان. هذه التجربة أسهل بكثير من تلك التي تجري بالأشعة الضوئية حيث أحد الموشورين محدب وبين الموشورين المتماسين زاوية تحدب صغيرة أبعادها أبعاد الموجة الضوئية.

3.4– الانعكاس التام عن سطح معدني

إن ما يميز المعادن هو وجود قسم تخيلي كبير لمعامل الانكسار يجعلنا نهمل قسمه الحقيقي. سنكتب إذاً معامل الانكسار على سطح المعدن على الشكل $n_2 = -in_1$ ولندرس انعكاس الضوء الوارد من وسط

غازي، الهواء، حيث معامل الانكسار $n_1 = 1$ في حالة الورود الناظمي $\cos i = 1$، إن سطح المعدن سطح متساوي الكمون والحقل الكهربائي عمودي عليه في كل الأحوال و $\cos r = 1$. لدينا من (4.20)

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{1 + in_1}{1 - in_1}$$

ونسبة شدة الشعاع المنعكس إلى شدة الشعاع الوارد هي حسب (4.22) العدد العقدي مضروباً بمرافقه

$$\frac{I_r}{I_i} = \left|\frac{1 + in_1}{1 - in_1}\right|^2 = \frac{1 + n_1^2}{1 + n_1^2} = 1 \qquad (4.31)$$

وهكذا، وبفرض معامل الانكسار تخيلياً بحتاً، فإن المعدن يعكس الإشعاع الوارد انعكاساً تاماً وهو أمر غير محقق عملياً إذ لا يحوز إهمال القسم الحقيقي لمعامل الانكسار. هذا من جهة، وقد رأينا من جهة أخرى أن امتصاص الإشعاع، في تواتر معين، متناسب مع القسم التخيلي لمعامل الانكسار. هذا يعني أنه بقدر ما يكون المعدن قادراً على امتصاص أشعة ذات تواتر ما بقدر ما يعكسها على سطح المعدن ولا يتيح إلا لجزء صغير منها اجتياز السطح ليمتص على مسافات قصيرة، أعطينا معياراً لها هو سمك القشرة (3.28) الكبير في حالة التواترات المنخفضة لتناسبه مع $\omega^{-1/2}$، وهذا ما يفسر لمعان المعادن عندما تعكس الأشعة المرئية. يمكن التحقق من العلاقة بين الامتصاص والانعكاس بتجربة سهلة تطلى فيها صفيحة من الزجاج بالحبر الأحمر وتترك لتجف، ثم تضاء على وجهها بإشعاع أبيض، تمتص الصفيحة اللون الأخضر ولا تنقل إلى الطرف الآخر إلا اللون الأحمر وتعكس في الوقت نفسه اللون الأخضر.

يمكن في حالة المعادن تعيين R_p و R_S كما في (4.23) و(4.25) على أن نلاحظ أن معامل الانكسار عدد عقدي، نكتبه على الشكل $n(1 + iX)$. يعني ذلك أن زاوية الانكسار r عقدية أياً كانت زاوية الورود

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n(1 + iX) \qquad (4.32)$$

تصبح النسبتان R_p و R_S عقديتين كذلك وتأخذ الشكل

$$R_p = \frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)} = |R_p| e^{i\gamma}$$
$$R_S = \frac{tg(i - r)}{tg(i + r)} = |R_S| e^{i\delta} \qquad (4.33)$$

حيث γ و δ طوران مختلفان عن الصفر وعن بعضهما.

إن النسبة بين زاويتي الورود والانكسار في حال الورود القريب من الناظمي هي

$$i = rn(1 + iX)$$

وضع هذا المقدار في (4.33) يرينا أن

$$R_p = \frac{n - 1 + inX}{n + 1 + inX} = -R_S$$

غازي، الهواء، حيث معامل الانكسار $n_1 = 1$ في حالة الورود الناظمي $\cos i = 1$، إن سطح المعدن سطح متساوي الكمون والحقل الكهربائي عمودي عليه في كل الأحوال و $\cos r = 1$. لدينا من (4.20)

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{1 + in_1}{1 - in_1}$$

ونسبة شدة الشعاع المنعكس إلى شدة الشعاع الوارد هي حسب (4.22) العدد العقدي مضروباً بمرافقه

$$\frac{I_r}{I_i} = \left|\frac{1 + in_1}{1 - in_1}\right|^2 = \frac{1 + n_1^2}{1 + n_1^2} = 1 \qquad (4.31)$$

وهكذا، وبفرض معامل الانكسار تخيلياً بحتاً، فإن المعدن يعكس الإشعاع الوارد انعكاساً تاماً وهو أمر غير محقق عملياً إذ لا يجوز إهمال القسم الحقيقي لمعامل الانكسار. هذا من جهة، وقد رأينا من جهة أخرى أن امتصاص الإشعاع، في تواتر معين، متناسب مع القسم التخيلي لمعامل الانكسار. هذا يعني أنه بقدر ما يكون المعدن قادراً على امتصاص أشعة ذات تواتر ما بقدر ما يعكسها على سطح المعدن ولا يتيح إلا لجزء صغير منها اجتياز السطح ليمتص على مسافات قصيرة، أعطينا معياراً لها هو سمك القشرة (3.28) الكبير في حالة التواترات المنخفضة لتناسبه مع $\omega^{-1/2}$، وهذا ما يفسر لمعان المعادن عندما تعكس الأشعة المرئية. يمكن التحقق من العلاقة بين الامتصاص والانعكاس بتجربة سهلة تطلى فيها صفيحة من الزجاج بالحبر الأحمر وتترك لتجف، ثم تضاء على وجهها بإشعاع أبيض، تمتص الصفيحة اللون الأخضر ولا تنقل إلى الطرف الآخر إلا اللون الأحمر وتعكس في الوقت نفسه اللون الأخضر.

يمكن في حالة المعادن تعيين R_p و R_S كما في (4.23) و(4.25) على أن نلاحظ أن معامل الانكسار عدد عقدي، نكتبه على الشكل $n(1 + iX)$. يعني ذلك أن زاوية الانكسار r عقدية أياً كانت زاوية الورود

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n(1 + iX) \qquad (4.32)$$

تصبح النسبتان R_p و R_S عقديتين كذلك وتأخذ الشكل

$$R_p = \frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)} = |R_p| e^{i\gamma} \qquad (4.33)$$

$$R_S = \frac{\mathrm{tg}(i - r)}{\mathrm{tg}(i + r)} = |R_S| e^{i\delta}$$

حيث γ و δ طوران مختلفان عن الصفر وعن بعضهما.

إن النسبة بين زاويتي الورود والانكسار في حال الورود القريب من الناظمي هي

$$i = rn(1 + iX)$$

وضع هذا المقدار في (4.33) يرينا أن

$$R_p = \frac{n - 1 + inX}{n + 1 + inX} = -R_S$$

وبالتالي فإن شدة الضوء المنعكس هي

$$|R|^2 = \frac{(n-1)^2 + n^2X^2}{(n+1)^2 + n^2X^2} = 1 - \frac{4n}{(n+1)^2 + n^2X^2} \tag{4.34}$$

ترينا العلاقة (3.27) أن معامل انكسار المعدن الناقل الكامل للكهرباء $\infty \leftarrow \sigma \quad \infty \leftarrow n$، الحد الثاني يساوي الصفر في (4.34) والمعدن الناقل الكامل للكهرباء عاكس تام للأمواج الكهرطيسية.

الفصل السادس

الضوء

1- التداخل.......................... 279
2- الانعراج.......................... 294
3- الضوء الهندسي.......................... 324

الفصل السادس: الضوء

1. التداخل

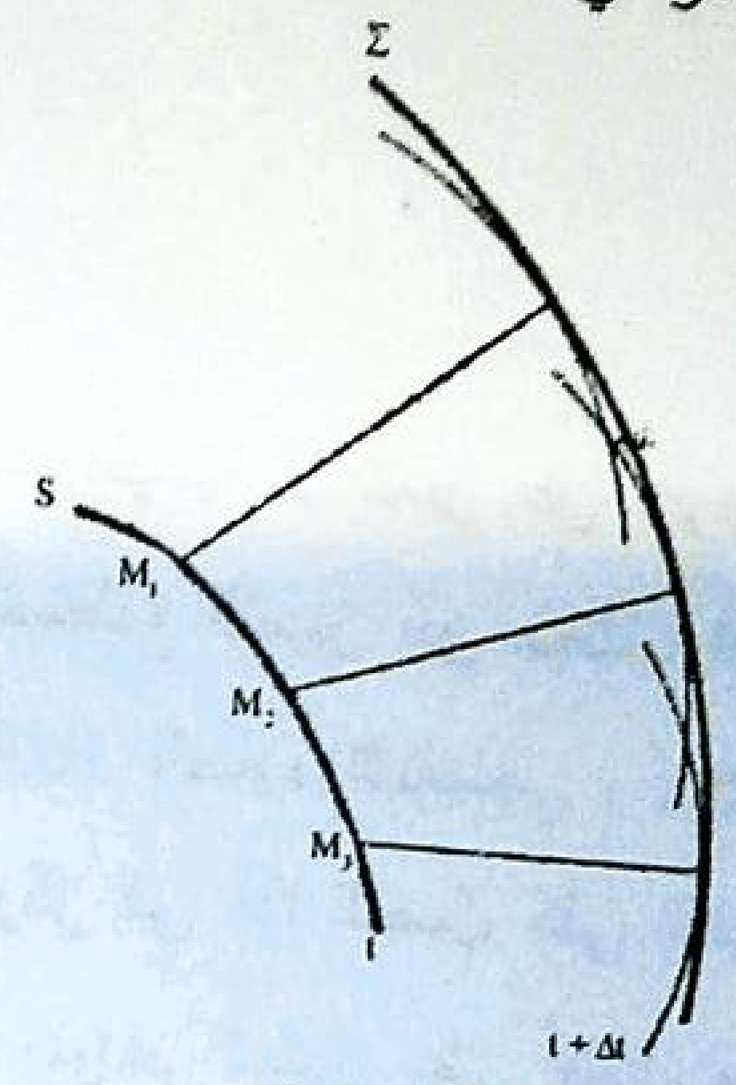
1.1- سرعة الزمرة وسرعة الطور

تبين لنا من معادلات ماكسويل أن الضوء هو جملة من الأمواج الكهرطيسية لا تتميز عن غيرها إلا بمفعولها على شبكية العين. تتأثر الشبكية بحقل الموجة الكهربائي وتستطيع التمييز بين مختلف أطوال الموجة، مختلف الألوان، الواقعة في مجال محدود جداً – بين $3000\,\mathring{A}$ للضوء البنفسجي و $7000\,\mathring{A}$ للضوء الأحمر – هو مجال الضوء المرئي $\left[3.10^{-7} - 7.10^{-7}m\right]$. سنركز في هذا الفصل على الظواهر التي تقع في هذا المجال من أطوال الموجة، الظواهر الضوئية وهي ظواهر تنطبق على أطوال موجة أصغر بكثير من أطوال الموجة الضوئية كالأشعة السينية ومن بعدها أشعة غاما، $1\mathring{A}$ كحد أقصى لها، أو أكبر بكثير منها كأمواج الراديو المترية $(1 - 2000\ M)$. ولكنها تختفي عندما تبلغ أطوال الموجة قيماً كبيرة جداً – بضعة آلاف من الكيلومترات – كما سنرى في دراسة التيارات المتناوبة حيث يبلغ طول الموجة $6000\ km$.

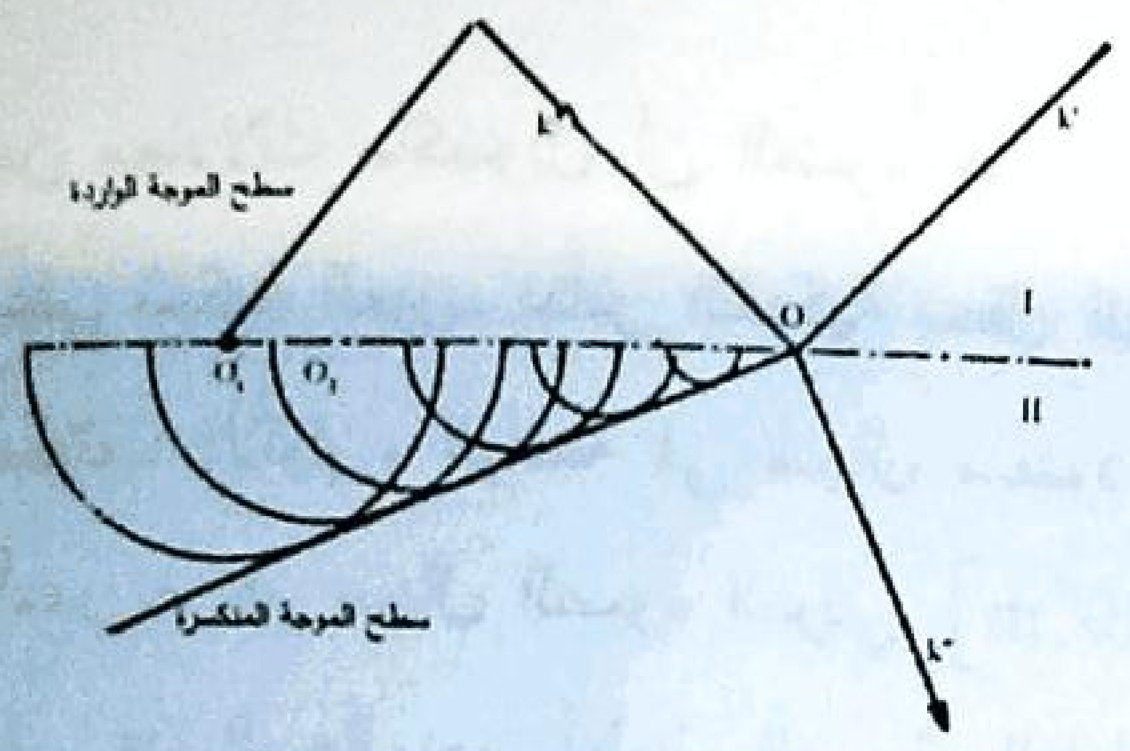
نميز الموجة بطولها λ أو بترددها $\nu = \frac{\lambda}{c}$ وهو عدد الدورات في الثانية، $\nu = \frac{1}{T}$ ووحدته الهرتز Hertz وهكذا فتردد التيار المتناوب هو 50 هرتز وتردد الأشعة السينية بحدود 10^{18} وتردد الضوء المرئي بحدود 10^{15} هرتز.

نعلم أن مفهوم الحقل يعني تغير خواص الفضاء شيئاً فشيئاً مع الزمن، أن معرفة الحقل في نقطة ولحظة معينتين $(\vec{r}, t)$ تحدد بفضل المعادلات التفاضلية قيميه في كل النقاط المجاورة $(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t)$ وبالتالي السطح الذي يصل إليه الحقل في اللحظة المعينة $t + \Delta t$. إن سطح الموجة، سطح الحقل الكهربائي هو سطح كرة عندما تنتشر الأمواج في وسط متجانس ومتناحي : الفضاء الخاوي، وهو سطح مستو في النقاط البعيدة جداً عن مصدر الإشعاع، الشحنات المتحركة والتيارات المتغيرة. تتعين نقاط السطح الذي تصل إليه الموجات في اللحظة $t + \Delta t$ بأن نقابل كل نقطة من سطح اللحظة t بنقطة يعينها جداء غراديان الحقل في النقطة الأولى بـ Δt أو، بتعبير آخر، بأن نرسم كرة صغيرة مركزها النقطة الأولى ونصف قطرها $\vec{\nabla}E\ \Delta t$، الشكل.1a، حيث سطح الموجة Σ الناتج عن سطح الموجة S كمغلف للكرات الصغيرة الناتجة عن مختلف نقاط السطح S: M_1، M_2، M_3. كما يبين، الشكل.1b، الكرات الصغيرة الناتجة عن سطح الموجة المستوية S عند التقائها بالسطح الفاصل بين وسطين I و II في النقاط O_1'،

السابقة للقائه به في النقطة O واللحظة t. إن سطح الموجة Σ في اللحظة t هو مغلف الكرات ذات أنصاف الأقطار $0 < \dots v(t_3 - t), v(t_2 - t), v(t_1 - t)$ في اللحظات $t < \dots t_3 < t_2 < t_1$ ،O'_2 ،O'_3... حيث v هي سرعة الموجة في الوسط II ويعين الشعاع المنكسر في هذا الوسط.



الشكل.1a



الشكل.1b

هذا هو محتوى المبدأ الذي وضعه هويغنز، مؤسس النظرية الموجية، عام 1678، قرنين تقريباً قبل فارادي وماكسويل. يعطي بروها Bruhat[1] النص التالي لهذا المبدأ :

تتطابق الاهتزازات المنتشرة خارج سطح مغلق يحتوي المنبع (المصدر) مع الاهتزازات التي نحصل عليها بحذف المنبع واستبداله بمنابع موزعة بشكل مناسب على كل السطح S.

وضح فرينيل Fresnel هذا المبدأ وتممه عام 1818 على النحو التالي :

يمكن اعتبار أي نقطة M من سطح Σ بلغه الضوء كمنبع ثانوي يصدر موجة كروية سعتها وطورها هما سعة وطور الموجة الواردة في النقطة M.

لنكتب الحقل الكهربائي على الشكل

$$E = Ae^{i(\omega t + \varphi)} \qquad (1.1)$$

حيث A سعة الحقل، المتناسبة مع $\frac{1}{r}$ عندما تكون الموجة كروية والثابتة عندما تكون الموجة مستوية؛ طاقة الحقل متناسبة مع A^2 وتسمى شدة الضوء هنا. والطور $\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r}$ هو $\frac{2\pi r}{\lambda}$ في حالة الموجة المستوية. لنلاحظ منذ الآن أنه يستحيل رصد موجة وحيدة، أي موجة بطول موجة λ محدد تماماً، لأن ذلك يتعارض مع المبدأ الأساسي، مبدأ اللاتحديد، الذي يقوم الميكانيك الكمومي عليه، كما سنرى في المجلد القادم تقع الموجة في مجال تردد تعينه علاقة اللاتحديد بين الزمن والطاقة، يرمز له بـ Δv

1 G. Bruhat, cours de Physique Générale : Optique §36.

ويسمى عرض الطيف أشرنا إليه في الفصل الرابع ووجدنا أن $\Delta\nu \sim 10^{-14}$ متراً. وسنرى في هذا الفصل أيضاً أن سرعة انتشار الضوء في وسط ما هي $\frac{c}{n}$ حيث n معامل انكسار الوسط، وهو مقدار يأخذ قيماً أصغر من الواحد في بعض المواد. وبالتالي فإن رصد موجة وحيدة تنتشر بسرعة أكبر من سرعة الضوء يتعارض مع مبدأ النسبية الخاصة : إن الأمواج القابلة للرصد هي مجموعة أمواج أطوال موجاتها متقاربة، هي قطار أمواج تنتشر بسرعة مختلفة عن سرعة الموجة الوحيدة، c، غير القابلة للرصد. يطلق على سرعة قطار الأمواج اسم سرعة الزمرة لتمييزها عن السرعة c الداخلة في تعريف الطور $\varphi = \frac{2\pi r}{\lambda} = \frac{2\pi r}{cT}$ والمسماة سرعة الطور. نعين قطار الأمواج بدليل متجهات الموجة المجاورة للمتجهة $\vec{k}_0$، المقابلة لطول الموجة λ_0 وننشر التواتر (السرعة الزاوية) ω بدليل المتغير $\vec{k}$ في جوار $\vec{k}_0$

$$\omega(\vec{k}) = \omega(\vec{k}_0) + \frac{\partial\omega}{\partial k_x}\Delta k_x + \frac{\partial\omega}{\partial k_y}\Delta k_y + \frac{\partial\omega}{\partial k_z}\Delta k_z$$

نسمي ω_0 التواتر المقابل لـ $\vec{k}_0$ $\omega_0 = \omega(\vec{k}_0)$ ونكتب الحدود التالية بدليل غراديان ω: $\vec{\nabla}\omega = \frac{d\omega}{d\vec{k}}$

$$\omega(\vec{k}) = \omega_0 + \frac{d\omega}{d\vec{k}}\Delta\vec{k}$$

$$\omega(\vec{k}) = \omega_0 + \frac{d\omega}{d\vec{k}}(\vec{k} - \vec{k}_0) \qquad (1.2)$$

نرمز لسعة الموجة المعينة بمتجهة الموجة $\vec{k}$ بـ $F(\vec{k})$ ونكامل على كل المتجهات $\vec{k}$ بين $-\infty$ و $+\infty$ للحصول على الموجة الكلية، على تكامل فوريي لموجة ما ε

$$\varepsilon(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\vec{k}) e^{i\left\{\left[\omega_0 + \frac{d\omega}{d\vec{k}}(\vec{k} - \vec{k}_0)\right]t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right\}} d\vec{k}$$

نضيف ونحذف $\vec{k}_0 \cdot \vec{r}$ في الحد الثاني من الأس لنخرج الموجة المركزية $e^{i(\omega_0 t - \vec{k}_0\cdot\vec{r})}$ خارج التكامل

$$\varepsilon(\vec{r}, t) = e^{i(\omega_0 t - \vec{k}_0\vec{r})} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\vec{k}) e^{i(\vec{k} - \vec{k}_0)\left(\frac{d\omega}{d\vec{k}}t - \vec{r}\right)} \qquad (1.3)$$

لا يختلف $F(\vec{k})$ في هذا النشر عن الصفر إلا في المجال الضيق الذي عيناه حول $\vec{k}_0$، $\vec{k}_0 \pm \Delta\vec{k}$ والتكامل في هذا المجال دالة نرمز لها بـ $\mathcal{F}$ تابعة للمقدار $\left(\frac{d\omega}{d\vec{k}}t - \vec{r}\right)$

$$\varepsilon(\vec{r}, t) = e^{i(\omega_0 t - \vec{k}_0\vec{r})} \mathcal{F}\left(\frac{d\omega}{d\vec{k}}t - \vec{r}\right)$$

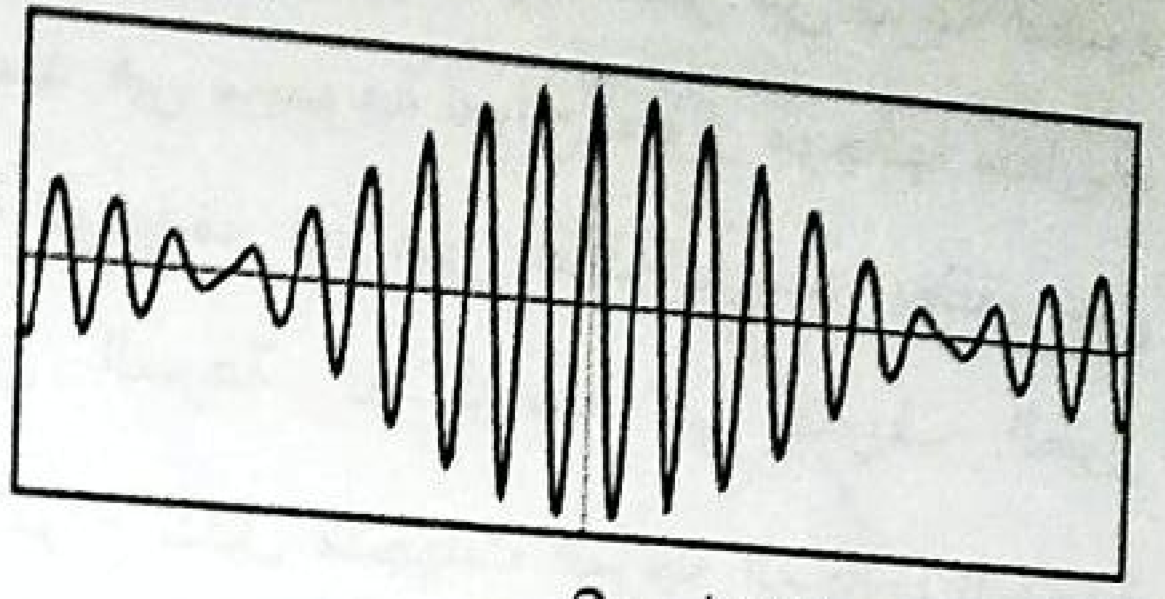
و $\mathcal{F}$ دالة موجية من الشكل المألوف سرعتها $\frac{d\omega}{d\vec{k}}$ هي سرعة الزمرة، الشكل.2a

$$\vec{V}_g = \vec{\nabla}\omega(\vec{k}) = \frac{d\omega}{d\vec{k}} \qquad (1.4)$$

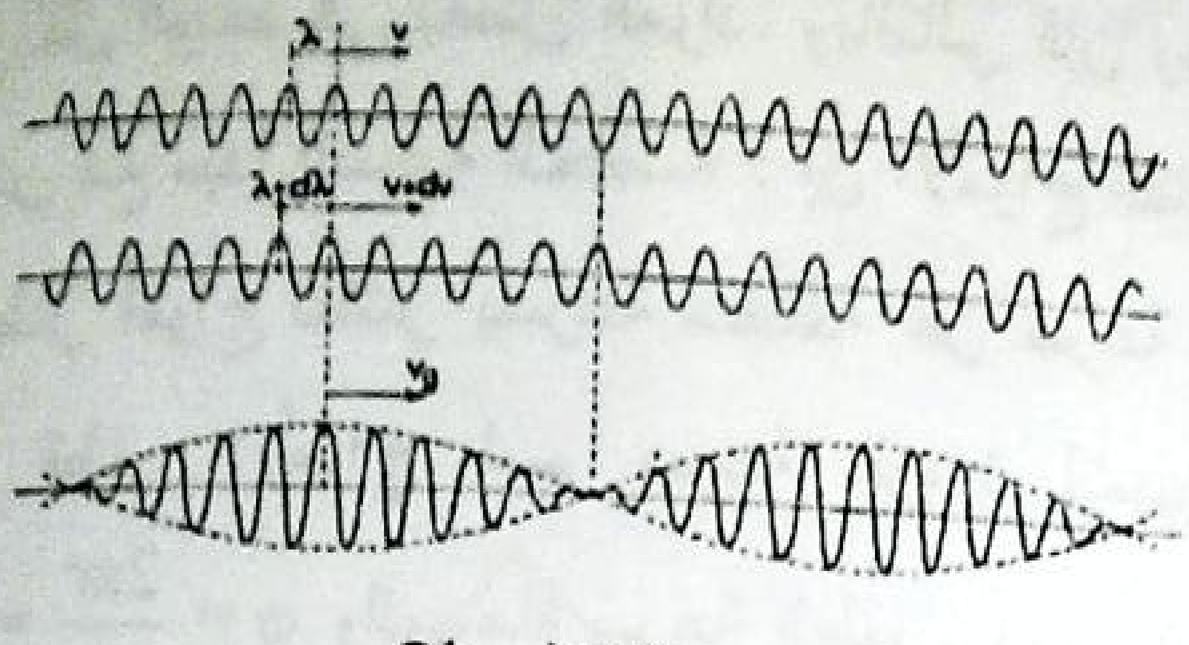
أما سرعة الطور ذات القيمة المطلقة c فهي

$$\vec{V}_\phi = \frac{\omega}{\vec{k}} \qquad (1.5)$$

، V_ϕ تغطيها موجة مستوية تسير بسرعة V_g وهكذا فإن الموجة (1.3) مؤلفة من موجة تسير بسرعة الشكل.2a، لا يظهرها الشكل. يوضح، الشكل. 2b، سرعة الزمرة الناتجة عن توضيع موجتين بطولين متجاورين



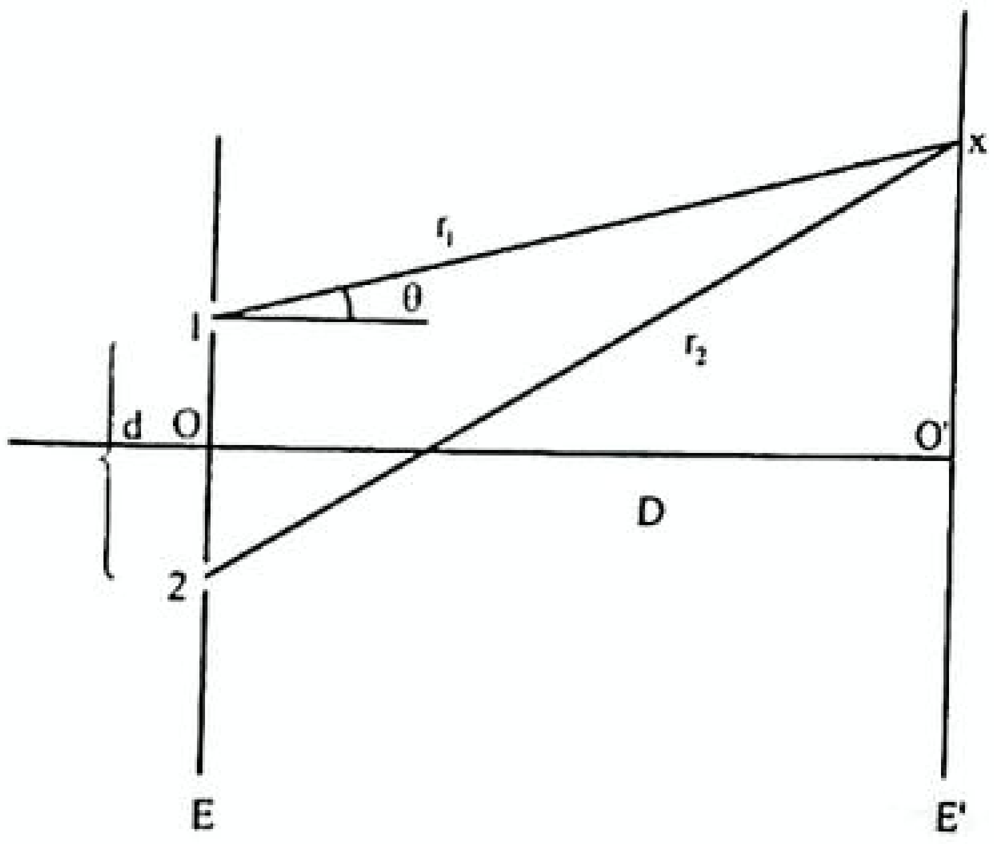
الشكل.2a



الشكل.2b

2.1- تجربة يونغ

إنها التجربة التي بينت الطابع الموجي للضوء عام 1803، كما تصوره هويغنز وأثبته ماكسويل. يرد الضوء من ثقبين صغيرين، مهملي الأبعاد في حاجز E إلى حاجز آخر 'E موازٍ لـ E يبعد عنه مسافة D كبيرة جداً بالنسبة للمسافة d الفاصلة بين الثقبين، ونريد حساب شدة الضوء في نقطة ما x من 'E تبعد عن الثقبين المسافة r_1 و r_2 على الترتيب، الشكل.3.



الشكل.3

ليكن ε_1 و ε_2 الحقلين في النقطة x ولتكن A_1 و A_2 سعتيهما، ونفرض أن للحقلين نفس التواتر، والحقل في x هو توضيع هذين الحقلين، نفرضهما متوازيين ولهما نفس الاستقطاب:

$$\varepsilon = Ae^{i(\omega t-\varphi)} = A_1e^{i(\omega t-\varphi_1)} + A_2e^{i(\omega t-\varphi_2)} \quad (1.6)$$

حيث

$$\varphi_1 = \frac{2\pi r_1}{\lambda} \quad و \quad \varphi_2 = \frac{2\pi r_2}{\lambda} \quad (1.7)$$

لدينا

$$A^2 = |\varepsilon|^2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\left(\overline{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right)$$

حيث العارضة ترمز للعقدي المرافق

$$= A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2\left(e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)}\right)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (1.8)$$

ولدينا في الحالة الخاصة عندما تكون سعة الموجة ذاتها للحقلين ε_1 و ε_2، نرمز لها بـ A_1

$$A^2 = 2A_1^2\left(1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\right) = 4A_1^2\cos^2\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \quad (1.9)$$

نحسب طور الموجة الحصيلة ε

$$Ae^{i\varphi} = A_1e^{i\varphi_1} + A_2e^{i\varphi_2}$$

بأن نكتب

$$tg\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}} = \frac{A_1e^{i\varphi_1} + A_2e^{i\varphi_2} - A_1e^{-i\varphi_1} - A_2e^{-i\varphi_2}}{A_1e^{i\varphi_1} + A_2e^{i\varphi_2} + A_1e^{-i\varphi_1} - A_2e^{-i\varphi_2}}$$

$$= \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \quad (1.10)$$

ولدينا هنا في الحالة الخاصة التي تتساوى فيها السعتان $A_1 = A_2$

$$tg\varphi = \frac{\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2}{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2} \quad (1.11)$$

سنفرض أن للموجتين الواردتين من الثقبين 1 و 2 نفس المصدر، المنبع S الواقع على نفس البعد عنهما وأن لهما بالتالي نفس السعة ونفس الطور على الحاجز E. لكن هذا الطور سيختلف في النقطة x على الحاجز 'E نظراً لاختلاف الطريق بين r_1 و r_2. لدينا

$$r_1^2 = D^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2$$

$$r_2^2 = D^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2$$

نكتبهما معاً على الشكل

$$r_{1,2} = D\left(1 + \left(\frac{x \mp d/2}{D}\right)^2\right)^{1/2} \quad (1.12)$$

حيث إشارة ناقص لـ r_1 وإشارة + لـ r_2. سنقبل أن d و x صغيران أمام المسافة D بين الحاجزين بحيث نستطيع الاكتفاء بالحدين الأولين في نشر الجذر في (1.12) $x \mp d/2 \ll D$

$$r_{1,2} = D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x \mp d/2}{D}\right)^2\right)$$

وبالتالي فإن فرق الطريق بين سطحي الموجة في النقطة x هو

$$r_2 - r_1 = \frac{1}{2D}\left[\left(x+\frac{d}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{d}{2}\right)^2\right]$$

$$r_2 - r_1 = \frac{x\,d}{D} \qquad (1.13)$$

إن شدة الضوء أعظمية في (1.9) وتساوي $4A_1^2$ عندما يكون فرق الطور محققاً للعلاقة

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = n\pi \quad \text{أو} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

وبما أن $\varphi_2 - \varphi_1 = k(r_2 - r_1)$ حيث k طويلة متجهة الموجة (المستوية) فالشدة الأعظمية تقابل

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{x\,d}{D} = 2n\pi$$

وتقع في النقاط x المحققة للعلاقة

$$x = n\frac{\lambda D}{d} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1.14)$$

والشدة معدومة في النقاط x المحققة للعلاقة

$$x = \frac{(2n+1)}{2}\frac{\lambda D}{d} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1.15)$$

والمسافة بين نقطة ذات شدة أعظمية ونقطة ذات شدة أعظمية تليها مباشرة وهي نفس المسافة بين شدتين معدومتين متتاليتين، هي

$$i = \frac{\lambda D}{d} \qquad (1.16)$$

ترينا العلاقات السابقة، (1.13) وما تليها، أن قيم x الثابتة والمتناسبة مع $r_2 - r_1$ تقع على سطح مجسم قطع زائد وتحدد في المستوي E' خطوطاً "مستقيمة" متوازية نسميها أهداب التداخل هي بالترتيب مضيئة فمظلمة تفصلها المسافة i بين الخطين. إن الهدب المركزي المقابل لـ $x = 0$ هدب مضيء، وهو الأبعد عن بقعتي الضوء اللتين ينتجهما الضوء الهندسي الصادر عن الثقبين 1 و 2، وهذا ما يكرس الطابع الموجي للضوء ويعطي لتجربة يونغ أهميتها التاريخية.

إن اعتماد ظاهرة التداخل على فرق الطور $\varphi_2 - \varphi_1$ الناتج عن فرق الطريق $r_2 - r_1$ يفترض أن للموجتين الواردتين، إضافة إلى توازيهما واستقطابهما المشترك الذي سمح لنا بكتابة جمعهما على شكل سلمي في (1.6)، ذات الطور عند وصولهما إلى الحاجز E. إلا أنه لا وجود لطول موجة محدد تماماً : أن للتردد المقيس مجالاً سميناه عرض الطيف $\Delta\nu$. يجب ألا يتجاوز الفرق بين طول موجتيهما $\Delta\lambda$ المقدار $V_g/\Delta\nu$ وإلا لتخربت صورة التداخل. نقول عن هذا الشرط إنه شرط الاتساق الزماني بين الموجتين. إن وصول الموجتين الواردتين من ذات المنبع الضوئي يحقق شروط وقوع التداخل: ذلك أن الذرات تصدر الضوء بتردد ν عند هبوطها من مستوى طاقة E_1 إلى مستوى آخر E_2 يحددهما ميكانيك الكم ويحدد الفرق بينهما $E_1 - E_2 = h\nu$. يمكن للذرة أن تصدر 10^6 موجة قبل أن تحرض لمعاودة الإصدار. يجب إذاً تحريضها 10^9 مرة في الثانية $(\upsilon \sim 10^{15})$. إن شدة الضوء الصادرة هي القيمة الوسطية لشدة

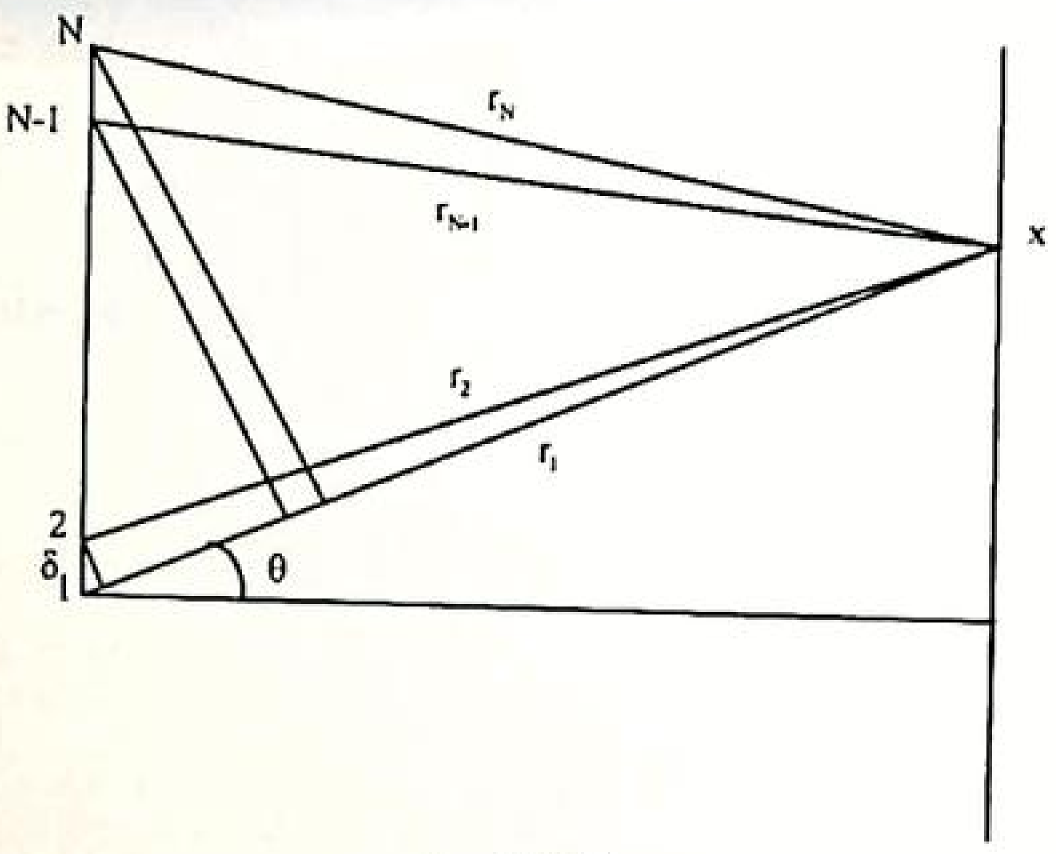
الموجات الصادرة خلال فترة زمنية، 10^{-1} ثانية، هي فترة تأثر العين بالضوء. هذا في حين يختفي الحد المسؤول عن التداخل في (1.8) عندما تأخذ القيمة الوسطية الناتجة عن نقطتين - منبعين مختلفين.

لنلاحظ أن ظاهرة التداخل في تجربة يونغ – الطابع الموجي للضوء – تبين انحراف الضوء عن اتجاهه المستقيم، عن انعراجه؛ فهي من وجهة النظر هذه انعراج للضوء، إلا أن العادة جرت على إطلاق اسم الانعراج على ظواهر تختلف عن ظاهرة التداخل بواسطة ثقبين، نقطتين لا أبعاد لهما، لا وجود حقيقي لهما. فالظاهرة هي الدراسة الواقعية لتداخل الموجات الناتجة عن فتحتين نتصورهما في تقريب أولي على شكل شقين طولانيين عرضهما مهمل، طول الواحد منهما a. ونتصور الفتحة على شكل نقاط متجاورة عددها N تفصلها بينها مسافة ثابتة δ : $N\delta = a$. إن فرق الطريق بين الموجتين الآتيتين من نقطتين متجاورتين j، $j+1$

$$r_{j+1} - r_j = \delta \sin\theta \qquad (1.17)$$

حيث θ هي الزاوية بين اتجاه r_1 ومحور التناظر 'SOO، الشكل.4، وفرق الطريق بين حافتي الشق المقابلتين للنقطتين 1 و N

$$r_1 - r_2 = (N-1)\delta \qquad (1.17)'$$



الشكل.4

سنفترض أن طول الشق a صغير بحيث يمكن انطباقه على سطح الموجة الكروية الصادرة عن المنبع S ولا فرق إذاً في الطور بين مختلف النقاط. يمكننا إذاً تعميم شروط التداخل والعلاقة (1.6) على الشكل

$$\varepsilon = A(r)\left(e^{i(\omega t - kr_1)} + \dots e^{i(\omega t - kr_N)}\right) \qquad (1.18)$$

حيث $A(r)$ هي السعة المشتركة لكل الأمواج الصادرة عن الشق. نحول هذه العلاقة بأن نكتب

$$\varepsilon = A(r)e^{i(\omega t - kr_1)}\left[1 + e^{ik(r_1 - r_2)} + \dots e^{ik(r_1 - r_N)}\right] \qquad (1.18)'$$

وبأخذ العلاقتين (1.17)، '(1.17) بعين الاعتبار

$$= A(r)e^{i(\omega t - kr_1)}\left[1 + e^{ik\delta\sin\theta} + \dots e^{ik(N-1)\delta\sin\theta}\right]$$

لكن

$$1 + x^1 + x^2 + \dots + x^{N-1} = \frac{1 - x^N}{1 - x}$$

وهكذا المقدار بين المعقوفتين هو

$$\frac{1 - e^{ikN\delta\sin\theta}}{1 - e^{ik\delta\sin\theta}} = e^{i\frac{k}{2}(N-1)\delta\sin\theta} \frac{\sin\frac{1}{2}kN\delta\sin\theta}{\sin\frac{1}{2}k\delta\sin\theta}$$

حيث أخرجنا $e^{i\frac{k}{2}N\delta\sin\theta}$ كمضروب في الصورة و $e^{i\frac{k}{2}\delta\sin\theta}$ كمضروب في المخرج. لدينا إذاً

$$\varepsilon = A(r)e^{i\left[(\omega t - kr_1) + \frac{k}{2}(N-1)\delta\sin\theta\right]} \frac{\sin\frac{1}{2}kN\delta\sin\theta}{\sin\frac{1}{2}k\delta\sin\theta} \qquad (1.19)$$

إن شدة الضوء الناتجة عن الشق في النقطة x التي تبعد المسافة r عن وسطه هي ε^2 وتساوي

$$\varepsilon^2 = \left[A(r)\frac{\sin\frac{1}{2}kN\delta\sin\theta}{\sin\frac{1}{2}k\delta\sin\theta}\right]^2 \qquad (1.20)$$

يتناهى المقدار $N\delta$ إلى a عندما يتناهى عدد النقاط إلى اللانهاية ويتناهى معه المقدار $\varphi = Nk\delta\sin\theta$ إلى $ak\sin\theta$:

$$\varphi = Nk\delta\sin\theta \underset{N\to\infty}{\rightarrow} ak\sin\theta \qquad (1.21)$$

إن $\frac{\varphi}{N}$ مقدار صغير جداً و

$$\frac{1}{2}k\delta\sin\theta = \sin\frac{1}{2}\frac{\varphi}{N} = \frac{1}{2}\frac{\varphi}{N}$$

وهكذا فالمخرج في (1.19) هو $\frac{1}{2}\frac{\varphi}{N}$ ويأخذ الحقل الكهربائي الكلي (1.19) الشكل التالي

$$\varepsilon = NA(r)e^{i\left[(\omega t - kr_1) + \frac{k}{2}a\sin\theta\right]} \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\frac{\varphi}{2}} \qquad (1.22)$$

تتناهى السعة $NA(r)$ نحو مقدار منته وثابت A_1، هي سعة الحقل الكهربائي الناتج عن سطح الموجة المماس للشق وبالتالي فإن شدة الضوء الناتج عن الشق a هي

$$A_1^2\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\frac{\varphi}{2}}\right)^2$$

أي أننا استبدلنا بالشدة A_1^2 الناتجة عن الثقب مقداراً أصغر منها. وهكذا فإن التداخل الناتج عن شقي يونغ بالعودة إلى (1.9) هو

$$A^2 = 4A_1^2 \left(\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\frac{\varphi}{2}} \right)^2 \cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$$

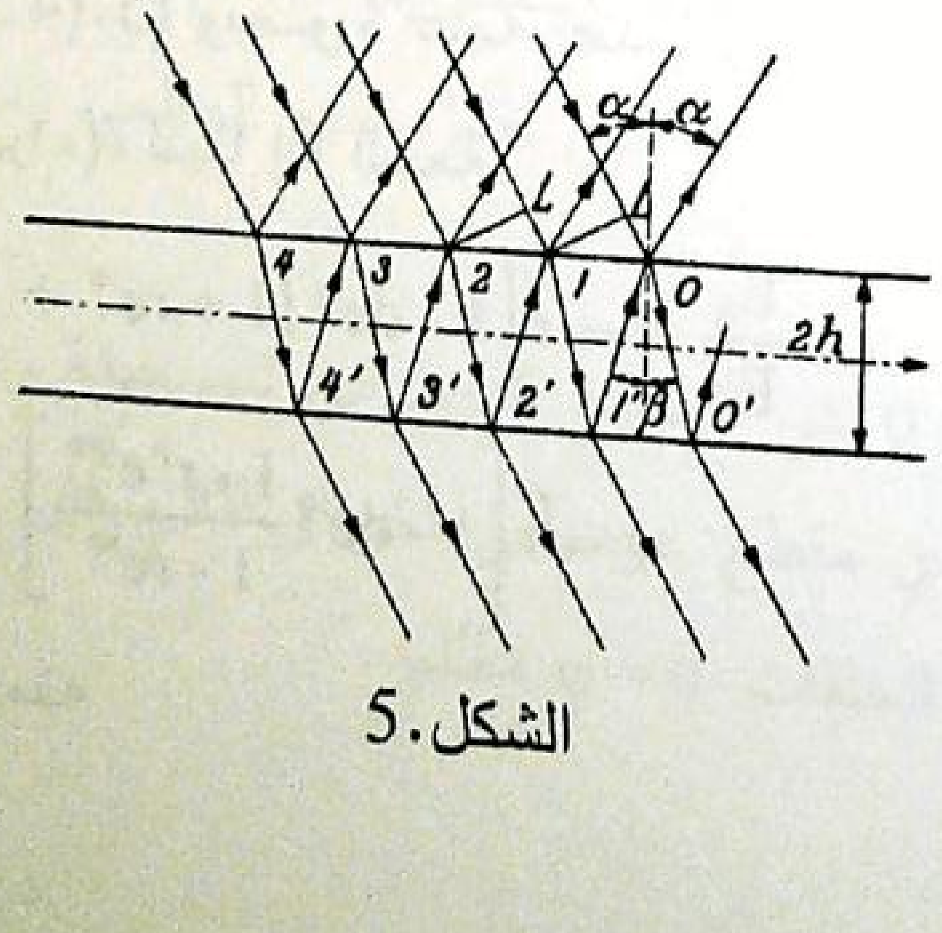
حيث حسب (1.16)

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \frac{k(r_1 - r_2)}{2} = \frac{k}{2}\frac{x\,d}{D} = \frac{\pi x}{i}$$

3.1- التداخل في الصفائح الدقيقة

لتكن لدينا صفيحة من الزجاج، سطحاها مستويان متوازيان وسمكها $2h$، موضوعة في الهواء وقرينة انكسارها بالنسبة للهواء (الخلاء) n. نضيء هذه الصفيحة بأشعة متوازية وحيدة اللون، طول موجتها λ، بزاوية ورود α. لنأخذ نقطة ما 0 لا على التعيين على السطح العلوي للصفيحة ولنرقم بـ 1، 2، ... الخ نقاطاً تبعد عن 0 مسافات هي أضعاف المسافة $\overline{01}$. إن الشعاع المنعكس في هذه النقطة الاعتباطية 0 هو، بالإضافة إلى الشعاع المنعكس مباشرة عليها، كل الأشعة التالية : تلك التي انعكست مرة في '1 بعد أن انكسرت في 1، والتي انعكست ثلاث مرات في الزجاج – بعد أن انكسرت في 2 – في '2، 1، '1، أو خمس مرات، بعد انكسارها في 3، في '3، 2، '2، 1، '1، الخ، الشكل.5، وهكذا فالشعاع الذي يبرز في النقطة الاعتباطية 0 على السطح العلوي هو سلسلة من الأشعة التي انكسرت مرتين وانعكست عدداً فردياً من المرات. هذا في حين تتكون الأشعة التي انتقلت عبر الوجه السفلي للصفيحة في النقطة '0 التي وصل إليها الشعاع المنكسر في 0 من سلسلة الأشعة التي انكسرت، هي أيضاً، مرتين ولكنها انعكست عدداً زوجياً من المرات. لنركز انتباهنا على الوجه العلوي ولنحسب فرق الطريق بين الشعاعين الواردين في 0 و 1 والمنعكسين في 0. إن فرق الطريق هذا، كما يظهر، الشكل.5، هو $11'0$ ناقص OL.

إن $r_0 = \overline{OL} = \overline{10}\sin\alpha = 4htg\beta\sin\alpha$ حيث β هي زاوية الانكسار و $r_1 = 2 \times \frac{2h}{\cos\beta}$



الشكل.5

وفرق الطور بينهما هو

$$\varphi_1 - \varphi_0 = k_1 \cdot r_1 - k \cdot r_0 = k(nr_1 - r_0)$$

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{2\pi n}{\lambda} = nk$$

حيث λ_g هي طول الموجة في الزجاج : $\frac{\lambda_g}{\lambda} = \frac{v}{c} = \frac{1}{n}$ ، v سرعة الضوء في الزجاج لدينا إذاً

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_0 = \frac{4nkh}{\cos\beta}\left(1 - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{n}\right)$$

لكن $\sin\alpha = n\sin\beta$، ومنه

$$\varphi = 4nkh\cos\beta \quad (1.23)$$

إن فرق الطور بين الشعاع الوارد إلى 0 من '2 : 22'11'0 والشعاع المنعكس في 0 هو 2φ، ثم 3φ، الخ. وهكذا فإن متجهات الحقل (الكهربائي) المتتالية، اعتباراً من 1، متناسبة مع $e^{i\varphi}$، $e^{2i\varphi}$، $e^{3i\varphi}$، الخ؛ لا نأخذ التغيرات الزمنية $e^{i\omega t}$ لهذا الحقل بعين الاعتبار. نرمز لنسبة سعة الحقل المنعكس إلى سعة الحقل الوارد بـ $\sqrt{r} = \frac{E_0'}{E_0}$ (r شدة الضوء المنعكس) ولنسبة الحقل المنكسر إلى الحقل الوارد بـ $\sqrt{d} = \frac{E_0''}{E_0}$ (d الشدة في الوسط الثاني)؛ وسنفرض أن هاتين النسبتين لا تتغيران في الانتقال من الوسط الأول إلى الثاني (السطح العلوي) إلى الانتقال من الوسط الثاني إلى الأول (السطح السفلي). وهكذا فإن سعة هذه المتجهات هي: $\sqrt{r}\,d$ انعكاس واحد في الزجاج في '1 يقابله $\sqrt{r}$ وانكسارين في 1 و 0 يقابلهما d، هذا من أجل الشعاع الوارد من 1، ومن أجل الشعاع الوارد من 2، فهي $\sqrt{r}\,r\,d$ تقابل الانعكاس ثلاث مرات والانكسار مرتين، ثم $\sqrt{r}\,r^2\,d$ التي تقابل الانعكاس خمس مرات والانكسار مرتين، الخ.

وهكذا فمجموع الأشعة المنعكسة في 0 والناتجة عن النقاط 1، 2 ... p هو

$$\sqrt{r}e^{i\varphi}d + \sqrt{r}re^{2i\varphi}d + \dots \sqrt{r}r^{p-1}e^{pi\varphi}d$$

علينا أن نضيف إلى هذا المجموع الحقل المنعكس مباشرة في 0. $\sqrt{r}$ ذا معامل الطور 1- (الحقل $\vec{E}$ في مستوى الورود، انظر ((4.25).5) وبصورة عامة عندما يقع الانعكاس على سطح (الزجاج) كثافته أكبر من كثافة سطح الورود (الهواء)، لدينا إذاً السعة:

$$\frac{E_0'}{E_0} = -\sqrt{r}\left[1 - de^{i\varphi}\left(1 + re^{i\varphi} + \dots + r^{p-1}e^{(p-1)i\varphi}\right)\right]$$

$$= -\sqrt{r}\left[1 - de^{i\varphi}\frac{1 - r^pe^{ip\varphi}}{1 - re^{i\varphi}}\right] \quad (1.24)$$

ثم إن $e^{ip\varphi} \underset{p\to\infty}{\to} 0$، $r + d = 1$ ومنه

وفرق الطور بينهما هو

$$\varphi_1 - \varphi_0 = k_1 \cdot r_1 - k \cdot r_0 = k(nr_1 - r_0)$$

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{2\pi n}{\lambda} = nk$$

حيث λ_g هي طول الموجة في الزجاج : $\frac{1}{n} = \frac{v}{c} = \frac{\lambda_g}{\lambda}$، v سرعة الضوء في الزجاج لدينا إذاً

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_0 = \frac{4nkh}{\cos\beta}\left(1 - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{n}\right)$$

لكن $\sin\alpha = n\sin\beta$، ومنه

$$\varphi = 4nkh\cos\beta \qquad (1.23)$$

إن فرق الطور بين الشعاع الوارد إلى 0 من '2 : 22'11'0 والشعاع المنعكس في 0 هو 2φ، ثم 3φ، الخ. وهكذا فإن متجهات الحقل (الكهربائي) المتتالية، اعتباراً من 1، متناسبة مع $e^{i\varphi}$، $e^{2i\varphi}$، $e^{3i\varphi}$، الخ؛ لا نأخذ التغيرات الزمنية $e^{i\omega t}$ لهذا الحقل بعين الاعتبار. نرمز لنسبة سعة الحقل المنعكس إلى سعة الحقل الوارد بـ $\sqrt{r} = \frac{E_0'}{E_0}$ (r شدة الضوء المنعكس) ولنسبة الحقل المنكسر إلى الحقل الوارد بـ $\sqrt{d} = \frac{E_0''}{E_0}$ (d الشدة في الوسط الثاني)؛ وسنفرض أن هاتين النسبتين لا تتغيران في الانتقال من الوسط الأول إلى الثاني (السطح العلوي) إلى الانتقال من الوسط الثاني إلى الأول (السطح السفلي). وهكذا فإن سعة هذه المتجهات هي: $\sqrt{r}\,d$ انعكاس واحد في الزجاج في '1 يقابله $\sqrt{r}$ وانكسارين في 1 و 0 يقابلهما d، هذا من أجل الشعاع الوارد من 1، ومن أجل الشعاع الوارد من 2، فهي $\sqrt{r}\,r\,d$ تقابل الانعكاس ثلاث مرات والانكسار مرتين، ثم $\sqrt{r}\,r^2\,d$ التي تقابل الانعكاس خمس مرات والانكسار مرتين، الخ.

وهكذا فمجموع الأشعة المنعكسة في 0 والناتجة عن النقاط 1، 2... p هو

$$\sqrt{r}e^{i\varphi}d + \sqrt{r}re^{2i\varphi}d + \dots \sqrt{r}r^{p-1}e^{pi\varphi}d$$

علينا أن نضيف إلى هذا المجموع الحقل المنعكس مباشرة في 0. $\sqrt{r}$ ذا معامل الطور 1- (الحقل $\vec{E}$ في مستوى الورود، انظر ((4.25).5) وبصورة عامة عندما يقع الانعكاس على سطح (الزجاج) كثافته أكبر من كثافة سطح الورود (الهواء)، لدينا إذاً السعة:

$$\frac{E_0'}{E_0} = -\sqrt{r}\left[1 - de^{i\varphi}\left(1 + re^{i\varphi} + \dots + r^{p-1}e^{(p-1)i\varphi}\right)\right]$$

$$= -\sqrt{r}\left[1 - de^{i\varphi}\frac{1 - r^p e^{ip\varphi}}{1 - re^{i\varphi}}\right] \qquad (1.24)$$

ثم إن $e^{ip\varphi} \underset{p\to\infty}{\to} 0$، $r + d = 1$ ومنه

$$\frac{E'_0}{E_0} = -\sqrt{r}\,\frac{1-e^{i\varphi}}{1-re^{i\varphi}} \qquad (1.24)'$$

نحسب بنفس الشكل سعة الأشعة المنتقلة عبر الوجه الخلفي: انكسار مرتين والسعة d، وانعكاس عدداً زوجياً من المرات والسعة r، r^3، ... أضف إلى هذا الطريق 0'0 الذي تجتازه كل الحقول المنتقلة في 0' اي معامل الطور مشترك $e^{i\frac{\varphi_0}{2}}$. ولدينا بالتالي السعة $\frac{E''_0}{E_0}$

$$\frac{E''_0}{E_0} = e^{i\frac{\varphi_0}{2}} d\left(1 + re^{i\varphi} + r^2e^{2i\varphi} + \ldots + r^{p-1}e^{(p-1)i\varphi}\right) = e^{i\frac{\varphi_0}{2}} d\,\frac{1-r^pe^{ip\varphi}}{1-re^{i\varphi}} \qquad (1.25)$$

تأخذ هذه السعة، عندما تتناهى p إلى اللانهاية، القيمة

$$\frac{E''_0}{E_0} = e^{i\frac{\varphi_0}{2}} d\,\frac{1-e^{i\varphi}}{1-re^{i\varphi}} \qquad (1.25)'$$

لنلاحظ أن الصيغتين (1.24) و(1.25) متماثلتان إذا ما أهملنا في الأولى الحد $-\sqrt{r}$ المقابل للانعكاس المباشر في النقطة 0 ونحصل عندئذ على

$$\frac{E'_0}{E_0} = \sqrt{r}\,e^{i\left(\varphi - \frac{\varphi_0}{2}\right)}\,\frac{E''_0}{E_0} \qquad (1.26)$$

و

$$\left|\frac{E'_0}{E_0}\right|^2 = r\left|\frac{E''_0}{E_0}\right|^2 \qquad (1.26)'$$

أي أن الشدة المنعكسة تساوي للشدة المنتقلة مضروبة بالمعامل r.

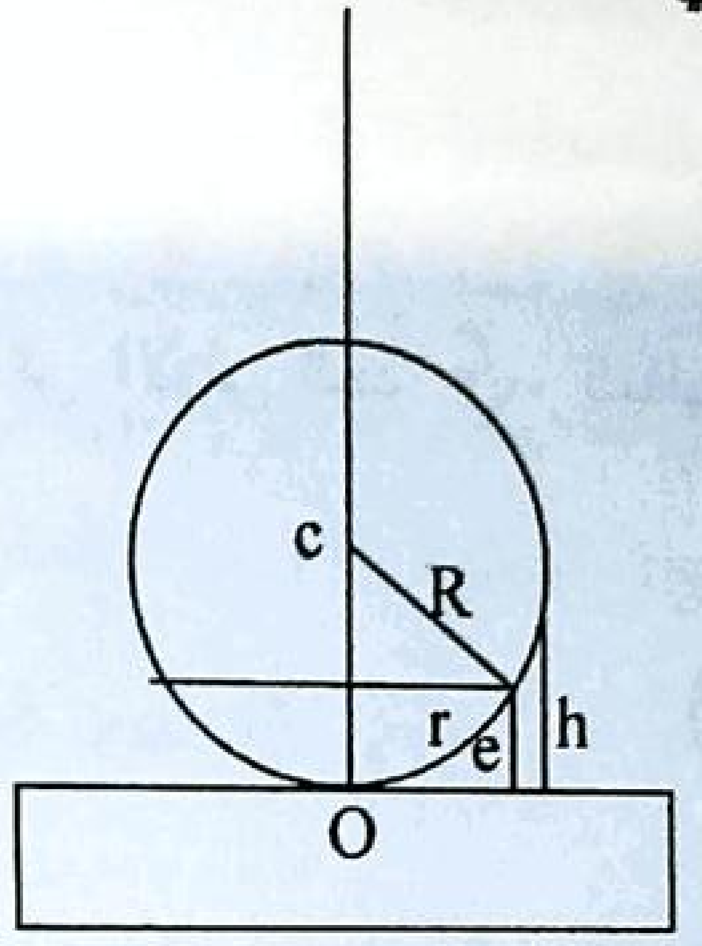
ملاحظة:

لم ننظر في محاكمتنا إلى وقوع الحقل الكهربائي في مستوى الورود أو في المستوى العمودي عليه فالعلاقات صحيحة إذاً أياً كان مستوى الاستقطاب.

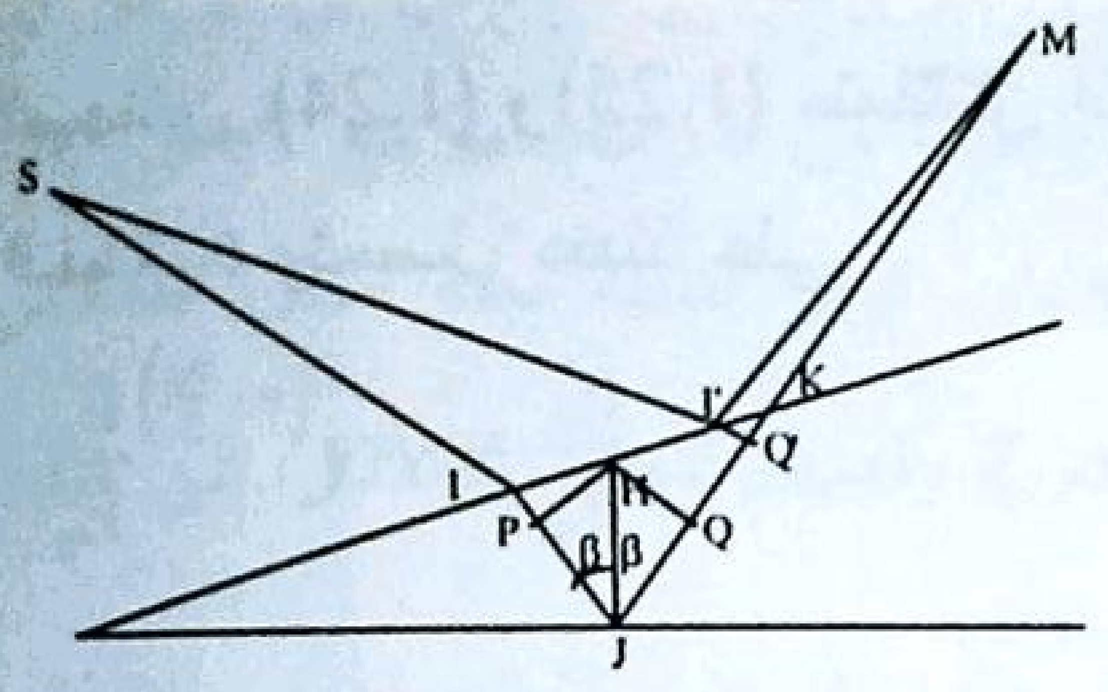
نحصل على القيم المطرافة، العظمى والصغرى للشدة بحساب مشتق $\left|\frac{E'_0}{E_0}\right|^2$ ونجد بعد حساب يطول لا تعقيد فيه أن المشتق الأول متناسب مع $\sin\varphi$ وينعدم إذاً من أجل $\varphi = 2\pi\ell$ والمشتق الثاني المتناسب مع $\cos\varphi$ سالب من أجل $\varphi = \pi(2\ell + 1)$ التي تقابل القيم العظمى وموجب من أجل $\varphi = 2\pi\ell$ التي تقابل القيم الصغرى.

واضح أن ما يصح على النقطة 0 في المقطع العرضاني للصحيفة وعلى الأشعة المتوازية المنعكسة عليها يصح على ما يقابلها في أي مقطع عرضاني آخر وبالتالي فإن ظاهرة التداخل تبدو على شكل حلقات مظلمة ومضيئة. إن مركز الحلقات $\varphi = 0$ مظلم.

نحصل على حلقات تداخل، حلقات نيوتن، في ظروف مماثلة أي بوجود ثلاثة أوساط هي الزجاج فالهواء فالزجاج عوضاً عن الهواء فالزجاج فالهواء في الحالة السابقة: توضع عدسة مستوية محدبة من جهة تحدبها على صفيحة زجاجية مستوية، يختلف سمك طبقة الهواء بينهما، e، بين الصفر و h، الشكل.6a. تضاء بشعلة صوديوم وينظر إلى التداخل بالانعكاس بتركيز الرؤية على سطح الصفيحة الرقيقة. نحسب فرق الطريق بين الشعاعين الواردين على "قرنة" الهواء في النقطتين I و I' والملتقيين في النقطة M، عين الناظر، الشكل.6b، على النحو التالي. نسقط من I' العمودي على IJ في النقطة P والعمودي على JK في النقطة Q.



الشكل.6a



الشكل.6b

فرق الطريق بين SIJKM و SI'M هو PJ + JQ. إن النقاط I، I'، K قريبة جداً من بعضها. وهذا ما جعلنا نستبدل القرنة بزاوية التماس، بحيث يمكننا مطابقة I' و H، نقطة تلاقي القائم على سطح الصفيحة المستوى في النقطة J مع سطح العدسة، واستبدال PJ بـ P'J و JQ بـ JQ': اكتفينا في الشكل برسم المساقط من H مباشرة فطابقنا Q و Q'، P و P' حتى لا نعقد الصورة. نكتب فرق الطريق إذاً على الشكل الذي وجدناه في حال الصفيحة الرقيقة.

$P'J + JQ = 2e\cos\beta$ وفرق الطور بين الصفيحتين بالانعكاس هو $\varphi = 2ek\cos\beta$ ($n = 1$ في قرنة الهواء). نحسب نصف قطر الحلقة r بالعلاقة

$$r^2 = e(2R - e)$$

حيث R نصف قطر العدسة

$$= 2Re$$

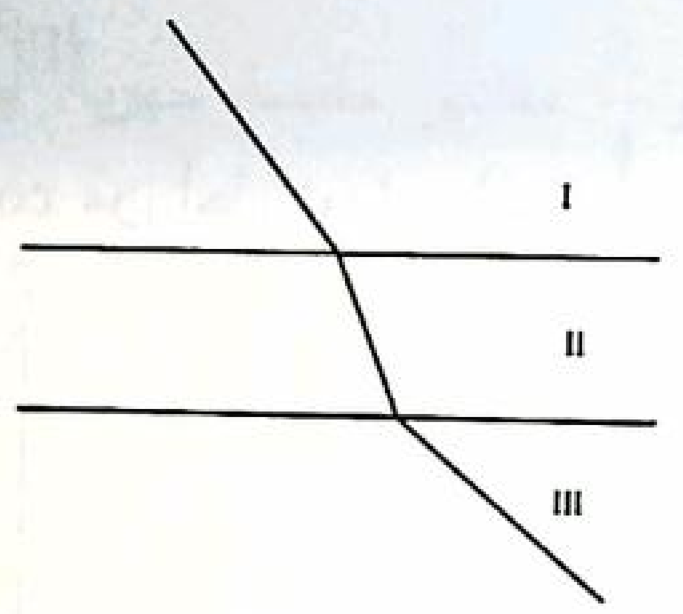
نفرض الورود عمودياً، $\beta = 0$، فنحصل على نصف قطر الحلقة المظلمة التي رقمها ℓ، $\varphi = 2\pi\ell$، أي $2e = \ell\lambda$،

$$r = \sqrt{\ell R\lambda} \qquad (1.27)$$

الحلقة المركزية مظلمة لوجود فرق طور π (فرق طريق $\frac{\lambda}{2}$) عند الانعكاس على وجه الصفيحة، من الزجاج إلى الهواء.

عندما نضيء بالضوء الطبيعي فإن كل إشعاع وحيد اللون يشكل نظمة حلقات تتناسب أقطارها مع $\sqrt{\lambda}$ تتراكب بحيث لا يمكن تمييز إلا بضع حلقات، 5 إلى 6، ملونة يليها لون أقرب إلى البياض.

فرضنا للتبسيط أن الصفيحة منغمسة في وسط واحد، الهواء على وجهيها العلوي والسفلي. يمكن تعميم هذه الدراسة إلى صفيحة متجانسة يحدها وسطان مختلفان، أي أن الوسط III الذي يعبر إليه الضوء يختلف عن الوسط I الوارد منه. هذا هو حال بقعة من الزيت (الوسط II) على الإسفلت المبلول، طبقة الماء بين بقعة الزيت والإسفلت هي الوسط III، الشكل.7، الضوء الوارد هو الضوء الطبيعي في الهواء، الوسط I، يمتص الإسفلت الضوء المنتقل إلى طبقة الماء بحيث لا تحدث سيرورة انعكاسات وانكسارات إضافية من الوسط III إلى الوسط I، تبدو بقعة الزيت ملونة تلويناً جميلاً. تأخذ الشدة المنعكسة $\left|\frac{E_0'}{E_0}\right|^2$ قيماً أعظمية وأصغرية تتوقف على طول الموجة ومعاملات الانكسار 1، n، n_1. إن الإسقاط عمودي: $\beta = 0$ و $\varphi = 4nkh$.



الشكل.7

4.1– تداخل الموجات المستقرة

لنحسب كما فعلنا في (5.§4.2) الحقل الكهربائي الناتج عن توضيع الحقل الوارد والحقل المنعكس في الحالتين المعهودتين:

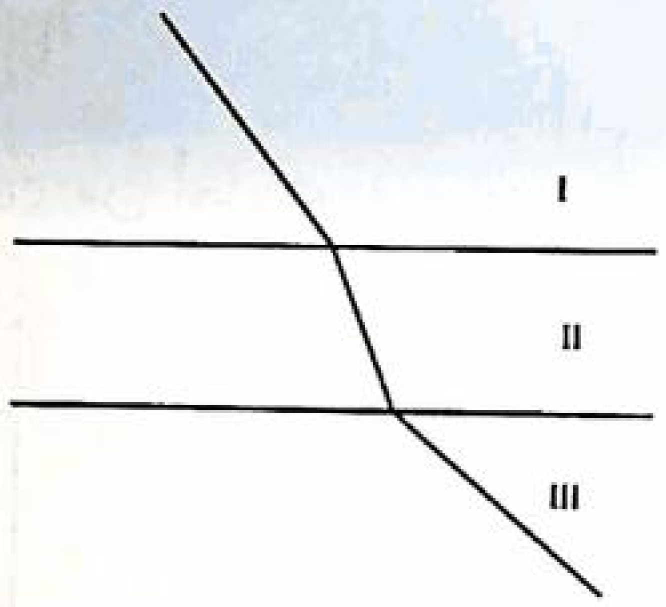
أ– الحقل عمودي على مستوى الورود Oxy، الشكل.8a، xz السطح الفاصل بين الوسطين، لدينا مركبتا متجهتي الوجة الواردة والمنعكسية بدليل زاوية الانعكاس α

$$\vec{k} = \begin{cases} k_x = k\sin\alpha \\ k_y = -k\cos\alpha \end{cases}$$

الحلقة المركزية مظلمة لوجود فرق طور π (فرق طريق $\frac{\lambda}{2}$) عند الانعكاس على وجه الصفيحة، من الزجاج إلى الهواء.

عندما نضيء بالضوء الطبيعي فإن كل إشعاع وحيد اللون يشكل نظمة حلقات تتناسب أقطارها مع $\sqrt{\lambda}$ تتراكب بحيث لا يمكن تمييز إلا بضع حلقات، 5 إلى 6، ملونة يليها لون أقرب إلى البياض.

فرضنا للتبسيط أن الصفيحة منغمسة في وسط واحد، الهواء على وجهيها العلوي والسفلي. يمكن تعميم هذه الدراسة إلى صفيحة متجانسة يحدها وسطان مختلفان، أي أن الوسط III الذي يعبر إليه الضوء يختلف عن الوسط I الوارد منه. هذا هو حال بقعة من الزيت (الوسط II) على الإسفلت المبلول، طبقة الماء بين بقعة الزيت والإسفلت هي الوسط III، الشكل.7، الضوء الوارد هو الضوء الطبيعي في الهواء، الوسط I، يمتص الإسفلت الضوء المنتقل إلى طبقة الماء بحيث لا تحدث سيرورة انعكاسات وانكسارت إضافية من الوسط III إلى الوسط I، تبدو بقعة الزيت ملونة تلويناً جميلاً. تأخذ الشدة المنعكسة $\left|\frac{E'_0}{E_0}\right|^2$ قيماً أعظمية وأصغرية تتوقف على طول الموجة ومعاملات الانكسار 1، n، n_1. إن الإسقاط عمودي: $\varphi = 4\pi kh$ و $\beta = 0$.



الشكل.7

4.1- تداخل الموجات المستقرة

لنحسب كما فعلنا في (5.§4.2) الحقل الكهربائي الناتج عن توضيع الحقل الوارد والحقل المنعكس في الحالتين المعهودتين:

أ- الحقل عمودي على مستوى الورود Oxy، الشكل.8a، xz السطح الفاصل بين الوسطين، لدينا مركبتا متجهتي الوجة الواردة والمنعكسية بدليل زاوية الانعكاس α

$$\vec{k} = \begin{cases} k_x = k\sin\alpha \\ k_y = -k\cos\alpha \end{cases}$$

:

و

$$k' = \begin{cases} k'_x = k\sin\alpha \\ k'_y = k\cos\alpha \end{cases}$$

لا يوجد انقطاع في مركبة الحقل E_z

$$E_z = Ae^{i\omega(t - k_x x - k_y y)}$$
$$= Ae^{i\omega t}e^{-ik(x\sin\alpha + y\cos\alpha)}$$

والحقل المنعكس

$$E'_z = Ae^{i\omega t}e^{-ik(x\sin\alpha - y\cos\alpha)}$$

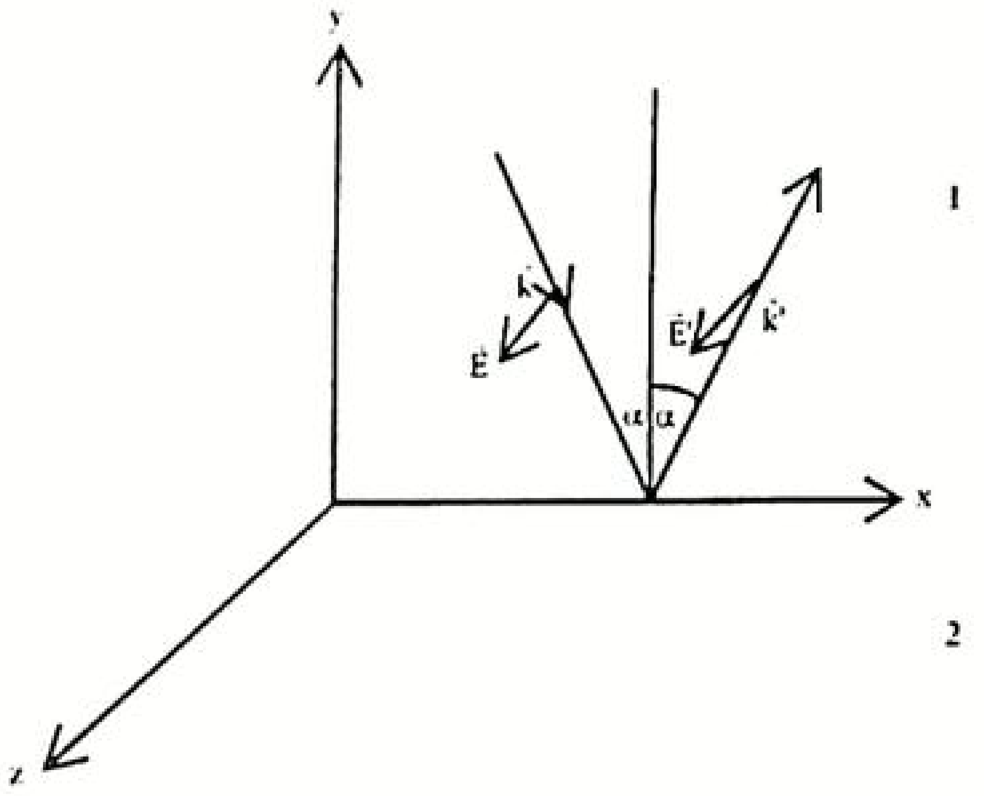
وتوضيع الحقلين هو

$$E_z + E'_z = E_z = Ae^{i\omega t - ikx\sin\alpha}\left(e^{-iky\cos\alpha} - e^{iky\cos\alpha}\right)$$
$$= -2iAe^{i(\omega t - kx\sin\alpha)}\sin(ky\cos\alpha) \qquad (1.28)$$

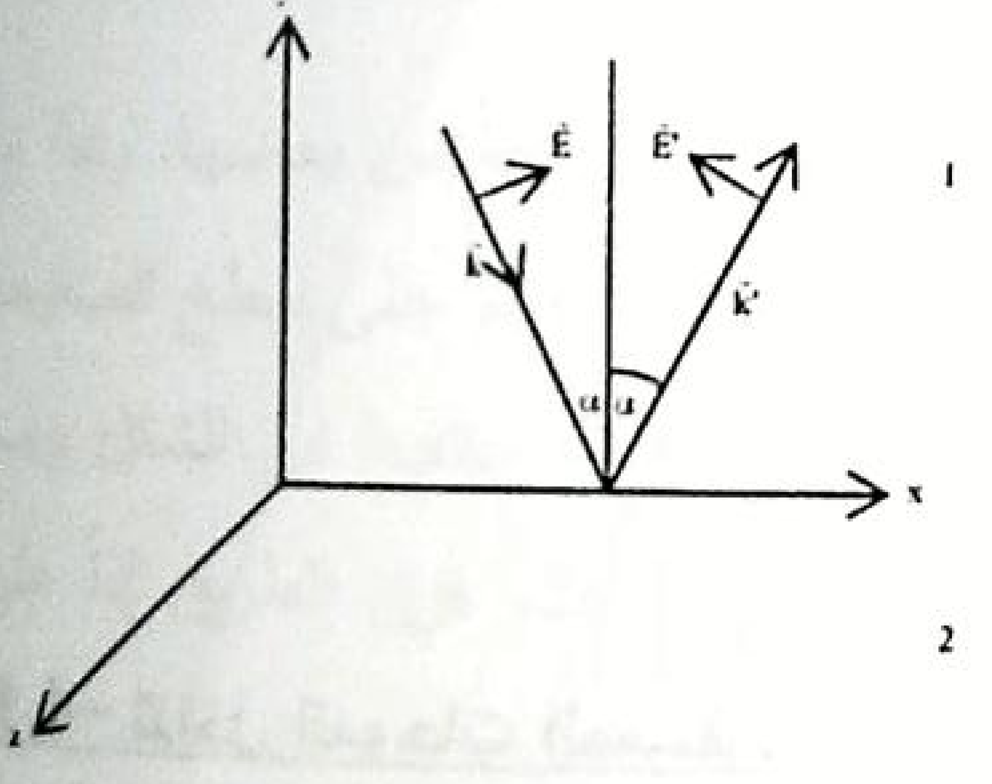
لا يوجد كذلك انقطاع لشدة الحقل الوسطية، عندما ننظر إليه على أنه القسم الحقيقي لهذا المقدار، فهي معطاة بالعلاقة

$$|E|^2 = 2A^2\sin^2(ky\cos\alpha) \qquad (1.29)$$

لأن التكامل على $\sin^2(t)$ أو $\cos^2(t)$ من أجل دورة يساوي $\frac{1}{2}$.



الشكل.8a



الشكل.8b

ب- الحقل في مستوى الورود Oxy، الشكل.8b، نحسب مركبتيه E_x، E'_x، E_y، E'_y على نفس النحو مع الشروط على الحدود $E_x + E'_x = 0$ من أجل $y = 0$ $(R_s \langle 0)$ لنجد

$$E_x + E'_x = E_x = -2iA\sin\alpha e^{i(\omega t - kx\sin\alpha)}\sin(ky\cos\alpha) \qquad (1.30)_x$$

$$E_y + E'_y = E_y = 2iA\cos\alpha e^{i(\omega t - kx\sin\alpha)}\cos(ky\cos\alpha) \qquad (1.30)_y$$

تعطينا (1.29) في حالة الورود الناظمي $\cos\alpha = 1$، القيم المطرافية لشدة الحقل. فالشدة معدومة والنقط y تقابل عقد الحقل

$$y = n\frac{\lambda}{2} \qquad (1.31)$$

و الشدة أعظمية والنقط y تقابل بطون الحقل (العقد المضادة)

$$y = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (1.31)'$$

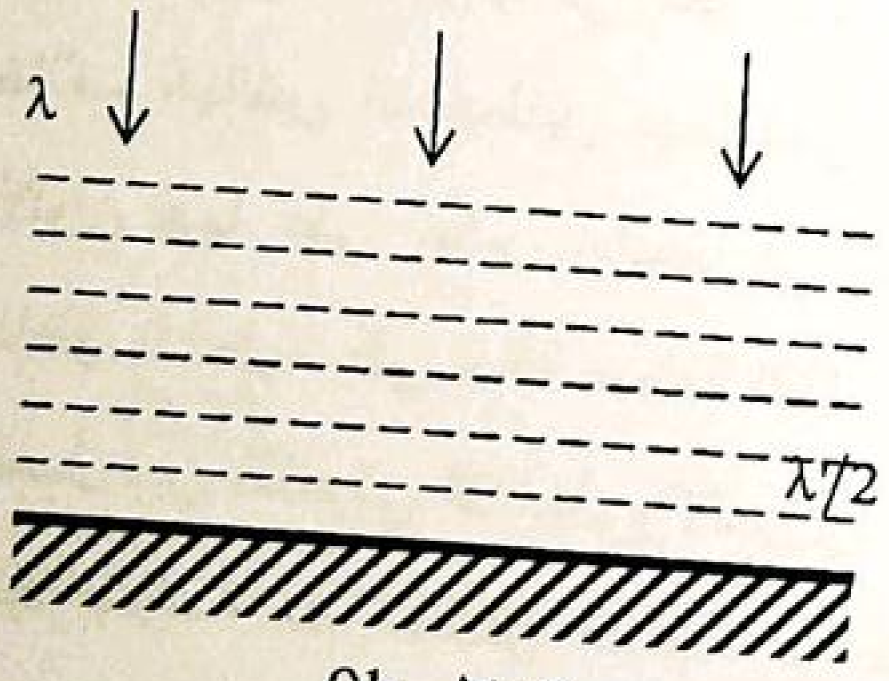
وضع النقط يتبع طول الموجة، وهو ثابت عندما يكون طول الموجة ثابتاً ولذا سميت هذه الموجات بالثابتة أو المستقرة Stationary، Standing.

إن شدة الحقل عندما يكون في مستوى الورود هي، من $(1.30)_x$ و$(1.30)_y$

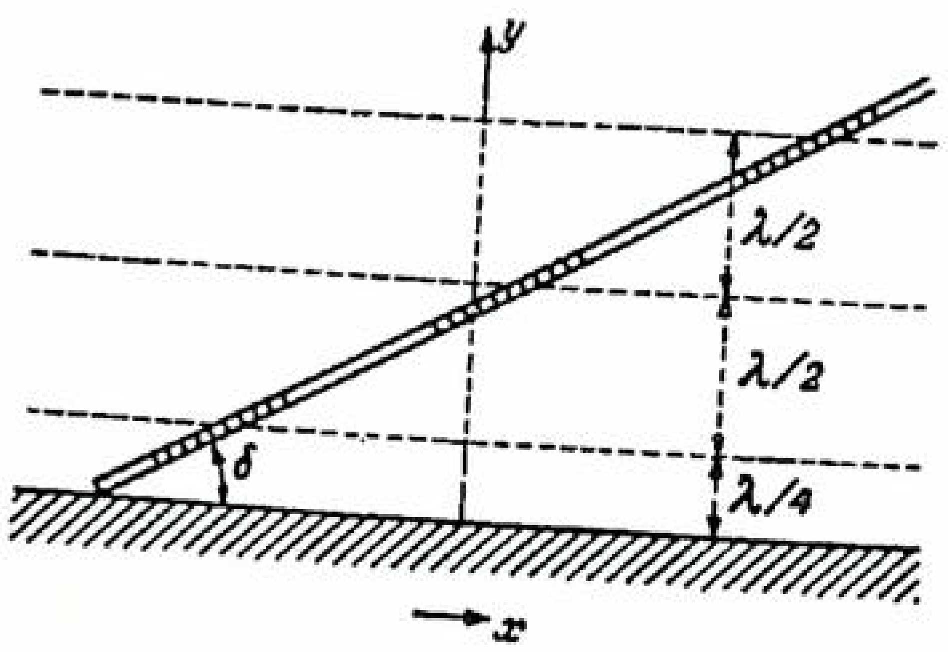
$$E_x^2 + E_y^2 = 2A^2\left[\sin^2\alpha\sin^2(ky\cos\alpha) + \cos^2\alpha\cos^2(ky\cos\alpha)\right]$$
$$= 2A^2\left[\cos^2\alpha - \cos2\alpha\sin^2(ky\cos\alpha)\right]$$

وتساوي A^2 من أجل زاوية ورود $\alpha = \frac{\pi}{4}$، وبالتالي فالإضاءة متجانسة ولا وجود لأهداب تداخل.

لنلاحظ أن E_z في (1.28) تساوي E_x في $(1.30)_x$ عندما يكون الورود ناظمياً، ولذا فالنتائج التي نحصل عليها واحدة في هذه الحالة سواء أكان الحقل $\vec{E}$ عمودياً على مستوى الورود أم واقعاً فيه. نضع لوحة تصوير مائلة بزاوية صغيرة جداً δ عن سطح مرآة مفضضة نستعملها كعاكس للضوء الوارد ناظمياً ذي طول الموجة λ، الشكل.9a، توسع لوحة التصوير المسافات المقيسة على Oy العمودي على المرآة بمقدار $\frac{1}{\delta}$ جاعلة من المسافات $\frac{\lambda}{2}$ و$\frac{\lambda}{4}$ مقادير مقيسة جهرياً. يتفاعل الحقل الكهربائي الشديد عندما يكون على مسافات $\frac{\lambda}{4}$، $\frac{3\lambda}{4}$،... مع جزيئات اللوحة الفوتوغرافية فيطرد إلكتروناً من جزيء بروميد الفضة (تفاعل كهرضوئي) وتسوّد ذرة الفضة عند التحميض بينما تبقى ذرات الفضة على حالها عندما تقع في مستويات العقد 0، $\frac{\lambda}{2}$، λ،...



الشكل.9b



الشكل.9a

يمكن وضع اللوحة الفوتوغرافية المكونة من صفائح رقيقة على سطح المرآة مباشرة. تتأثر جزيئات المستويات المقابلة للبطون والمتباعدة فيما بينها بمسافة $n\frac{\lambda'}{2}$، حيث λ' طول الموجة في اللوحة، المقابل لطول الموجة الواردة λ، الشكل.9b.

تعيد اللوحة، بتداخل بناء، عندما تضاء ناظمياً باللون الطبيعي (الأبيض) الموجة λ، لأن فرق الطريق بين الشعاعين المنعكسين من صفيحتين متتاليتين يساوي λ'، طول الموجة في اللوحة، وللشعاعين ذات السعة والطور. أما أطوال الموجة الأخرى ولو كانت قريبة من λ' فإن الضوء الذي تعكسه معدوم: لنفرض أن طول الموجة الأخرى هو λ'' وأن $\lambda' = \lambda''\left(1 + \frac{1}{2p}\right)$ فإن فرق الطريق بين شعاعين منعكسين عن صفيحتين تبعد إحداهما عن الأخرى p مرة بين بطنين هو $p\lambda' = p\lambda'' + \frac{\lambda''}{2}$ والتداخل تخريبي.

2. الانعـراج

1.2- ظاهرة الانعراج

يطلق اسم انعراج على ظاهرة انحراف الأشعة الضوئية عن مسارها المستقيم التي لا نستطيع تفسيرها بظاهرتي الانعكاس والانكسار؛ أي تلك التي يستحيل على الضوء الهندسي تفسيرها. ولما كان الضوء الهندسي حالة حدية للضوء الموجي عندما تتناهى طول الموجة إلى الصفر، فإن ظاهرة الانعراج تكبر كلما ازداد طول الموجة؛ فانحراف الأشعة الحمراء عن مسارها المستقيم بالانعراج أكبر من انحراف الأشعة البنفسجية على عكس ما يجري في الانكسار بواسطة الموشور على سبيل المثال. وكذلك فإن غلبة الضوء الأحمر في أجواء الشمس والقمر – التاجين المحيطين بهما – ظاهرة انعراج ناتجة عن القطرات المائية الموزعة عشوائياً في الجو المضبب التي تحرف الأشعة عن مسارها المستقيم، ونقول تبعثرها، على خلاف الهالتين المحيطتين بهما فهي ظاهرة انكسار على سطح بلورات الجليد في طبقات الغيوم تتتابع الألوان فيها على عكس تتابعها في الظاهرة الأولى. تتجلى ظاهرة الانعراج في وجود مناطق مضيئة، مناطق تداخل، على حافة منطقة الظل، خلف حاجز معتم بالقرب من حافته. يبرر هذا الوجود إلى حد ما الفصل بين ظاهرتي التداخل والانعراج.

سنبدأ بدراسة هذه الظاهرة الناتجة عن موجات مستوية تنتشر بدقة كبيرة في اتجاه متواز، نحصل عليها باستعمال مسدّد Collimator؛ يتكون عادة من عدسة محدبة وضع في مستواها البؤري شق يحول حزمة الأشعة المتباعدة الواردة عليه إلى حزمة من الأشعة المتوازية: خيال الشق شيء مضيء في اللانهاية. يرصد الخيال بواسطة تلسكوب بؤرته في اللانهاية. ثم نتبع ذلك بدراسة انعراج الموجات الكروية.

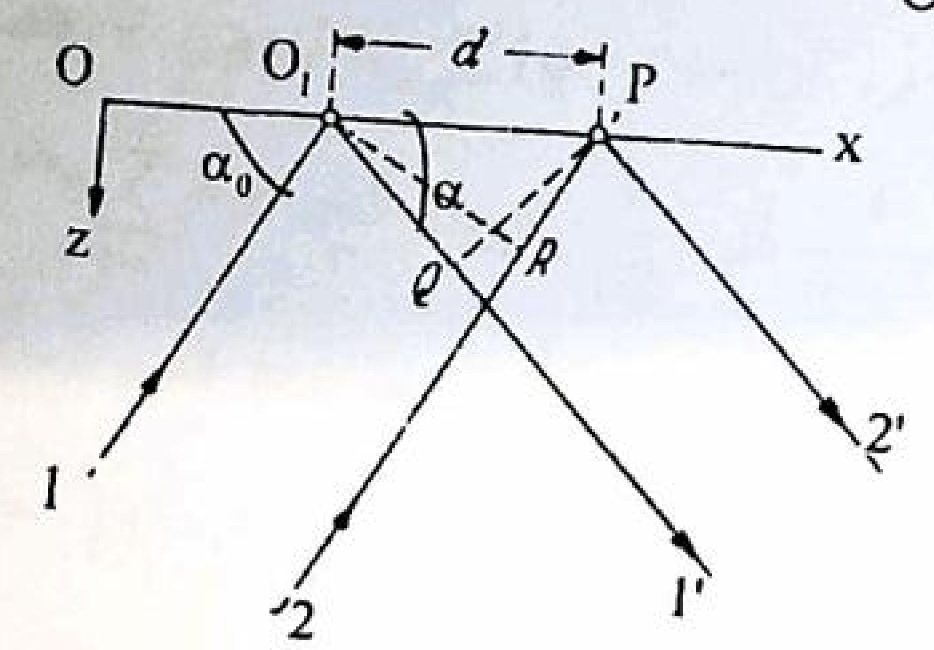
2.2- الشبكة أو المحززة Grating

أ- المحززة الخطية :

تتألف الشبكة من أسلاك رفيعة مشدودة ومتقاربة أو من حزوز رفيعة محفورة على سطح مرآة معدنية، 1800 حز في الميلمتر الواحد، يقرب عددها الكلي من المئة ألف (رولاند Rowland عام 1800). نأخذه ليكن المستوى xy مستوى المحززة، y مواز لخطوطها وليكن xz مستوى ورود الأشعة عليها، مستوى الشكل ولتكن d المسافة الفاصلة بين حزين متتاليين O_1 و P. نفرض أن الأشعة الواردة هي الضوء الطبيعي (الأبيض) وأنها متوازية بفضل مرورها عبر مسدد مثالي. تعمل متجهة الموجة وحيدة اللون الواردة $\vec{k}$ زاوية α_0 مع الاتجاه الموجب لـ Ox، نرمز لـ $\cos\alpha_0$ بـ α_0 اختصاراً. وتعمل متجهة الموجة المنعرجة (المبعثرة) زاوية معه، نرمز لجيب تمامها بـ α.

إن فرق الطريق بين '11 و '22 هو، الشكل. 10، $1'-2' = O_1Q$، $1-2 = -PR$

$$O_1Q - PR = \alpha d - \alpha_0 d$$



الشكل.10

وفرق الطور بينهما هو

$$\Delta = kd(\alpha - \alpha_0) \quad \text{حيث} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{2.1}$$

نحصل على إضاءة أعظمية عندما يكون فرق الطور مساوياً $2\pi\ell$، ℓ عدد صحيح موجب أو سالب، أي على

$$\alpha - \alpha_0 = \ell\frac{\lambda}{d} \tag{2.1'}$$

يقابل $\ell = 0$، $\alpha = \alpha_0$، حالة الانعكاس، ويقابل $\ell = \pm 1$ الطيف من الرتبة الأولى على يمين ويسار الضوء المنعكس، وكذلك يقابل $\ell = \pm 2$ الطيف من الرتبة الثانية، الخ.

أما الإضاءة الأصغرية، سعة الموجة الحاصلة معدومة، فهي عندما يكون فرق الطور Δ: $\Delta = (2\ell + 1)\pi$.

تربنا العلاقة '(2.1) أن المحززة تحلل الضوء الأبيض منتجة طيف الألوان المكونة له، وأن اتجاه الانعراج يختلف من لون لآخر وأن الانعراج الأكبر، $\alpha - \alpha_0$ أكبر ما يكون، من أجل اللون الأحمر كما أشرنا منذ البداية، وأخيراً أن الانعراج يكبر في الطيف من الرتبة الثانية والثالثة؛ ولذا تفضل هذه الرتب في القياس الدقيق لطول الموجة حيث يكبر فصل الألوان عن بعضها، يكبر التشتت Dispersion. لا ننسى أن الرتبة صفر هي انعكاس مستقل عن طول الموجة وأن الضوء المنعكس يبقى أبيض.

نجمع المتجهات $\vec{E}$ الناتجة عن N نقطة على المحور x، N حزاً العدد الكلي، كما فعلنا في (1.18) نرمز لوضع هذه النقاط بـ $x_0, x_1 \dots x_{N-1}$، $x_n = x_0 + nd$ والحقل الذي تنتجه النقطة x_n هو

$$E_n = a_n e^{i[k(\alpha x + \gamma z) + n\Delta]}$$

γ هو جيب تمام الزاوية التي يعملها الشعاع المنعرج مع Oz.

لا نأخذ المعامل $e^{-i\omega t}$ بعين الاعتبار. تتوقف السعة على الاتجاه α، نكتبها على الشكل $a_n = f(\alpha)$ ونكتب الحقل الكلي

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} E_n = f(\alpha) e^{ik(\alpha x + \gamma z)} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Delta}$$

حسبنا هذا المعامل الأخير ولنسمه S ووجدنا في §1.2

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Delta} = e^{i\frac{N\Delta}{2}} \frac{\sin N\Delta/2}{\sin \Delta/2} \tag{2.2}$$

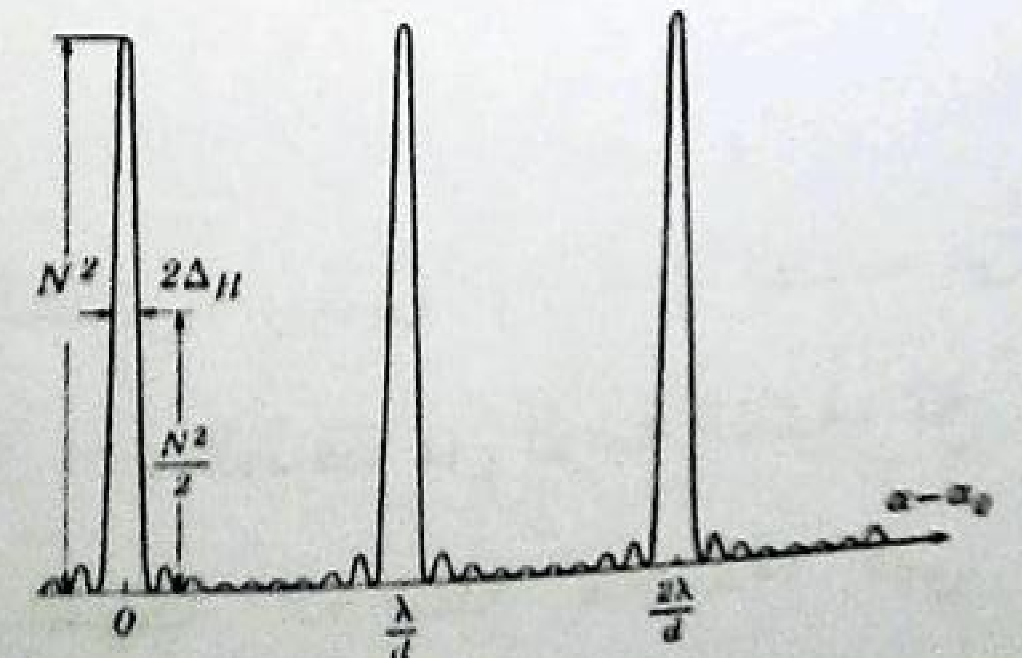
ومنه شدة الإشعاع

$$I = |E|^2 = f^2(\alpha) \frac{\sin^2 N\Delta/2}{\sin^2 \Delta/2} \tag{2.3}$$

$f(\alpha)$ دالة تتغير ببطء مع تغيرات α، $\alpha \in [-1, +1]$، بينما يتغير المضروب الثاني في الجداء بسرعة كبيرة مع $\alpha - \alpha_0$، $\alpha - \alpha_0 = \frac{\lambda\Delta}{2\pi d}$، ويأخذ قيمه العظمى بإعطاء قيمة معينة لـ $\frac{0}{0}$ (حسب قاعدة أوبيتال Hôpital) عندما تأخذ Δ القيم

$$\frac{\Delta}{2} = \pi\ell \tag{2.3'}$$

والقيمة العظمى عندئذ هي N^2، الشكل 11.



الشكل 11.

توجد قيم عظمى إضافية من أجل أعداد أخرى m تضاف لـ ℓ تحددها القيم العظمى للصورة في (2.3) أي العلاقة

$$N\frac{\Delta}{2} = m\frac{\pi}{2} \qquad \text{مقاس } \pi\ell \qquad \frac{\Delta}{2} = \frac{\pi m}{2N}$$

حيث m عدد فردي، وقيمة $\frac{\Delta}{2}$ من أجل القيم العظمى الإضافية بعد ℓ هي

$$\frac{\Delta}{2} = \pi\left(\ell + \frac{m}{2N}\right) \qquad (2.3)''$$

لا يمكن أخذ أول الأعداد الفردية (1) بعين الاعتبار لوقوع القيمة العظمى الإضافية داخل منحدر القيمة العظمى الرئيسية التي تغطيها. تأخذ القيم العظمى الإضافية من أجل ℓ معين قيماً متناقصة – على خلاف القيم العظمى الرئيسية الثابتة والمساوية لـ N^2 – هي

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi m}{2N}} \simeq \frac{4N^2}{\pi^2 m^2}$$

لأن N عدد كبير جداً (100.000) و $\sin x \simeq x$ في هذه الحالة، وهكذا فنسبة القيمة العظمى الإضافية الأولى، $m = 3$، إلى القيمة العظمى الرئيسية هي $\frac{4}{9\pi^2}$ أي $\frac{1}{22}$ تقريباً ونسبة القيمة العظمى الإضافية الثانية $m = 5$ إلى الرئيسية هي $\frac{4}{25\pi^2}$ أي $\frac{1}{62}$ تقريباً، الخ.

تبعد القيم العظمى الرئيسية عن بعضها مسافة $\frac{\lambda}{d}$، بينما تبعد القيم العظمى الإضافية عن بعضها مسافة $\frac{\lambda}{Nd}$.

حساب عرض القيمة العظمى الرئيسية $2\Delta_H$ في منتصفه، أي من أجل $\frac{I}{2} = \frac{N^2}{2}$، لدينا

$$\frac{\sin^2 \frac{N\Delta_H}{2}}{\sin^2 \frac{\Delta_H}{2}} = \frac{N^2}{2}$$

نكتب هذه المعادلة، نظراً لصغر $\frac{\Delta_H}{2}$ و $\sin^2 \frac{\Delta_H}{2} = \left(\frac{\Delta_H}{2}\right)^2$، على الشكل

$$\sin^2 \frac{N\Delta_H}{2} = \frac{1}{2}\frac{N^2\Delta_H^2}{4} \qquad (2.4)$$

إنها معادلة من الشكل $\sin^2 x = \frac{x^2}{2}$، حلها $\sin x = \frac{x}{\sqrt{2}}$ يعطينا من جدول الجيب $1,38 = x \simeq 80°$

ومنه

$$\Delta_H = \frac{2 \times 1,38}{N}$$

وعرض القيمة العظمى $2\Delta_H = \frac{5,5}{N}$ وهو عرض صغير جداً نظراً لكبر N.

لنلاحظ أخيراً أن القيم العظمى لمختلف ألوان الطيف لا تتراكب على بعضها بعضاً. إلا أنه من الممكن تراكب رتب الأطياف إذ يزداد تشتت الألوان بازدياد ℓ وهكذا يتراكب طيف اللون الأحمر من الرتبة الثانية مع طيف اللون البنفسجي من الرتبة الثالثة لأن العلاقة بين أطوال الموجة $2\lambda_{\text{بنفسجي}} \sim \lambda_{\text{أحمر}}$ هي بحيث يكون $3\lambda_{\text{بنفسجي}} < 2\lambda_{\text{أحمر}}$.

<u>ب- المحززة المتقاطعة:</u>

يمكن إنشاء محززة تتقاطع فيها، في مستو ما، الحزوز الطولانية مع الحزوز العرضانية. فنحصل على مستطيلات مظلمة عندما يكون التقاطع بزاوية قائمة أو متوازيات أضلاع مظلمة عندما يكون التقاطع بزاوية مائلة. تحد هذه السطوح الرباعية خطوط تعرج الضوء. نفرض أن الخطوط الطولانية موازية للمحور y كما في الحالة السابقة والعرضانية موازية للمحور Ox : المستوي xy هو مستوى المحززة. نرمز بـ d_1 للمسافة الفاصلة بين حزين طولانيين و d_2 للمسافة بين حزين عرضانيين، بـ α_0، α لجيب تمام الأشعة الواردة والمنعرجة على الحز الطولاني وبـ β_0 و β لمثيلهما على الخط العرضاني. فرق الطور الطولاني هو

$$\Delta_1 = \frac{2\pi d_1}{\lambda}(\alpha - \alpha_0)$$

والعرضاني

$$\Delta_2 = \frac{2\pi d_2}{\lambda}(\beta - \beta_0)$$

وليكن أخيراً N_1 و N_2 عدد الحزوز الطولانية والعرضانية على الترتيب. نعمم العلاقة (2.2) ونكتب حسب مبدأ التوضيع

$$S = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} e^{in_1\Delta_1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} e^{in_2\Delta_2}$$

ونستخلص شدة الحقل الناتج

$$I = f^2(\alpha, \beta)\frac{\sin^2\frac{N_1\Delta_1}{2}}{\sin^2\frac{\Delta_1}{2}} \cdot \frac{\sin^2\frac{N_2\Delta_2}{2}}{\sin^2\frac{\Delta_2}{2}} \qquad (2.5)$$

فنحصل على شروط تحقق القيم العظمى وهي

$$\Delta_1 = 2\pi\ell_1 \quad \text{وفي آن واحد} \quad \Delta_2 = 2\pi\ell_2 \qquad (2.6)$$

أي

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{\lambda}{d_1}\ell_1 \quad \text{وفي آن واحد} \quad \beta - \beta_0 = \frac{\lambda}{d_2}\ell_2$$

حيث ℓ_1 و ℓ_2 عددان صحيحان موجبان أو سالبان.

تتناسب الشدة العظمى مع $N_1^2 N_2^2$. أما عندما يتحقق أحد الشرطين السابقين فالشدة متناسبة مع أحد العددين N_1^2 أو N_2^2 وهي صغيرة جداً تكاد لا ترى أمام القيم العظمى الرئيسية.

رأينا في حالة المحززة الخطية أن القيم العظمى الإضافية صغيرة أمام القيم العظمى الرئيسية ولكنها مهملة تماماً في حالة المحززة المتقاطعة.

ج- الشبكة بثلاثة أبعاد:

يستحيل تصنيع هذا النوع من الشبكات لكن الطبيعة تقدم لنا الشبكات البلورية كنموذج لها. رأينا أن الشبكة البلورية تتألف من خلايا بدائية – شبيكات – ذات تناظر معين، لنفرض أن لدينا شبيكة بدائية على شكل متوازي مستطيلات، أبعاده a_1، a_2، a_3 تحتل الذرات رؤوسه، والشبكة هي إذاً عدد كبير من متوازيات المستطيلات المرتبة بعضها فوق بعض ترتيباً متجانساً فهي إذاً شبكة ضوئية بثلاثة أبعاد يمكن أن نعمم عليها ما حصلنا عليه في حالة الشبكات الخطية والشبكات المستوية. إلا أن فارقاً هاماً يميزها عن الحالتين السابقتين هو أن المسافة بين النقط (الذرات) التي تبعثر الموجة الكهرطيسية الواردة عليها هي بحدود $1\mathring{A}$ مما يلزمنا استعمال أطوال موجات لا تختلف كثيراً عن هذا المقدار، أي اللجوء إلى الأشعة السينية. لننظر إذاً إلى موجة واردة على ذرة ما تعمل مع المحاور الثلاثة المتعامدة في هذه النقطة ثلاث زوايا جيوب تمامها α_0، β_0، γ_0 وتنعرج في اتجاه تعينه جيوب التمام α، β، γ... لدينا كما في الحالتين السابقتين $(2.1)'$ و(2.6)

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{\ell_1 \lambda}{a_1} \quad , \quad \beta - \beta_0 = \frac{\ell_2 \lambda}{a_2} \quad , \quad \gamma - \gamma_0 = \frac{\ell_3 \lambda}{a_3} \tag{2.7}$$

نعمم كتابة شدة الموجة المنعكسة كجداء لثلاثة حدود مضروباً بـ $F(\alpha, \beta, \gamma)$، يسمى معامل الصيغة الذري Atomic form factor. هذا من جهة، ومن جهة أخرى فإن الشبكة البلورية لا تبعثر إلا أطوال موجة محددة لأن العلاقات (2.7) تخضع لقيدين تحددهما العلاقة بين جيوب التمام الموجهة:

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \tag{2.8}$$

وهكذا نحصل بتربيع (2.7) وأخذ (2.8) بعين الاعتبار على قيمة محددة لـ λ، من أجل ℓ_1، ℓ_2، ℓ_3 معطاة، معينة بالعلاقة

$$\lambda = -2\frac{\alpha_0 \frac{\ell_1}{a_1} + \beta_0 \frac{\ell_2}{a_2} + \gamma_0 \frac{\ell_3}{a_3}}{\frac{\ell_1^2}{a_1^2} + \frac{\ell_2^2}{a_2^2} + \frac{\ell_3^2}{a_3^2}}$$

هذا يعني أن الشبكة البلورية المضاءة بطيف متصل من الأشعة السينية، وتسميها على غرار ما نفعله في حالة الطيف المتصل الضوئي بالأشعة السينية "البيضاء" لا تسمح إلا لطول موجة محددة بالتبعثر،

كابحة كل أطوال الموجات الأخرى الموجودة في الأشعة البيضاء. لذا يطلق على هذه الأشعة السينية البيضاء اسم إشعاع الكبح Bremsstrahlung. لنرمز الآن بـ 2θ للزاوية التي يحدثها الشعاع المنعرج مع الشعاع الوارد. إنها معرفة بالعلاقة التالية:

$$\cos 2\theta = \alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0 \qquad (2.9)$$

ذلك أن جداء المتجهة الواحدية للشعاع الوارد $\vec{i}$ ذي المركبات α_0، β_0، γ_0 بالمتجهة الواحدية $\vec{j}$ للشعاع المنعرج ذي المركبات α، β، γ، هو

$$\cos 2\theta = \vec{i}\cdot\vec{j} = (\vec{e}_1\cos\alpha_0 + \vec{e}_2\cos\beta_0 + \vec{e}_3\cos\gamma_0)(\vec{e}_1\cos\alpha + \vec{e}_2\cos\beta + \vec{e}_3\cos\gamma) \qquad (1)$$
$$= \cos\alpha_0\cos\alpha + \cos\beta_0\cos\beta + \cos\gamma_0\cos\gamma$$

حيث أعدنا كتابة cos للتوضيح. نأخذ مربع العلاقات (2.7) ونجمعها آخذين بعين الاعتبار (2.9) فنجد أن

$$2 - 2\cos 2\theta = \lambda^2\left[\left(\frac{\ell_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\ell_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{\ell_3}{a_3}\right)^2\right]$$

لنفرض أن لدينا معاملاً مشتركاً n للأعداد الصحيحة ℓ_1، ℓ_2، ℓ_3، أي

$$\ell_3 = n\ell'_3 \quad ، \quad \ell_2 = n\ell'_2 \quad ، \quad \ell_1 = n\ell'_1$$

نكتب العلاقة أعلاه على الشكل

$$4\sin^2\theta = \frac{\lambda^2 n^2}{d^2}$$

حيث

$$d^2 = \left[\left(\frac{\ell'_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\ell'_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{\ell'_3}{a_3}\right)^2\right]^{-1} \qquad (2.10)$$

ومنه

$$2\,d\sin\theta = n\lambda \qquad (2.11)$$

تعرف هذه العلاقة باسم معادلة براك Bragg.

لم يحصل براك على هذه المعادلة بالطريقة التي اتبعناها منذ البداية في معالجة الشبكة والعائدة لـ فون لاو Von Laue وإنما بالعودة إلى مستويات الشبيكة Lattice plane المتوازية وتعريف d بالمسافة الفاصلة بين مستويين متتاليين من هذه المستويات على النحو التالي:

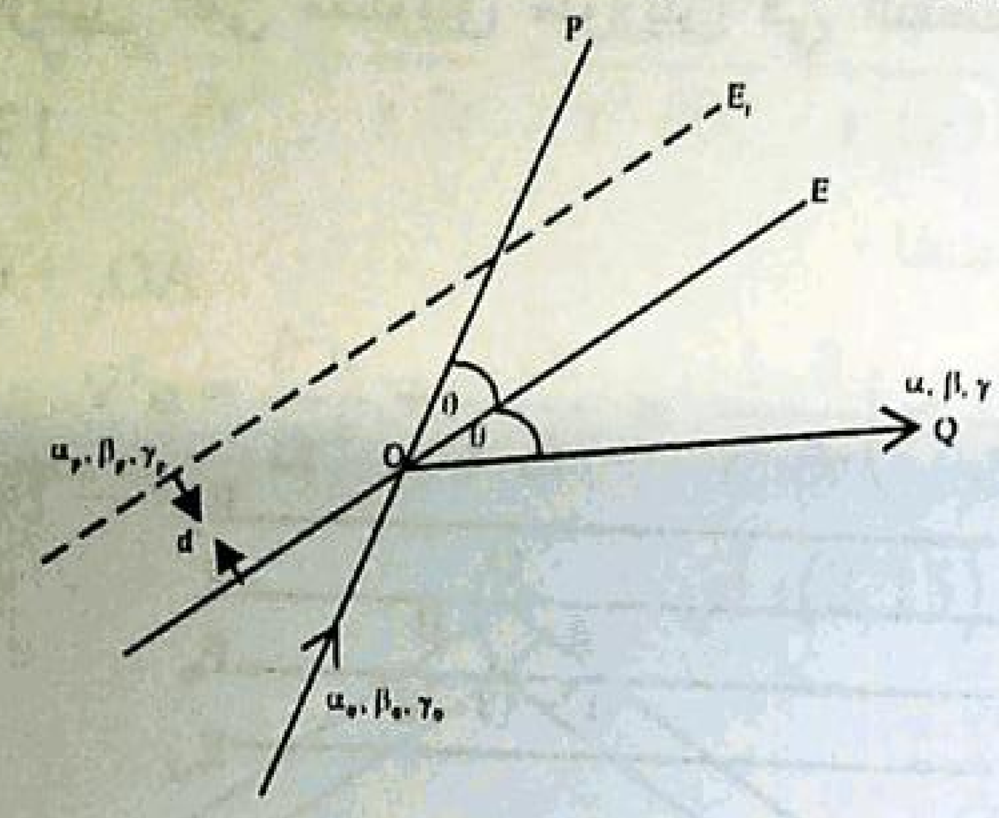
لنأخذ ثلاثة محاور متعامدة موازية لمحاور الشبكة البلورية ينطبق مبدؤها O على الذرة التي يقع فيها الانعراج.

إن مركبات $\overline{OQ}$ المتجهة الواحدية في اتجاه الانعراج و $\overline{OP}$ المتجهة الواحدية في اتجاه الورود هي α، β، γ و α_0، β_0، γ_0 على الترتيب. نعرف المستوى E، الشكل.12، بأنه مستوى النقاط (x, y, z) متساوية البعد عن P و Q أي المحققة للعلاقة

$$(x-\alpha_0)^2 + (y-\beta_0)^2 + (z-\gamma_0)^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$$

وبالنشر:

$$(\alpha-\alpha_0)x + (\beta-\beta_0)y + (\gamma-\gamma_0)z = 0$$



الشكل.12

وبأخذ العلاقات (2.7) بين جيوب التمام والأطوال $\ell_i = \frac{\ell'_i}{n}$ ‎ $i = 1, 2, 3$. نكتب معادلة مستو مواز لـ E_0

$$\frac{\ell'_1}{a_1}x + \frac{\ell'_2}{a_2}y + \frac{\ell'_3}{a_3}z = 1 \qquad (2.12)$$

إنها معادلة مستوى شبيكة بمعنى أنه يحتوي في شبكة بلورية بدون حدود على عدد لا نهاية له من الذرات. يكفي أن يحتوي على ثلاث ذرات من ذرات الشبيكة ليحتوي على عدد لا نهاية له نظراً لدروية الشبيكة في الشبكة. يطلق على الأعداد ℓ'_i اسم مدلات ميلر Miller لمستوى الشبيكة. نحصل على مستوى مواز E_1 يتقاطع مع المحاور الثلاثة في إحداثيات متناسبة مع

$$\frac{a_1}{\ell'_1} = \frac{a_2}{\ell'_2} = \frac{a_3}{\ell'_3}$$

لنذكر أننا نكتب معادلة المستوي بالصيغة النظامية $\overline{OR} \cdot \overline{RM} = 0$ حيث $\overline{OR}$ الناظم على المستوي و p نقطة تقاطعه معه و M نقطة ما (x, y, z) من المستوى بدليل متجهات التمام الموجهة $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p$ لـ $\overline{OR}$ المساوي لـ $p\bar{e}$ فنحصل على

$$0 = \overline{OR} \cdot \overline{RM} = \overline{OR} \cdot \left(\overline{OM} - \overline{OR}\right) = \overline{OR} \cdot \overline{OM} - \overline{Op}^2$$

ومنه بالتقسيم على $p = \overline{Op}$

$$\alpha_p x + \beta_p y + \gamma_p z = p \qquad (2.13)$$

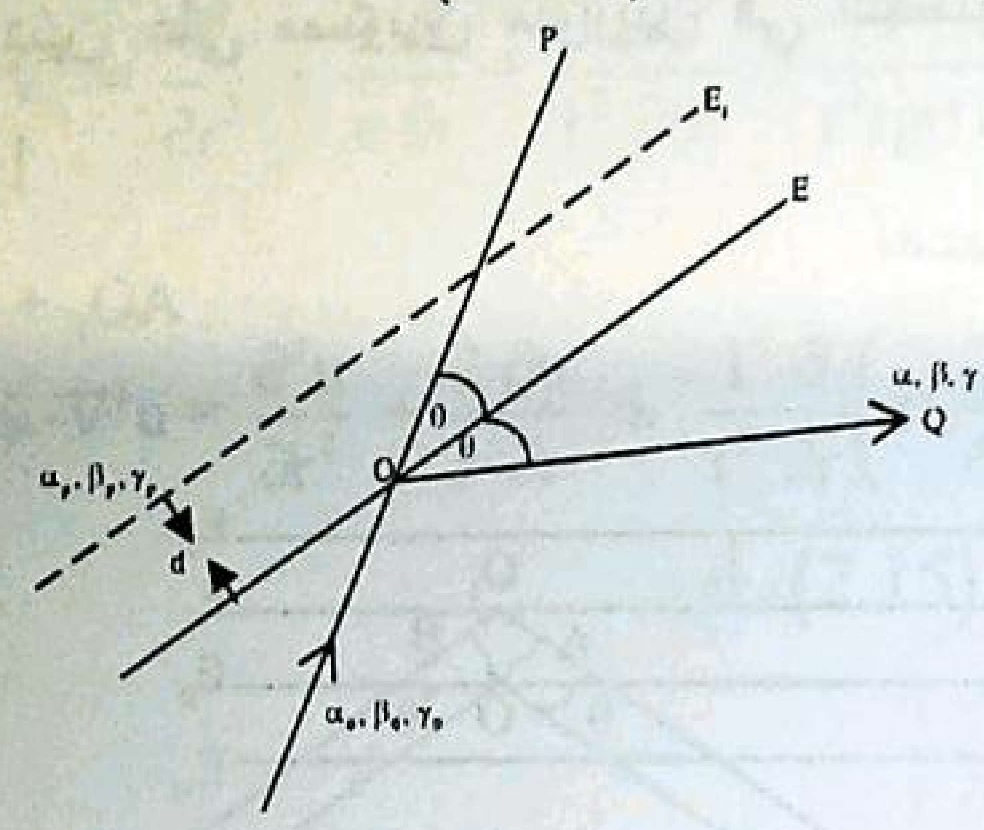
تبين مقارنة هذه المعادلة مع (2.12) أن جيوب تمام الناظم متناسبة مع $\frac{\ell'_i}{a_i}$:

إن مركبات $\overline{OQ}$ المتجهة الواحدية في اتجاه الانعراج و $\overline{OP}$ المتجهة الواحدية في اتجاه الورود هي α، β، γ و α_0، β_0، γ_0 على الترتيب. نعرف المستوى E، الشكل.12، بأنه مستوى النقاط (x, y, z) متساوية البعد عن P و Q أي المحققة للعلاقة

$$(x-\alpha_0)^2 + (y-\beta_0)^2 + (z-\gamma_0)^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$$

وبالنشر:

$$(\alpha-\alpha_0)x + (\beta-\beta_0)y + (\gamma-\gamma_0)z = 0$$



الشكل.12

وبأخذ العلاقات (2.7) بين جيوب التمام والأطوال $\ell_i = \frac{\ell'_i}{n}$ $i = 1, 2, 3$. نكتب معادلة مستو مواز لـ E_0

$$\frac{\ell'_1}{a_1}x + \frac{\ell'_2}{a_2}y + \frac{\ell'_3}{a_3}z = 1 \qquad (2.12)$$

إنها معادلة مستوى شبيكة بمعنى أنه يحتوي في شبكة بلورية بدون حدود على عدد لا نهاية له من الذرات. يكفي أن يحتوي على ثلاث ذرات من ذرات الشبيكة ليحتوي على عدد لا نهاية له نظراً لدروية الشبيكة في الشبكة. يطلق على الأعداد ℓ'_i اسم مدلات ميلر Miller لمستوى الشبيكة. نحصل على مستوى مواز E_1 يتقاطع مع المحاور الثلاثة في إحداثيات متناسبة مع

$$\frac{a_1}{\ell'_1} = \frac{a_2}{\ell'_2} = \frac{a_3}{\ell'_3}$$

لنذكر أننا نكتب معادلة المستوي بالصيغة النظامية $\overline{OR} \cdot \overline{RM} = 0$ حيث $\overline{OR}$ الناظم على المستوي و p نقطة تقاطعه معه و M نقطة ما (x, y, z) من المستوى بدليل متجهات التمام الموجهة $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p$ لـ $\overline{OR}$ المساوي لـ $p\bar{e}$ فنحصل على

$$0 = \overline{OR} \cdot \overline{RM} = \overline{OR} \cdot \left(\overline{OM} - \overline{OR}\right) = \overline{OR} \cdot \overline{OM} - \overline{Op}^2$$

ومنه بالتقسيم على $p = \overline{Op}$

$$\alpha_p x + \beta_p y + \gamma_p z = p \qquad (2.13)$$

تبين مقارنة هذه المعادلة مع (2.12) أن جيوب تمام الناظم متناسبة مع $\frac{\ell'_i}{a_i}$:

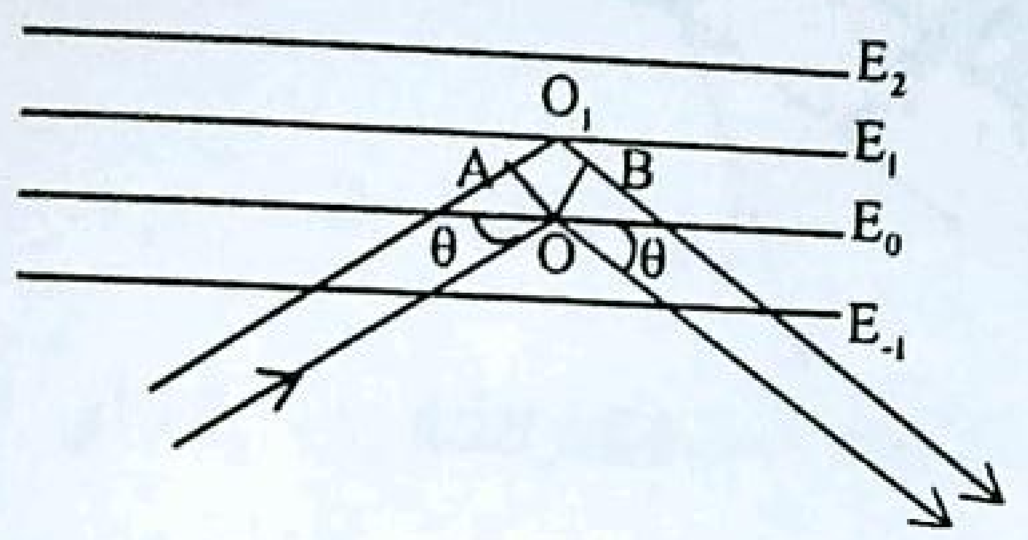
$$\alpha_p = \frac{\ell'_1}{a_1}p \quad ، \quad \beta_p = \frac{\ell'_2}{a_2}p \quad و \quad \gamma_p = \frac{\ell'_3}{a_3}p$$

ومنه بأخذ تعريف d في (2.10) بعين الاعتبار

$$p = d \tag{2.14}$$

وهكذا نرى أن البعد بين مستويي شبيكة متوازيين هو d وأن الانعراج هو "انعكاس" على مستويات الشبيكة، ليس على مستوى واحد وإنما على مجموع هذه المستويات المتوازية. نرى بسهولة أن فرق الطريق بين المتجهتين المتوازيتين الواردتين على مستويين متوازيين في النقطتين O و O_1 و"المنعكستين" على هذين المستويين هي، الشكل.13

$$AO_1 + O_1B = 2d\sin\theta$$



الشكل.13

يجب أن يكون هذا الفرق مساوياً لعدد ما n من طول الموجة λ للحصول على الأهداب المضيئة أي

$$2d\sin\theta = n\lambda$$

ونجد من جديد معادلة براك, يضمن تحقق هذا الشرط تقوية الانعكاس من قبل مستويات الشبيكات المتتالية E_{-2} ، E_{-1} ، E_0 ، E_1 ، ويعطينا معامل التضخم N^2 الذي نجده في الشدة التي نحصل عليها بطريقة فون لاو.

3.2 – انعراج الأمواج الكروية، الحل العام

يتطلب حل مسألة الانعراج معرفة الحقل الكهرطيسي في كل الفضاء، أي حل معادلة الموجة انطلاقاً من الشروط على الحدود، من قيمة الحقل على السطوح المادية – الحواجز التي تعترض انتشار الموجة وجوارها المباشر –؛ وهي قيمة تتوقف على خواص المادة الضوئية مما يضع عراقيل كبيرة أمام إيجاد حل رياضي مقبول لهذه المسألة. ولذا نكتفي عادة بإيجاد حل في جوار مناطق الظل على ألا نبتعد كثيراً عن الضوء الهندسي فلاننظر إلى حالة الأبعاد الكبيرة أمام طول الموجة : أبعاد الفتحات والحواجز والمسافات الفاصلة بينها وبين المنبع الضوئي، بينها وبين نقاط الرصد. سنهمل في تقريب أولي تبعية الموجة للزمن،

فلن ننظر إلى قطار أمواج $\omega(\vec{k})$ وإنما إلى موجة واحدة ثابتة التواتر (ثابتـــة $= \omega$) في كل مكان.

نعلم أن الموجة المنتشرة في اتجاه معين Ox $E = E_0 e^{ikx}$ تحقق معادلة الموجة

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0 \quad ; \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{2.15}$$

لننظر إلى موجة "سلّمية" u تحقق الشرط : ثابتـــة $= \omega$، تابعة لبعدها r عن مبدأ الإحداثيات (عن منبع الضوء مثلاً). نكتب اللابلاسي بالإحداثيات الكروية (r, θ, φ) على الشكل

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \mathrm{tg}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

ليصبح عندما تتبع الموجة لـ r وحدها

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) \tag{2.16}$$

وبما أن u تحقق معادلة الموجة (2.15)، أي

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + k^2 u = 0$$

أو

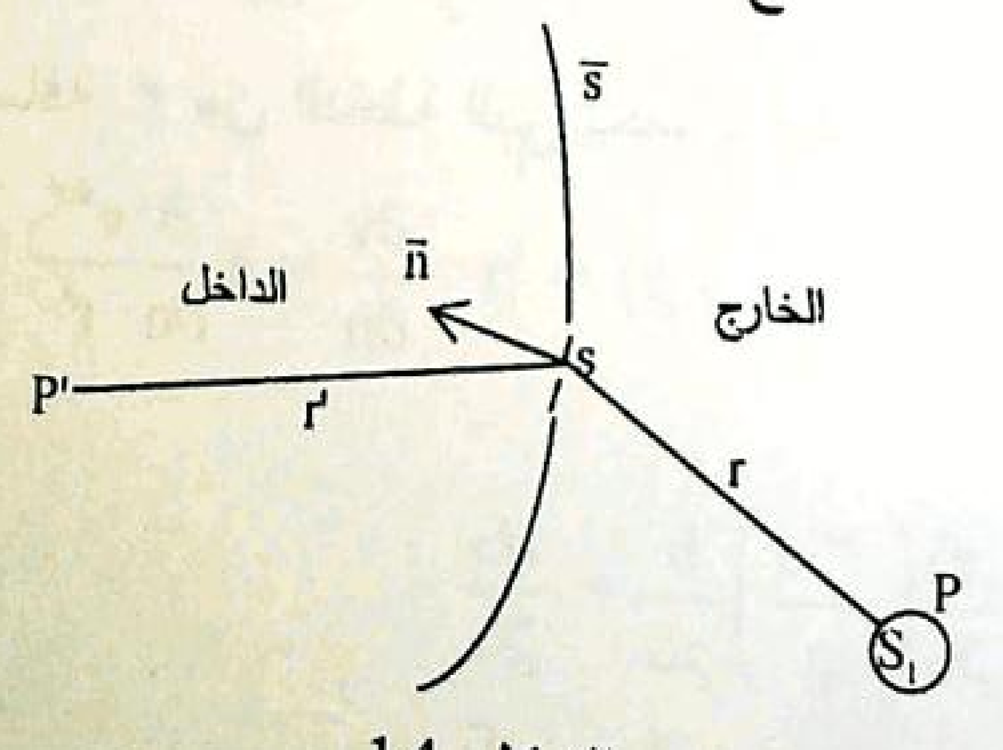
$$\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + k^2 ru = 0 \tag{2.15'}$$

فهي إذاً من الشكل $ru = e^{ikr}$ وبالتالي فإن الموجة كروية

$$u = \frac{e^{ikr}}{r} \tag{2.17}$$

لنلاحظ أننا عندما نمثل مصدر الضوء في وسط متناح بموجة كروية سلمية فإننا نهتم بشدة الضوء، بمربع الحقل الكهربائي، ولكننا نتخلى عن معرفة التفاصيل الأخرى المميزة له، عن معرفة استقطابه على سبيل المثال.

لنتصور أن لدينا حاجزاً لامنته S مغلقاً وفيه فتحة صغيرة s يقسم الفضاء إلى قسمين : داخل الحاجز وخارجه، يمثل، الشكل.14، مقطعاً له؛ تقع نقطة اللانهاية داخل وخارج الحاجز



الشكل.14

نطبق مبرهنة غرين لتعيين حل معادلة الموجة v

$$\nabla^2 v + k^2 v = 0$$

مستعينين بالموجة الكروية u (2.17)، لدينا من الصيغة الثانية لمبرهنة غرين ((1.(3.24)

$$\int \left(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u\right) d\tau = \int_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS$$

إن الطرف الأيسر معدوم في هذه المعادلة لأن v و u يحققان معادلة الموجة، نكامل الطرف الأيمن على السطح الخارجي لـ S ونفرض أن منبع الموجة الكروية u هي النقطة P الواقعة على مسافة r من s. نحيط هذه النقطة الشاذة بكرة صغيرة S_1 يتناهى نصف قطرها إلى الصفر ونكامل إذاً على السطحين S و S_1 يعطي التكامل على S_1 حيث عنصر السطح هو $\rho^2 d\Omega$، $d\Omega$ عنصر الزاوية المجسمة، وحيث يتجه الناظم نحو داخل الكرة المقدار

$$\cancelto{0}{\int_{S_1} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho}\rho^2 d\Omega} - \int_{S_1} v \times \frac{1}{\rho^2}\rho^2 d\Omega = -4\pi v_p$$

حيث v_p قيمة الموجة v في مركز الكرة S_1[2]، أي أن

$$0 = -4\pi v_p + \int_S \left(\frac{\partial v}{\partial n}\frac{e^{ikr}}{r} - v\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ikr}}{r}\right) dS \qquad (2.18)$$

تحدد لنا هذه المعادلة، حيث تلعب الموجة الكروية u دور دالة مساعدة، قيمة v في أي نقطة من نقاط الفضاء إذا عرفنا قيمتها وقيمة $\frac{\partial v}{\partial n}$ (غراديان v) على السطح S المكون من الحاجز $\bar{s}$ والفتحة s : $S = \bar{s} + s$. إنه لمن المقبول فيزيائياً، مادام السطح S لامتناه في الكبر، أن نتصور أن v و $\frac{\partial v}{\partial n}$ معدومان عندما نقترب من الحاجز $\bar{s}$ من الخارج

$$v = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \qquad (2.19)$$

كما أنه من المقبول فيزيائياً أن نتصور قيمة v و $\frac{\partial v}{\partial n}$ في الفتحة s مستقلتين عن بقية السطح، عن وجود الحاجز $\bar{s}$ أو عدم وجوده. يمكننا أن نتصور v في نقاط s كموجة كروية يحدثها منبع ضوئي نقطي في النقطة P' داخل السطح على مسافة r' من النقطة التي نحسب فيها في الفتحة s

$$v = a\frac{e^{ikr'}}{r'} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial n} = a\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ikr'}}{r'} \qquad (2.20)$$

---

[2] يجنبنا التكامل على السطحين على هذا النحو اللجوء إلى خاصة الدالة الكروية التي أعطيناها في ('(1.(3.14) $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(r)$ بالحصول على (2.18) مباشرة من الصيغة الثانية لمبرهنة غرين حيث يبقى طرفها الأيسر على حاله ويعطي تكامل الحد الثاني من الطرف الأيمن $4\pi v_p$ في النقطة الشاذة $r = 0$ وينعدم المقدار المكامل فيماعدا هذه النقطة لأن v و u يحققان معادلة الموجة.

نطبق مبرهنة غرين لتعيين حل معادلة الموجة v

$$\nabla^2 v + k^2 v = 0$$

(2.17)، لدينا من الصيغة الثانية لمبرهنة غرين ((3.24).1) مستعينين بالموجة الكروية u

$$\int \left(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u \right) d\tau = \int_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

إن الطرف الأيسر معدوم في هذه المعادلة لأن v و u يحققان معادلة الموجة، نكامل الطرف الأيمن على السطح الخارجي لـ S ونفرض أن منبع الموجة الكروية u هي النقطة P الواقعة على مسافة r من s. نحيط هذه النقطة الشاذة بكرة صغيرة S_1 يتناهى نصف قطرها إلى الصفر ونكامل إذاً على السطحين S و S_1 يعطي التكامل على S_1 حيث عنصر السطح هو $\rho^2 d\Omega$، $d\Omega$ عنصر الزاوية المجسمة، وحيث يتجه الناظم نحو داخل الكرة المقدار

$$\cancelto{0}{\int_{S_1} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho}\rho^2 d\Omega} - \int_{S_1} v \times \frac{1}{\rho^2}\rho^2 d\Omega = -4\pi v_p$$

حيث v_p قيمة الموجة v في مركز الكرة S_1[2]، أي أن

$$0 = -4\pi v_p + \int_S \left(\frac{\partial v}{\partial n}\frac{e^{ikr}}{r} - v\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ikr}}{r} \right) dS \tag{2.18}$$

تحدد لنا هذه المعادلة، حيث تلعب الموجة الكروية u دور دالة مساعدة، قيمة v في أي نقطة من نقاط الفضاء إذا عرفنا قيمتها وقيمة $\frac{\partial v}{\partial n}$ (غراديان v) على السطح S المكون من الحاجز $\bar{s}$ والفتحة s : $S = \bar{s} + s$. إنه لمن المقبول فيزيائياً، مادام السطح S لامتناه في الكبر، أن نتصور أن v و $\frac{\partial v}{\partial n}$ معدومان عندما نقترب من الحاجز $\bar{s}$ من الخارج

$$v = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \tag{2.19}$$

كما أنه من المقبول فيزيائياً أن نتصور قيمة v و $\frac{\partial v}{\partial n}$ في الفتحة s مستقلتين عن بقية السطح، عن وجود الحاجز $\bar{s}$ أو عدم وجوده. يمكننا أن نتصور v في نقاط s كموجة كروية يحدثها منبع ضوئي نقطي في النقطة P' داخل السطح على مسافة r' من النقطة التي نحسب فيها في الفتحة s

$$v = a\frac{e^{ikr'}}{r'} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial n} = a\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ikr'}}{r'} \tag{2.20}$$

---

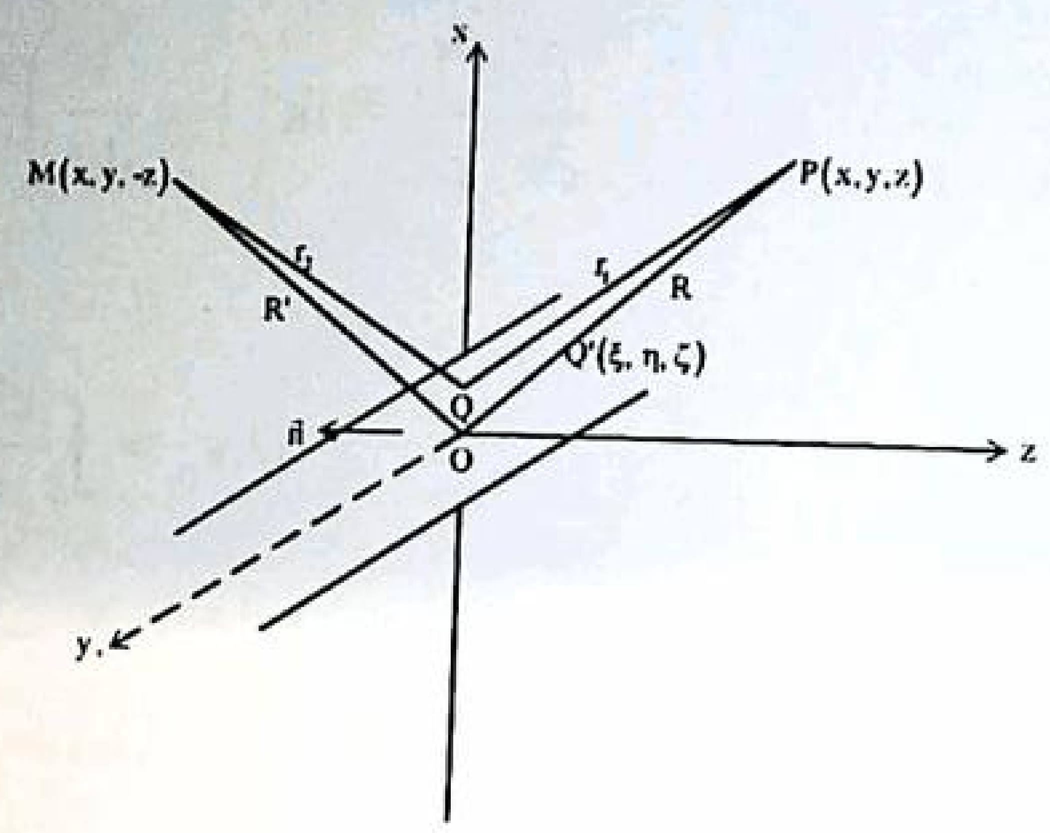
[2] يجنبنا التكامل على السطحين على هذا النحو اللجوء إلى خاصة الدالة الكروية التي أعطيناها في ('(3.14).1) $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(r)$ بالحصول على (2.18) مباشرة من الصيغة الثانية لمبرهنة غرين حيث يبقى طرفها الأيسر على حاله ويعطي تكامل الحد الثاني من الطرف الأيمن $4\pi v_p$ في النقطة الشاذة $r = 0$ وينعدم المقدار المكامل فيماعدا هذه النقطة لأن v و u يحققان معادلة الموجة.

لكن هذين الشرطين على الحدود (2.19) و(2.20) غير مقبولين رياضياً. ذلك أن تحقق (2.19) على سطح منته يعني أن v معدوم في كل نقاط الفضاء. ثم إن حل معادلة الموجة الذي يحقق الشروط على الحدود وحيد كما نعلم، أي أن الشرطين (2.19) و(2.20) متناقضان.

نتخلص من هذا التناقض بأن نشترط قيمة v وحدها على الحدود

$$v = 0 \quad \text{على} \quad \bar{s}$$
$$v = a\frac{e^{ikr'}}{r'} \quad \text{على} \quad s \qquad (2.21)$$

ونختار الموجة u بحيث تنعدم على الفتحة الصغيرة على الحاجز الذي نتصوره كمستو لامنته. لتكن النقطة M منبعاً ضوئياً (داخل الحاجز) و P خيالها (خارجه). تبعد هاتان النقطتان عن نقطة Q من الفتحة s معينة بالإحداثيات $(\xi, \eta, 0)$ المسافتين $r_1 = r_2$، الشكل.15،



الشكل.15

نأخذ الموجة المساعدة u في نقطة ما Q'، إحداثياتها (ξ, η, ζ) على الشكل

$$u = \frac{e^{ikr_1}}{r_1} - \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \qquad (2.22)$$

تبعد النقطتان P و M المسافتين r_1 و r_2

$$r_1^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \qquad (2.23)$$
$$r_2^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta + z)^2$$

لنحسب مشتق u بالنسبة لـ ζ

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{d}{dr_1}\left(\frac{e^{ikr_1}}{r_1}\right)\frac{\partial r_1}{\partial \zeta} - \frac{d}{dr_2}\left(\frac{e^{ikr_2}}{r_2}\right)\frac{\partial r_2}{\partial \zeta}$$

إن

$$\frac{\partial r_1}{\partial \zeta} = \frac{\zeta - z}{r_1} \quad \text{و} \quad \frac{\partial r_2}{\partial \zeta} = \frac{\zeta + z}{r_2}$$

بحيث يأخذ المشتق $\frac{\partial u}{\partial \zeta}$ من أجل النقطة $Q = (\xi, \eta, 0)$ على الحاجز

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{\partial u}{\partial n} = -2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\frac{z}{r}$$

$\frac{z}{r}$ هو - جيب تمام الزاوية $\left(\widehat{Qn, QP}\right)$، نكتبها $\cos\left(\widehat{n, r}\right)$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\cos\left(\widehat{n, r}\right) \qquad (2.24)$$

نستطيع الآن العودة إلى (2.18) لحساب v مع الشرطين $u = 0$ على الحاجز و(2.24) لنجد أن

$$4\pi v_p = \int_S -v\frac{\partial u}{\partial n}dS \qquad (2.18)'$$

لنبسط الحساب بأن نفرض النقطة P بعيدة نوعاً ما عن الحاجز و $kr = \frac{2\pi}{\lambda}r \gg 1$، فنكتب مشتق الموجة الكروية، بإهمال الحد $\frac{1}{ikr}$:

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{ikr}}{r} = ik\left(1 - \frac{1}{ikr}\right)\frac{e^{ikr}}{r} \simeq i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{e^{ikr}}{r} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{4\pi i}{\lambda}\frac{e^{ikr}}{r}$$

لتأخذ '(2.18) الشكل

$$i\lambda v_p = \int_S \frac{e^{ikr}}{r}\cos\left(\widehat{n, r}\right)v dS \qquad (2.18)''$$

لنفرض كما فعلنا في (2.21) أن v نابعة من مصدر ضوئي نقطي 'P داخل الحاجز يبعد عنه المسافة 'r؛ فنحصل على قيمة v_P في النقطة P خارج الحاجز بالعلاقة

$$i\lambda v_P = a\int_S \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'}\cos(\widehat{n, r})dS \qquad (2.18)'''$$

إن العلاقة '''(2.18) هي الصيغة الرياضية لمبدأ هويغنز: تنتشر الموجة الضوئية الواقعة على فتحة s كما لو كان كل عنصر سطح dS منها يصدر موجة كروية تحدد سعتها وطورها الموجة الواردة v. أما المعامل $\cos\left(\widehat{n, r}\right)$ فيقابل قانون لامبير الذي يحدد لمعان السطح.

لنلاحظ أن الشرط (2.21) الذي قادنا إلى النتيجة العامة في نظرية الإنعراج '''(2.18) ليس مقبولاً بصورة عامة: يستحيل أن تنعدم الموجة كلياً على السطح المعتم $\overline{s}$ كما يستحيل ألا تتأثر الموجة في الفتحة بوجود الحاجز $\overline{s}$. إنه مقبول من أجل أطوال الموجة الصغيرة بقدر كاف.

لنفرض أخيراً أن أبعاد الفتحة الواقعة في المستوي xy صغيرة أمام المسافتين 'r و r اللتين تعينان وضع المنبع الضوئي ووضع الراصد؛ لا يتغير المقدار $\frac{\cos\left(\widehat{n, r}\right)}{rr'}$ إلا قليلاً بحيث يمكن إخراجه من تحت إشارة التكامل بأخذ قيمة 'r و r في نقطة ما O من الفتحة نعتبرها مبدأ الإحداثيات وكتابة '''(2.18) على الشكل

$$i\lambda v_P = \frac{a}{RR'}\cos\left(\widehat{n, r}\right)\int e^{ik(r+r')}d\xi d\eta \qquad (2.25)$$

التكامل هنا كما في '''(2.18) على s لأن $v = 0$ على $\bar{s}$.

نكتب r و r' في التكامل بدليل R و R'. لدينا، (انظر الشكل.15)

$$r = \left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2\right]^{1/2} = \left[R^2 - 2(x\xi + y\eta) + (\xi^2 + \eta^2)\right]^{1/2}$$

$$= R\left[1 - \frac{2(x\xi + y\eta)}{R^2} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{R^2}\right]^{1/2}$$

ننشر المقدار $(1+\varepsilon)^{1/2}$ متوقفين عند الحد الثالث مع إهمال الحدود من الدرجة الثالثة بـ ξ و η

$$(1+\varepsilon)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{8} + \dots$$

فنجد

$$r = R - \frac{x}{R}\xi - \frac{y}{R}\eta + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R} - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2R^3}$$

نكتبه بدليل جيبي التمام الموجهين $\frac{x}{R}$ و $\frac{y}{R}$ رامزين لهما بـ α و β على الترتيب، لنجد في النهاية

$$r = R - \alpha\xi - \beta\eta + \frac{\xi^2 + \eta^2 - (\alpha\xi + \beta\eta)^2}{2R}$$

نحسب r' بنفس الطريقة وبنفس التقريب مع الملاحظة أن جيبي تمام الشعاع الوارد من P' إلى O هما $-\alpha_0$ و $-\beta_0$ لنجد أن

$$r' = R' + \alpha_0\xi + \beta_0\eta + \frac{\xi^2 + \eta^2 - (\alpha_0\xi + \beta_0\eta)^2}{2R'}$$

وهكذا فإن

$$e^{ik(r+r')} = e^{ik(R+R')} + e^{-ik\phi} \tag{2.26}$$

حيث كتبنا اختصاراً

$$\phi = (\alpha - \alpha_0)\xi + (\beta - \beta_0)\eta - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} + \frac{(\alpha\xi + \beta\eta)^2}{2R} + \frac{(\alpha_0\xi + \beta_0\eta)^2}{2R'} \tag{2.27}$$

وأخيراً فإن صيغة الانعراج هي

$$i\lambda v_P = \frac{a}{RR'}\cos\left(\widehat{n, R}\right)e^{ik(R+R')}\int e^{-ik\phi}d\xi d\eta \tag{2.28}$$

<u>مبرهنة بابينه Babinet.</u>

لنرمز بـ v_1 إلى الحالة التي درسناها، فتحة s وحاجز $\bar{s}$ $S = s + \bar{s}$، بـ v_2 إلى الحالة المتممة، بذات

إضاءة نقطة الرصد في حالة عدم v مفتوحة؛ لتكن $\bar{\bar{s}}$ وبقية السطح ،$\bar{s}$ مغلقة، s مصدر الضوء، حيث وجود أي عائق بين هذه النقطة ومصدر الضوء. تنص المبرهنة في هذه الحالة على ما يلي:

$$v_1 + v_2 = v \tag{2.29}$$

يعتمد البرهان على العلاقة (2.18)

$$4\pi v_p = \int_S \left(\frac{\partial v}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - v \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right) dS$$

إن التكامل مقتصر على السطح s في الحالة الأولى ويعطينا v_1 وعلى بقية السطح $\bar{\bar{s}}$ في الحالة الثانية ليعطينا v_{2p} والتكامل الكلي هو على $S = \bar{s} + \bar{\bar{s}} = \bar{s} + s$ الذي يعطينا تعريفاً v؛ وهو المطلوب.

تعرف هذه المبرهنة باسم مبدأ بابينه ولا تصح إلا في حالة الحواجز السوداء التي تمتص الضوء ولكنها لا تعكسه؛ إلا أنه من الممكن إعادة صياغتها لتشمل الحواجز العاكسة وتعبر بدقة عن المبدأ بدليل الحقلين $\bar{E}$ و $\bar{B}$. لكن ذلك يقتضي الحل المضبوط لمعادلات ماكسويل وهذا ما فعله مايكسنر Meixner عام 1948.

4.2- انعراج فراونهوفر Fraunhofer

لنفرض أن R و R' في (2.28) لامنتهيين في الكبر : $R \to \infty$ ، $R' \to \infty$ ، المنبع الضوئي النقطي P' ونقطة الرصد P في اللانهاية. لدينا إذاً أمواج مستوية نحصل عليها بواسطة مسدد ونرصدها بالتلسكوب كرصد ظاهرة الانعراج في الأجواء العليا. تختفي الحدود المتناسبة مع $\frac{1}{R}$ و $\frac{1}{R'}$ في (2.27) ولا يبقى إلا الحدين المتناسبين مع $a = \alpha - \alpha_0$ و $b = \beta - \beta_0$ ونكتب الطور ϕ على الشكل

$$\phi = a\xi + b\eta \tag{2.30}$$

$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ جيوب تمام الأشعة الواردة α, β, γ جيوب تمام الأشعة المنعرجة ξ و η إحداثيي نقطة ما من الفتحة التي نفرضها مستوية.

أ- لنبدأ بفتحة مستطيلة طولها $2A$ وعرضها $2B$ مركزها مبدأ الإحداثيات $(\xi = 0, \eta = 0)$. سيتناهى الحد خارج إشارة التكامل في (2.28) إلى مقدار ثابت. نضع $\frac{1}{\lambda}$ المتناسبة مع k في الطرف الأيمن ويتحول التكامل على السطح إلى جداء تكاملين خطيين بفضل (2.30)

$$v = Ck\int_{-A}^{+A} e^{-ika\xi} d\xi \int_{-B}^{+B} e^{-ikb\eta} d\eta = Ck \frac{2\sin kaA}{ka} \times \frac{2\sin kbB}{kb} \tag{2.31}$$

نكتبه على الشكل

v إضاءة نقطة الرصد في حالة عدم مصدر الضوء، حيث s مغلقة، $\bar{s}$، وبقية السطح $\bar{\bar{s}}$ مفتوحة؛ لتكن وجود أي عائق بين هذه النقطة ومصدر الضوء. تنص المبرهنة في هذه الحالة على ما يلي:

$$v_1 + v_2 = v \quad (2.29)$$

يعتمد البرهان على العلاقة (2.18)

$$4\pi v_P = \int_S \left(\frac{\partial v}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - v \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right) dS$$

إن التكامل مقتصر على السطح s في الحالة الأولى ويعطينا v_1 وعلى بقية السطح $\bar{\bar{s}}$ في الحالة الثانية ليعطينا v_{2p} والتكامل الكلي هو على $S = \bar{\bar{s}} + \bar{s} = \bar{s} + s$ الذي يعطينا تعريفاً v؛ وهو المطلوب.

تعرف هذه المبرهنة باسم مبدأ بابينه ولا تصح إلا في حالة الحواجز السوداء التي تمتص الضوء ولكنها لا تعكسه؛ إلا أنه من الممكن إعادة صياغتها لتشمل الحواجز العاكسة وتعبر بدقة عن المبدأ بدليل الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$. لكن ذلك يقتضي الحل المضبوط لمعادلات ماكسويل وهذا ما فعله مايكسنر Meixner عام 1948.

4.2- انعراج فراونهوفر Fraunhofer

لنفرض أن R و R' في (2.28) لامنتهيين في الكبر : $R \to \infty$ ، $R' \to \infty$ ، المنبع الضوئي النقطي P' ونقطة الرصد P في اللانهاية. لدينا إذاً أمواج مستوية نحصل عليها بواسطة مسدد ونرصدها بالتلسكوب كرصد ظاهرة الانعراج في الأجواء العليا. تختفي الحدود المتناسبة مع $\frac{1}{R}$ و $\frac{1}{R'}$ في (2.27) ولا يبقى إلا الحدين المتناسبين مع $a = \alpha - \alpha_0$ و $b = \beta - \beta_0$ ونكتب الطور ϕ على الشكل

$$\phi = a\xi + b\eta \quad (2.30)$$

$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ جيوب تمام الأشعة الواردة α, β, γ جيوب تمام الأشعة المنعرجة ξ و η إحداثيي نقطة ما من الفتحة التي نفرضها مستوية.

أ- لنبدأ بفتحة مستطيلة طولها $2A$ وعرضها $2B$ مركزها مبدأ الإحداثيات $(\eta = 0, \xi = 0)$. سيتناهى الحد خارج إشارة التكامل في (2.28) إلى مقدار ثابت. نضع $\frac{1}{\lambda}$ المتناسبة مع k في الطرف الأيمن ويتحول التكامل على السطح إلى جداء تكاملين خطيين بفضل (2.30)

$$v = Ck \int_{-A}^{+A} e^{-ika\xi} d\xi \int_{-B}^{+B} e^{-ikan} d\eta$$
$$= Ck \frac{2\sin kaA}{ka} \times \frac{2\sin kbB}{kb} \quad (2.31)$$

نكتبه على الشكل

$$v = Ck4AB\frac{\sin kaA}{kaA}\cdot\frac{\sin kaB}{kaB} \quad (2.31)'$$

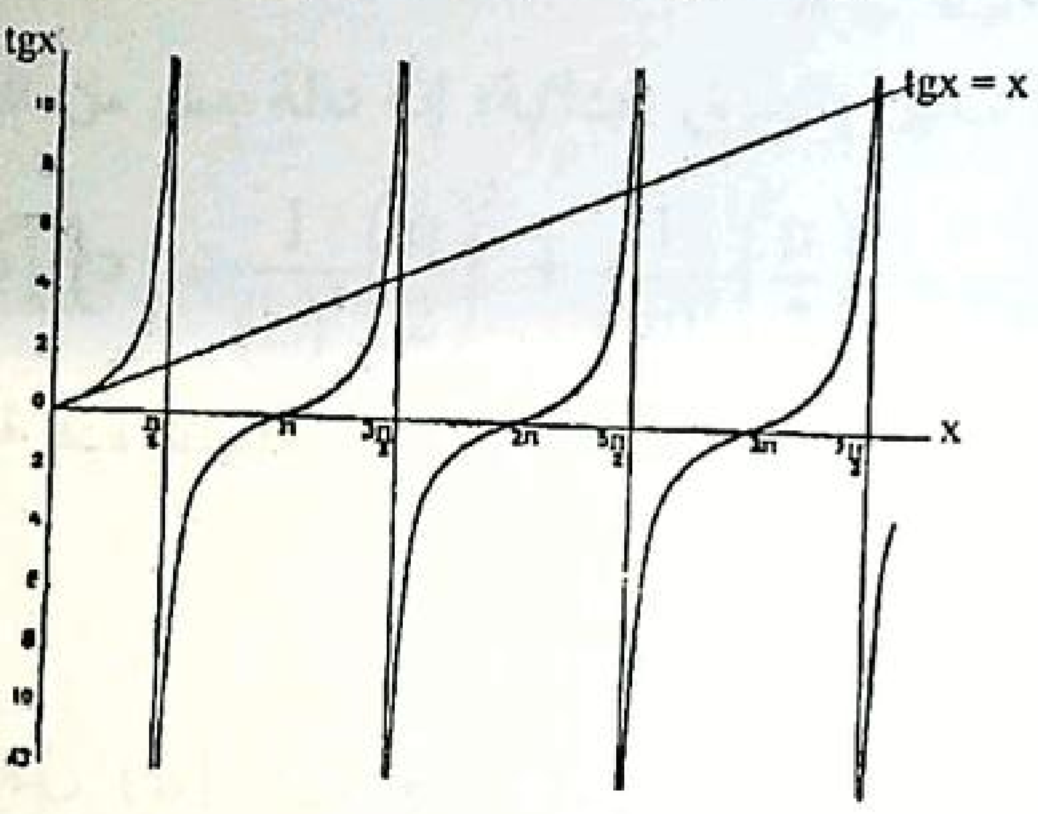
$$= Ck4AB\,\frac{\sin x}{x}\,\frac{\sin y}{y} \quad (2.31)''$$

حيث $x = kaA$ و $y = kbB$.

إن $Ck4AB$ ، المتناسبة مع سطح الفتحة المستطيلة، هي سعة الموجة الواردة، نرمز لشدتها بـ I_0 والنسبة بين هذه الشدة وشدة الموجة المنعرجة v^2 التي نرمز لها بـ I هي من الشكل

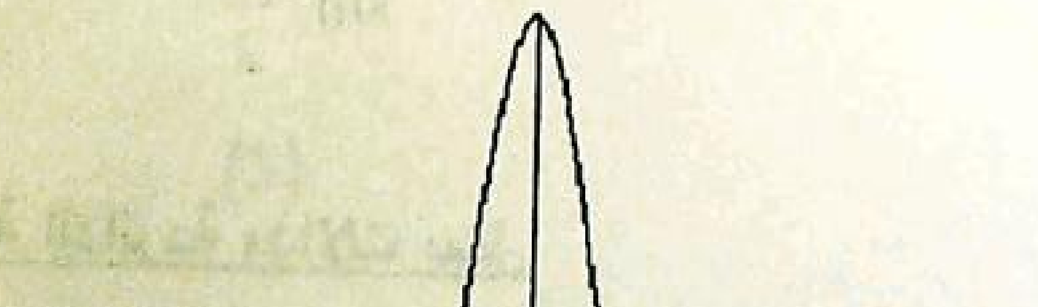
$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \quad (2.32)$$

للدالة $X = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ قيمة عظمى رئيسية تساوي 1 من أجل $x = 0$ ، تليها قيم عظمى ثانوية، ينعدم فيها مشتق الدالة، تقابل القيم $tgx = x$ الواقعة في جوار النقاط $x = \pm\frac{3}{2\pi}$ ، $x = \frac{5}{2\pi}$ ، الخ والمتقاربة منها أكثر فأكثر، الشكل.16. تأخذ الدالة فيها القيم 0,047 ، 0,017 ، 0,008 ...



الشكل.16

أما القيم الصغرى والمساوية للصفر فهي من أجل $x = \pm\pi$ ، $x = \pm 2\pi$ ، ... الشكل.17a. يبين، الشكل.17b، نسبة القيمة العظمى الثانوية الأولى إلى القيمة العظمى الرئيسية



الشكل.17b

الشكل. 17a

لنتصور الآن الفتحة المتسطيلة وقد تحولت إلى شق $A \gg B$. لنلاحظ أن المسافة الزاوية $b = \beta - \beta_0$ مقيسة بالمجال الفاصل بين القيمة العظمى الرئيسية وأول قيمة صغرى $y = \pi$ هي حسب "(2.31)

$$b = \frac{\pi}{kB} = \frac{\lambda}{2B}$$

وتكبر كلما صغر طول المستطيل B. لم يعد من الممكن في حالة الشق اعتبار المنبع الضوئي نقطياً وإنما كخط مضيء تصدر عناصره نوراً غير متسق؛ علينا إذاً جمع الشدات الناتجة عن هذه العناصر، أي حساب التكامل على القيم $b = \beta - \beta_0$ بين حدين $\pm b_1$ يحددهما طول شق المسدد. يجب أن نستبدل بـ $\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2$ في (2.32) التكامل

$$\int_{-b_1}^{+b_1}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 db = \frac{1}{kB}\int_{-y_1}^{+y_1}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 dy$$

حيث $y_1 = kb_1B$؛ يمكن لحساب التكامل أخذ $y_1 = \infty$ ونستبدل بـ $\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2$ في (2.32) فنحصل على التكامل المعروف

$$c\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 dy = c\pi$$

سنثبت من جديد بعد قليل صحة هذه النتيجة.

<u>ملاحظة:</u>

تتيح العلاقة '(2.31) تحديد العامل $f^2(\alpha)$ الناتج عن عرض بل وشكل كل حز من حزوز المحززة في (2.3) بكتابته على الشكل $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ لتصبح (2.3)

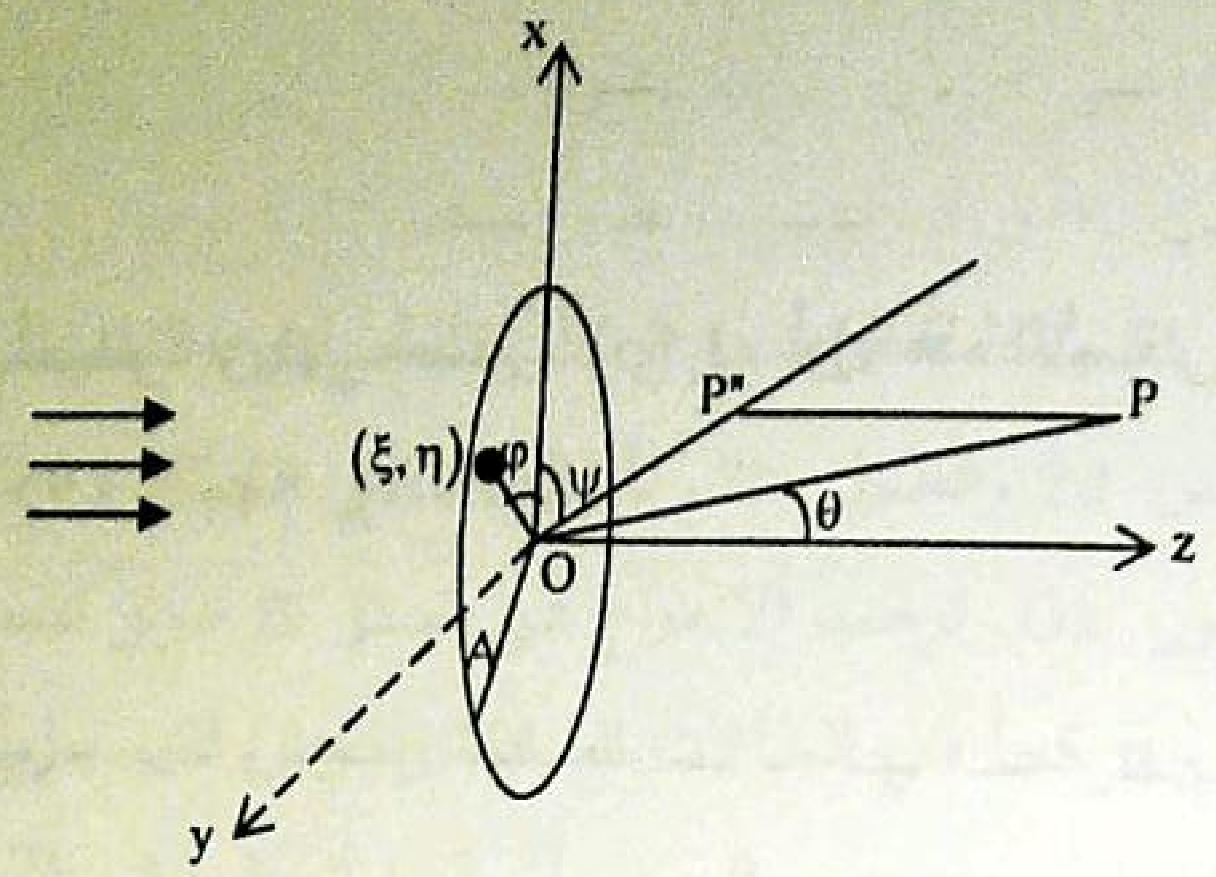
$$I = \frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{\sin^2 N\frac{\Delta}{2}}{\sin^2\frac{\Delta}{2}} \qquad (2.33)$$

<u>الفتحة الدائرية ودالات بسل</u>

يلعب الانعراج عبر فتحة دائرية دوراً بالغ الأهمية في دراسة التلسكوب (المقارب) والمجهر وعدسة التصوير وفي سيرورة الإبصار. نعين وضع النقطة (ξ, η) في الفتحة بالإحداثيات القطبية. $\xi = r\cos\varphi$ ، $\eta = r\sin\varphi$ ، $r \in [0, A]$ حيث A نصف قطر الفتحة.

نفرض الأشعة الواردة عمودية على مستوى الفتحة xy ، الشكل.18، لتكن θ الزاوية التي يعملها الشعاع المنعرج مع الشعاع الوارد و ψ الزاوية التي يعملها "P مسقط P على المستوى xy مع Ox. لدينا

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0 \quad ، \quad a = \alpha = \sin\theta\cos\psi \quad ، \quad b = \beta = \sin\theta\sin\psi \qquad (2.34)$$



الشكل.18

تأخذ ϕ في (2.30) الشكل $r\sin\theta\cos(\varphi - \psi)$ ونكتب التكامل الثنائي على ξ و η في (2.31) على الشكل

$$v = ck\int_0^A r dr \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ikr\sin\theta\cos(\varphi-\psi)} d\varphi \tag{2.35}$$

إن التكامل على المتغير φ مستحيل بالطرق البدائية؛ إنه دالة بسل من الرتبة 0. لدينا

$$J_0(\rho) = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^6 + \dots \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{\pm i\rho\cos\alpha} d\alpha \tag{2}$$

مشتقها بالنسبة لـ ρ هي دالة بسل من الرتبة الأولى

$$J_1(\rho) = -\frac{d}{d\rho}J_0(\rho) = \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{1}{1!2!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!3!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^4 - \dots\right) \tag{3}$$

تخضع J_0 للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_0}{d\rho}\right) + \rho J_0 = 0 \tag{4}$$

ومنها ومن (3)

$$\int_0^{\rho} \rho' J_0(\rho') d\rho' = \rho J_1(\rho) \tag{5}$$

ونرى بالتالي أن متجهة الموجة المنعرجة هي

$$v = 2\pi ck\int_0^A J_0(kr\sin\theta) r dr = \frac{2\pi ck}{k^2\sin^2\theta}\int_0^{kA\sin\theta} J_0(\rho')\rho' d\rho' \tag{2.36}$$

$$= \frac{2\pi cA}{\sin\theta} J_1(kA\sin\theta)$$

تأخذ v من أجل $\sin\theta = \theta = 0$ أي من أجل مركز الانعراج $a = \alpha = \alpha_0 = 0$ و $b = \beta = \beta_0 = 0$ القيمة

$$v = \frac{kA2\pi cA}{\sin\theta kA} J_1(k\sin\theta A) = 2\pi ckA^2\frac{J_1(0)}{0}$$

وتساوي حسب (3)

$$v = \pi c k A^2 \qquad (2.37)$$

هو من أجل $J_1(\rho) = 0$ أول هذه الأصفار $J_1(\rho)$. فهي أصفار v وهي قيمتها الأعظمية، أما أصفار

$$(k\sin\theta A)_1 = \rho_1 = 3{,}95 = 0{,}61 \cdot 2\pi \qquad (2.38)$$

ومنه

$$\sin\theta_1 = 0{,}61\frac{\lambda}{A} \qquad (2.38)'$$

تتتابع الأصفار من أجل القيم الكبرى لـ ρ، حيث تأخذ دالة بسل من الرتبة الأولى الشكل

$$J_1(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\sin\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)$$

التي تساوي الصفر من أجل

$$\sin\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

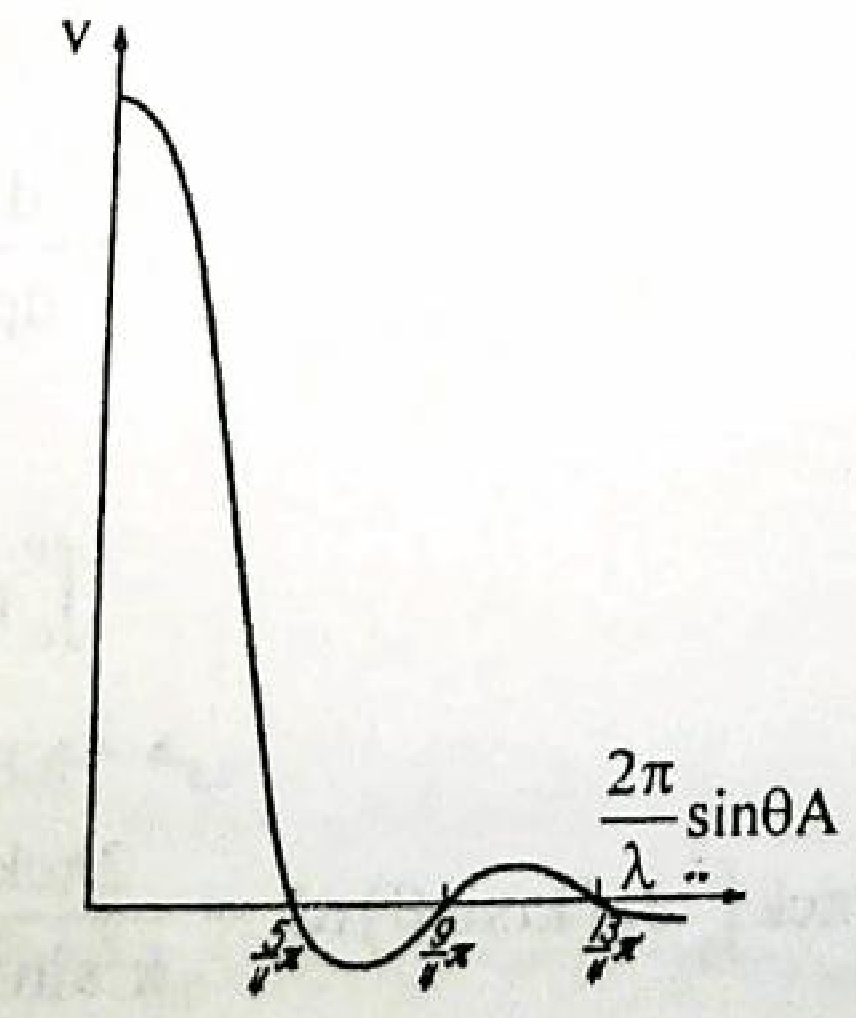
أي من أجل

$$\rho_n = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi$$

و

$$\sin\theta_n = \left(n + \frac{1}{4}\right)\frac{\lambda}{2A} \qquad (2.39)$$

يظهر، الشكل.19، مبيان v ، والقيمة العظمى للشدة في مركز الانعراج المحاطة بحلقات مظلمة متساوية الأبعاد تقريباً تفصل بينها نهايات عظمى صغيرة تضعف شدتها بسرعة.

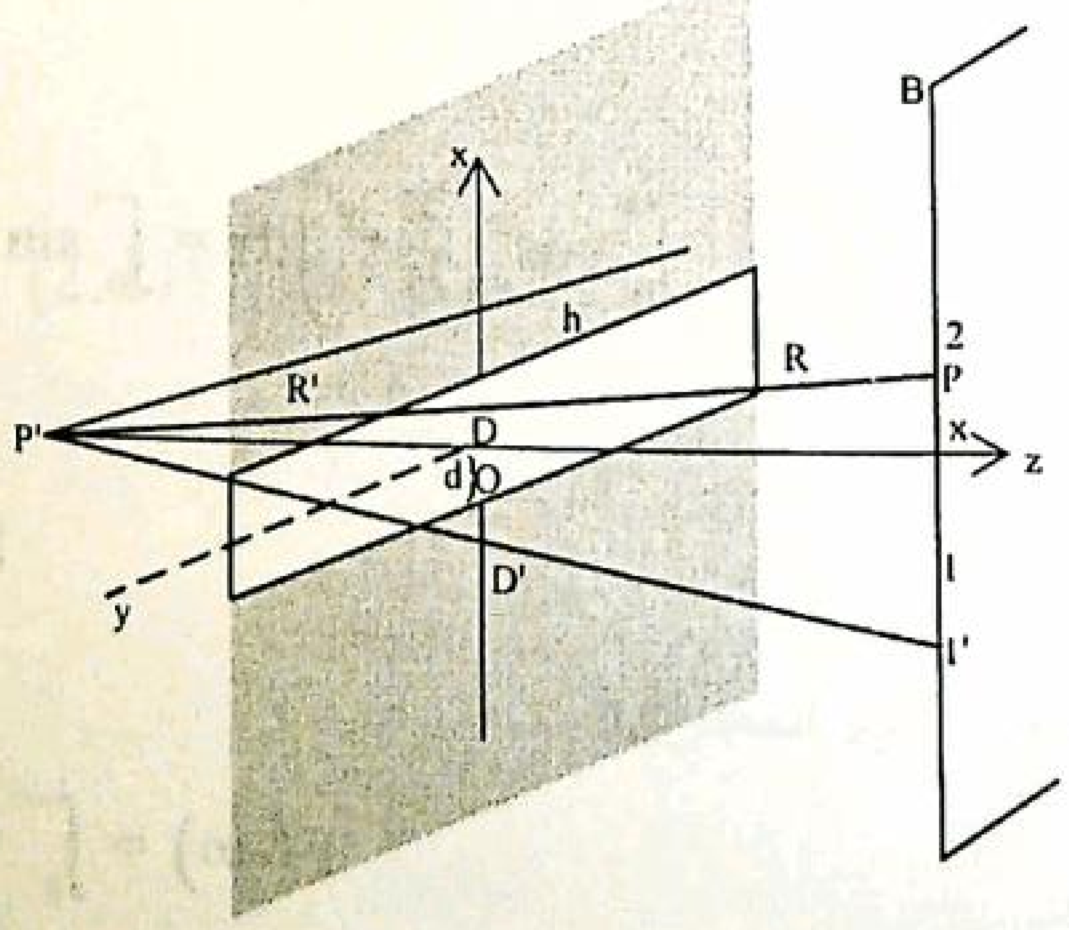


الشكل.19

تحدد النهاية العظمى المركزية، المحاطة بالحلقة المظلمة الأولى أبعاد الحقل المركزي الذي تولده القطرات المائية في الجو المحيط بالشمس والقمر – أبعاد هذين التاجين – التي تعطيها العلاقة '(2.38)، ذلك أن النهايات العظمى الصغيرة والمتناقصة لا تلعب دوراً يذكر في هذه الظاهرة.

يقع المنبع الضوئي النقطي P' ونقطة الرصد P على المسافتين المنتهيتين R' و R من الفتحة المستطيلة الضيقة ذات العرض $2d$ والطول $2h$. نأخذ كما في الشكل.15 الفتحة في المستوي xy، وعرضها $2d$ في اتجاه المحور Ox. نرصد الانعراج في مستو B مواز لمستوي الفتحة. نعين وضع نقاط الفتحة بالإحداثيتين ξ و η كما في الحالات السابقة ونفرض للتبسيط أن P' و P على استقامة واحدة؛ هذا يعني أن جيوب التمام $\alpha = \alpha_0$ و $\beta = \beta_0$ وأن الحد الخطي في (2.27) معدوم. محذور هذا التبسيط أن النقطة D التي يتقاطع فيها المستقيم PP' مع الفتحة الضيقة فرضاً ستقع خارج الفتحة إذا ما ابتعدنا ابتعاداً كبيراً عن منطقة الظل المعينة بالنقطتين (1) و(2)، نقطتي تقاطع المستوي B مع مستوي الشكل، الشكل.20. ويجب إذاً ألا نتجاوز منطقة الظل الهندسي كثيراً، أبعد من النقطة $1'$ على سبيل المثال المقابلة للنقطة D'، المحذور الثاني لهذا التبسيط، الذي يأخذ D كمبدأ لقياس الإحداثيات η، ξ، هو أن إحداثيتي D تابعتان لوضع نقطة الرصد P في المستوى B، لذلك فلن ننظر إلا للنقاط P الواقعة في مستوى الشكل، D واقعة على المحور Ox و $\eta = 0$ في هذه الحالة. نأخذ أخيراً P' على استقامة مركز الفتحة الذي نأخذه مبدأ لنظمة المحاور Oxy. لدينا في مستوي الشكل $\beta = \beta_0 = 0$. نكتب α^2 بدليل γ^2، $\alpha^2 = 1 - \gamma^2$، γ هي جيب تمام الشعاع "المنعرج" DP، إنه $\cos(\widehat{n, R})$ المعهود، n العمودي على مستوى الفتحة في اتجاه Oz. يأخذ الطور ϕ في (2.27) بعد انعدام الحد الخطي الشكل

$$\begin{aligned}\phi &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} + \frac{\alpha^2\xi^2}{2R} + \frac{\alpha^2\xi^2}{2R'} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\left(\gamma^2\xi^2 + \eta^2\right)\end{aligned} \tag{2.40}$$



الشكل.20

نكتب التكامل الثنائي في (2.28) على شكل جداء تكاملين

$$i\lambda v_p = \frac{a\gamma}{RR'} e^{ik(R+R')} \int_{-d-\xi_D}^{d-\xi_D} e^{i\phi_\xi \xi^2} d\xi \int_{-h}^{+h} e^{i\phi_\eta \eta^2} d\eta \quad (2.41)$$

حيث كتبنا $k\phi$ على الشكل

$$k\phi = -\frac{1}{2}k\gamma^2\xi^2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) - \frac{1}{2}k\eta^2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$$
$$= -\phi_\xi \xi^2 - \phi_\eta \eta^2$$

حيث وضعنا $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{1}{f}$

$$\begin{cases} \phi_\xi = \frac{1}{2}\gamma^2 k\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) = \frac{\pi\gamma^2}{\lambda f} \\ \phi_\eta = \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) = \frac{\pi}{\lambda f} \end{cases} \quad (2.42)$$

والتكامل على ξ محسوباً بأخذ D مبدأ قياس الإحداثيات ξ، η.

يطلق على التكامل من الشكل

$$F(w) = \int_0^w e^{i\frac{\pi}{2}\tau^2} d\tau = \int_{-w}^0 e^{i\frac{\pi}{2}\tau^2} d\tau \quad (2.43)$$

اسم تكامل فرينل؛ يأخذ هذا التكامل من أجل $w=\infty$ الشكل

$$F(\infty) = \int_0^\infty e^{i\frac{\pi}{2}\tau^2} d\tau \equiv \int_0^\infty \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)d\tau + i\int_0^\infty \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)d\tau$$

ويساوي بالعودة إلى تكامل لابلاس $\int_0^\infty e^{-\alpha\tau^2}d\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$، $\alpha = -\frac{i\pi}{2}$، المقدار

$$F(\infty) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{-i}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{1+i}{2} \quad (2.44)$$

التي تبين أن

$$\int_0^\infty \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)d\tau = \int_0^\infty \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)d\tau = \frac{1}{2}$$

لدينا أيضاً

$$F(-w) = -F(w) \quad (2.45)$$

وبشكل خاص

$$F(-\infty) = \int_0^{-\infty} e^{i\frac{\pi}{2}\tau^2} d\tau = -F(\infty) \quad (2.45)'$$

نضع التكاملين في (2.41) بصيغة تكاملي فرينل. لدينا من أجل التكامل الثاني

$$\int_{-h}^{+h} e^{i\phi_\eta \eta^2} d\eta = 2\int_0^h e^{i\phi_\eta \eta^2} d\eta = 2\int_0^h e^{i\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{2}\eta}{\sqrt{\lambda f}}\right)^2} d\eta$$

أي أن التكامل، بأخذ $\eta' = \left(\frac{2}{\lambda f}\right)^{1/2} \eta$، هو

$$2\left(\frac{\lambda f}{2}\right)^{1/2} F\left[\left(\frac{2}{\lambda f}\right)^{1/2} h\right]$$

إن طول الفتحة كبير جداً بالنسبة لعرضها، نستبدل بـ $F(h)$ $F(\infty)$ ونكتب التكامل على الشكل

$$\int_{-h}^{+h} e^{i\phi_\eta \eta^2} d\eta = \sqrt{2\lambda f}\, F(\infty) \qquad (2.46)$$

نحسب بنفس الشكل التكامل الأول، حيث حدي التكامل مختلفين لنجد أن

$$\int_{-d-\xi_D}^{d+\xi_D} e^{i\phi_\xi \xi^2} d\xi = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{\lambda f}{2}}\left(F(w_2) - F(w_1)\right) \qquad (2.47)$$

حيث

$$\left.\begin{matrix} w_2 \\ w_1 \end{matrix}\right\} \frac{\gamma(\pm d - \xi_D)}{\sqrt{\frac{\lambda f}{2}}} \qquad (2.47)'$$

نضع هذه القيم في (2.41) آخذين (2.44) بعين الاعتبار لنجد :

$$iv_P = af\frac{e^{ik(R+R')}}{RR'}\left(F(w_2) - f(w_1)\right)\left(\frac{1+i}{2}\right) \qquad (2.48)$$

نحصل على القيم المطرافية لشدة الموجة $|v|^2$ في النقاط x من مستوى الرصد بحساب $\frac{d|v|^2}{dx} = 0$

واضح من الشكل.20 أن النقطة x متناسبة مع ξ_D : $\frac{R'+R}{R'} = \frac{x}{\xi_D}$، نحسب إذاً المشتق بالنسبة لـ ξ_D؛ انعدام مشتق $|v|^2$ هو انعدام مشتق v. ينتج عن تساوي المشتقين $F'(w_1) = F(w_2)$ في نقط انعدام v أن

$$e^{i\frac{\pi}{2}w_2^2} = e^{i\frac{\pi}{2}w_1^2} \quad ; \quad e^{i\frac{\pi}{2}(w_2^2 - w_1^2)} = 1$$

أو

$$\frac{\pi}{2}\left(w_2^2 - w_1^2\right) = -2\pi\ell$$

حيث ℓ عدد صحيح موجب أو سالب. نكتب هذه العلاقة بدليل '(2.47) على الشكل

$$(w_2 - w_1)(w_2 + w_1) = \frac{2\gamma d}{\sqrt{\frac{\lambda f}{2}}} \cdot \frac{-2\gamma\xi_D}{\sqrt{\frac{\lambda f}{2}}} = -4\ell$$

ومنه قيم ξ_D ومعها x التي تقابل القيم المطرافية

$$\xi_D = \frac{\lambda f}{2\gamma^2 d}\ell \qquad (2.49)$$

والمسافة بين نهايتين، بين هدبين هي

$$\Delta = \frac{\lambda f}{2\gamma^2 d} \qquad (2.50)$$

تتقلص هذه المسافة بارتفاع d، ولكنها تزداد بازدياد λ و f. يصح الأمر نفسه بطبيعة الحال على x حيث ترصد الأهداب.

حلزون كورنو Cornu

إن تكامل فرينل دالة صحيحة (entire) متسامية يمكن نشرها على شكل سلسلة متقاربة حيثما كان في المستوي المنتهي. ننظر لها كتطبيق للمستقيم $[-\infty, +\infty]$ $w \in$ في المستوى العقدي حيث الإحداثيات $X = \int_0^w \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)d\tau$ ، $Y = \int_0^w \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)d\tau$.

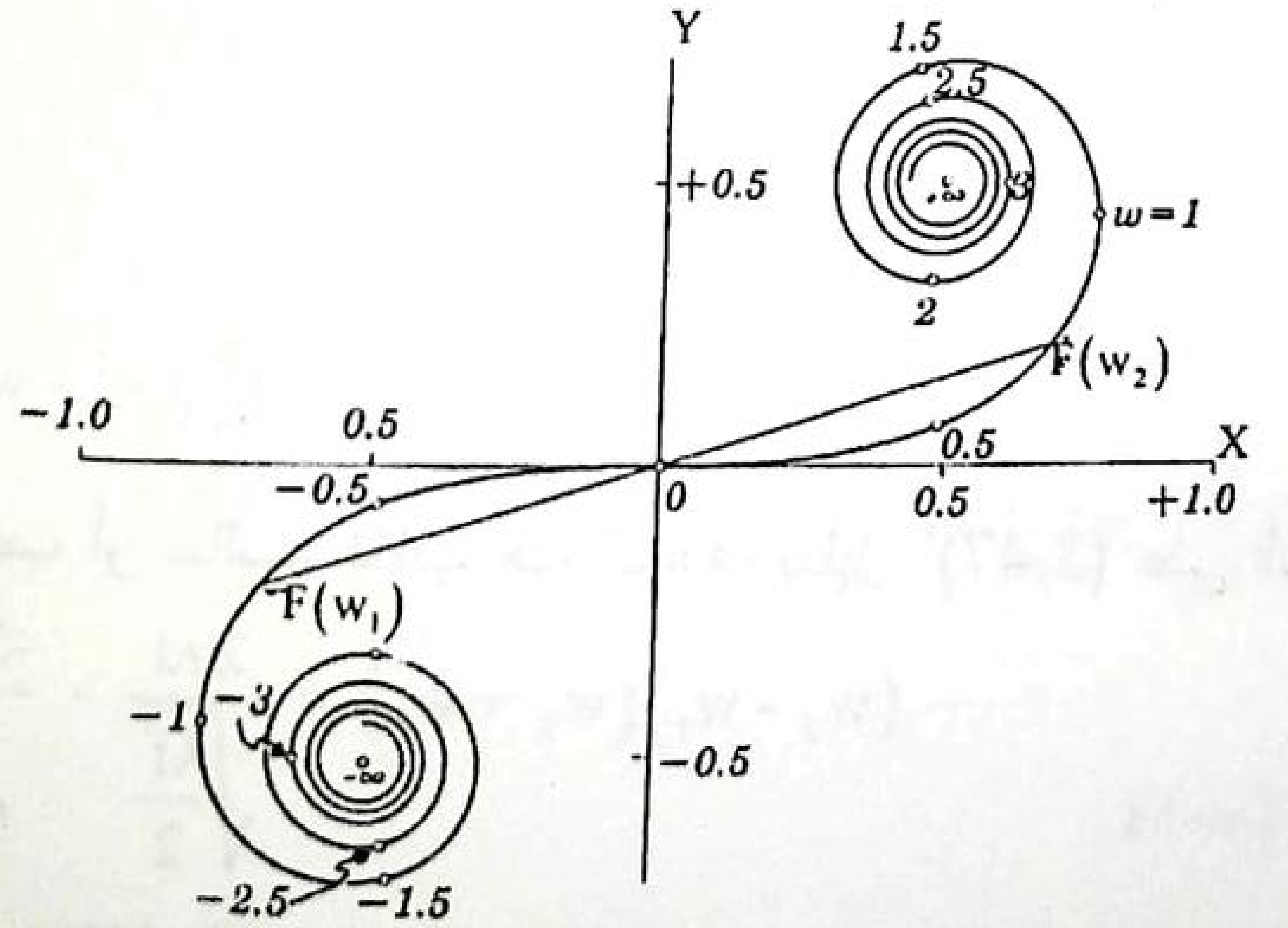
وهو تطبيق متقايس يحفظ الأطوال لأن

$$\frac{dF}{dw} = e^{i\frac{\pi}{2}\tau^2} \quad , \quad \left|\frac{dF}{dw}\right| = 1 \quad \text{و} \quad |dF| = |dw|$$

كما أنه تطبيق يحفظ الزوايا (Conformal) لأنه إذا نظرنا لـ w كعدد عقدي $w = \rho e^{i\theta}$ فإن $F(w) = e^{i\theta}F(\rho)$ وبالتالي $\frac{F(w_2)}{F(w_1)} = e^{i(\theta_2 - \theta_1)}$ من أجل متغيرين لا على التعيين $w_2 = \rho e^{i\theta_2}$ و $w_1 = \rho e^{i\theta_1}$.

ينتج عن هذين الانحفاظين أن طول المنحني $F(w)$ بين $F(-\infty) = -\frac{1+i}{2}$ و $F(+\infty) = \frac{1+i}{2}$ لامنتهي، أن مماسه في النقطة O أفقي والنقطة O نقطة انعطاف $\left.\frac{dF}{dw}\right|_{w=0} = 1$ ، $\left.\frac{d^2F}{dw^2}\right|_{w=0} = 0$.

أما اتجاه المماس فغير محدد من أجل $w = \pm\infty$ يقترب المنحني من النقطتين $F(\pm\infty)$ على شكل حلزون، إحداثيتهما هي $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ و $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$، الشكل. 21



الشكل.21

يمثل هذا المنحني بالإضافة لكل قيم F كل سعات موجات الانعراج. ولدينا تحديداً من (2.48) التي نعيد كتابتها على الشكل، حيث نذكر أن $f = \frac{RR'}{R+R'}$،

$$v_P = \frac{1-i}{2} a \frac{e^{ik(R+R')}}{R+R'}\left[F(w_2) - F(w_1)\right]$$
$$= \frac{1-i}{2} v_0 \left[F(w_2) - F(w_1)\right] \quad (2.48)'$$

وذلك لنظهر v_0 التي هي سعة الموجة في النقطة P في حال عدم وجود الحائل والفتحة فيه

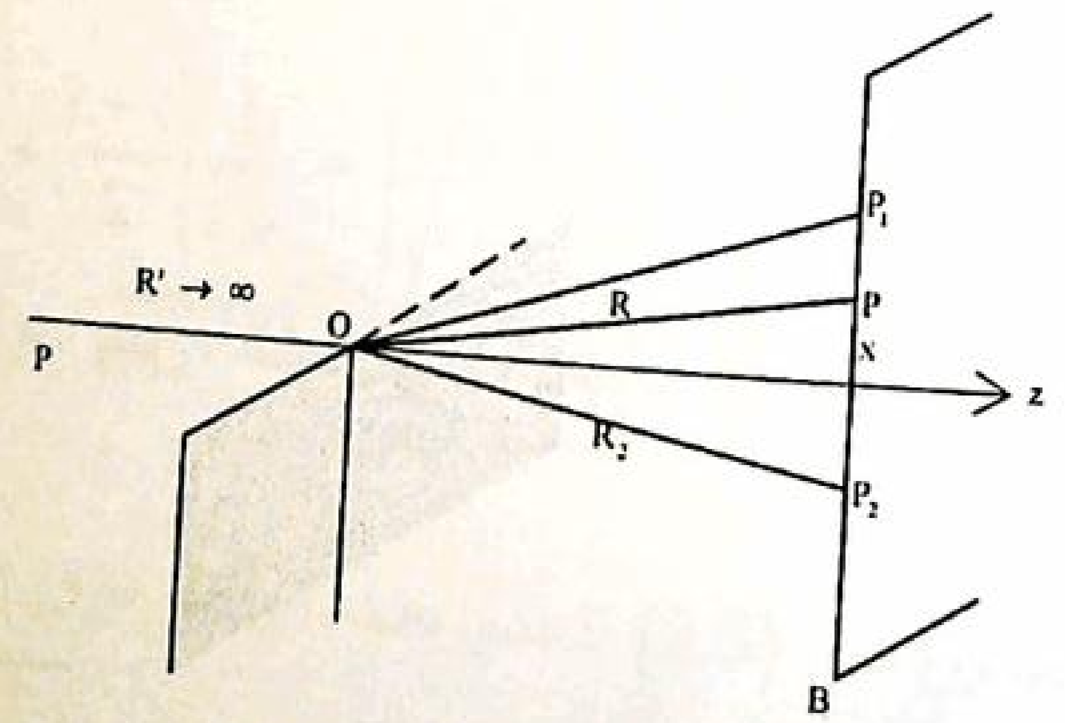
$$\sqrt{2}\frac{|v_P|}{|v_0|} = |F(w_2) - F(w_1)| \quad (2.51)$$

إن نسبة السعتين (الموجة مضروبة بـ $\sqrt{2}$) هي طول الوتر الواصل بين قميتي F على حلزون كورنو، من أجل المتغيرين w_2 ، w_1 ، وبما أن الفرق بينهما $w_2 - w_1 = \frac{2\gamma d}{\sqrt{\lambda f/2}}$ ثابت والتطبيق متقايس، فهو مقدار ثابت مستقل عن ξ_D و x (نقطة الرصد)، يقابل هذا المقدار الثابت طول منحن ثابت على حلزون كورنو تعينه نهايتا الوتر.

يبين الشكل الوتر المقابل لنقطة الرصد $x = 0$ ، $\xi = 0$ و $0 = \frac{-2\gamma\xi_D}{\sqrt{\lambda f/2}} = w_2 + w_1$ يمر هذا الوتر من النقطة O وينتهي في نقطتين متناظرتين تعينان قوسين متساويين على حلزون كورنو يقابلان $w_2 = \frac{d}{\sqrt{\lambda f/2}}$ و $w_1 = -\frac{d}{\sqrt{\lambda f/2}}$.

6.2- الانعراج على حرف حاجز

نأخذ هنا، بعد أن أخذنا طول الشق مساوياً للانهاية $\infty \to h$ ، عرضه أيضاً لا نهائياً وذلك بإزالة القسم العلوي للحاجز إزالة تامة : $\infty \to d$. نبسط الحالة أيضاً بأن نأخذ موجات مستوية بدل الموجات الكروية، بإبعادنا المنبع الضوئي إلى اللانهاية $\infty \to R'$ وإبقاء مستوى الرصد على البعد R $\left(\frac{1}{f} = \frac{1}{R}\right)$. نختار مبدأ الأطوال x على حدود الظل الهندسي، الشكل.22.



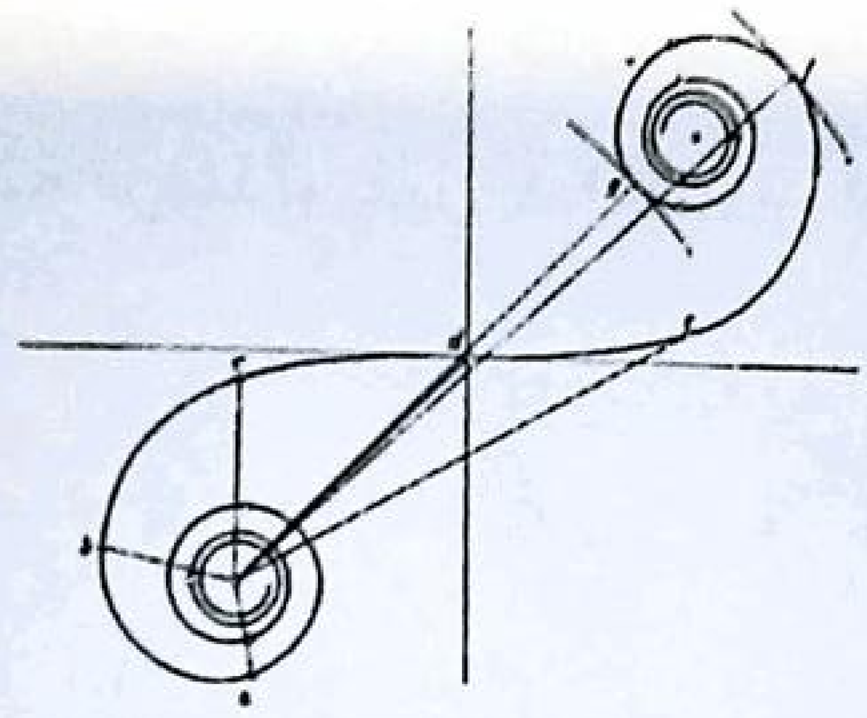
الشكل.22

ليكن الضوء الوارد عمودياً على الحاجز : $\xi = x$ ؛ $\gamma = \cos\widehat{nR} = 1$ ولدينا في القسم العلوي عندئذ $x = \xi = \xi_D - d$ وفي القسم السفلي $-\infty = \xi_D - d -$ ومن $(2.47)'$.

$w_1 = -\infty$ ، $w_2 = \dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{\lambda R}{2}}}$ ، نرمز لـ w_2 بـ w ونكتب (2.51) على الشكل

$$\left|\frac{v_P}{v_0}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|F(w) - F(-\infty)\right| \qquad (2.52)$$

إن بداية الوتر على حلزون كورنو هي النقطة $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ وتتبع نهايته وضع نقطة الرصد x. يزداد طول الوتر في منطقة الظل الهندسي $(-\infty < x < 0)$ بشكل مستمر كما تبين ذلك الأوتار المتتالية a، b، c، d، e، الشكل.23.



الشكل.23

تقابل النقطة d حد الظل الهندسي حيث $w = 0$ و $F(w) = 0$ وبالتالي

$$\left|\frac{v_P}{v_0}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{2} \qquad (2.53)$$

وشدة الضوء $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{4}$.

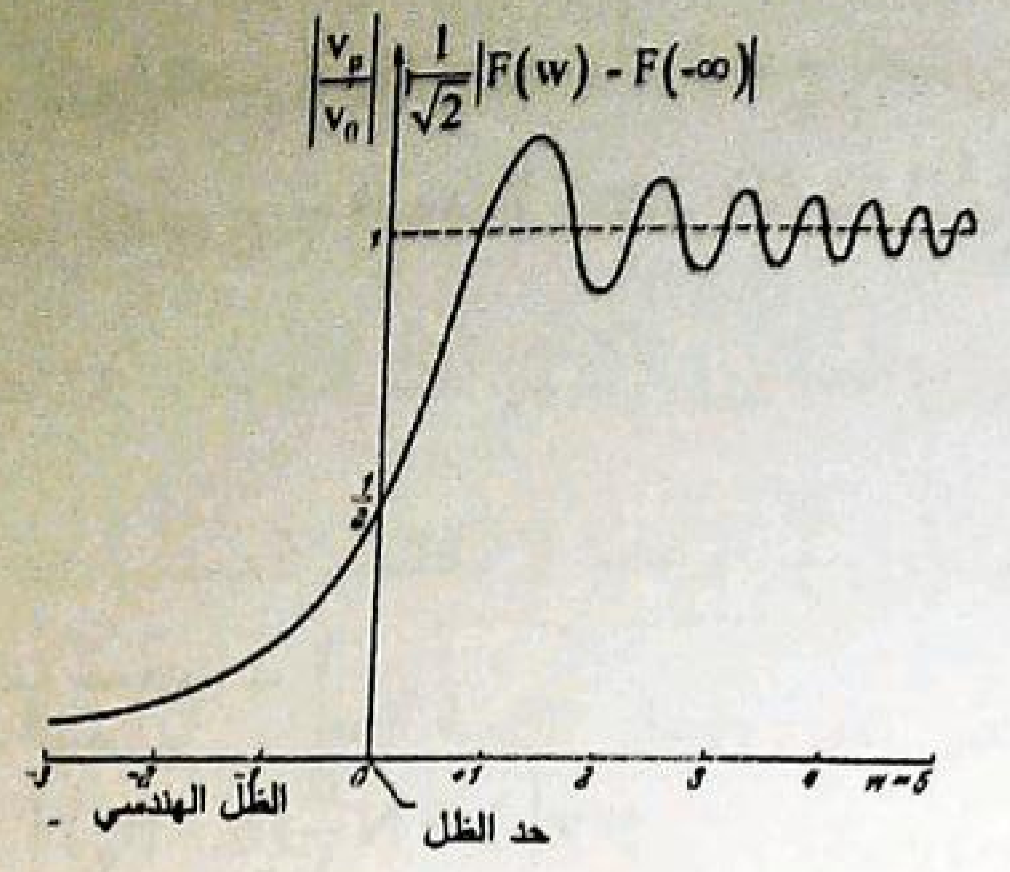
تأخذ أطوال الأوتار بالارتفاع اعتباراً من هذه النقطة لتصل إلى أول نهاية عظمى لها في النقطة f من الشكل لتتناقص بعد ذلك إلى أول نهاية صغرى في النقطة g من الشكل؛ ثم يتراوح الطول بين نهايات عظمى وصغرى على التوالي. إن القيمة الحدية لنسبة السعتين، من أجل $F(w) = F(\infty)$ هي حسب (2.44) و'(2.45)

$$\left|\frac{v_P}{v_0}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1+i}{2} - \left(-\frac{1+i}{2}\right)\right| = 1 \qquad (2.54)$$

وتقابل الشدة الكلية للضوء الوارد. يبين، الشكل.24، تغيرات السعة النسبية بدليل w[3].

---

[3] تبدو التقريبات التي لجأنا إليها، وقبلنا فيها بأبعاد فتحات تمتد إلى اللانهاية طولاً تارة وعرضاً تارة أخرى، متناقضة مع فرضياتنا الأولى في ظاهرة الانعراج التي تعالج فتحات أو حواجز صغيرة الأبعاد. علينا والحال هذه، لكي نكون دقيقين توخي الحذر في تعيين الشروط التي تتيح قبول هذا التقريب. ولا يمكننا فعل ذلك إلا بالعودة إلى معادلات ماكسويل وحلها خارج وداخل فتحة الانعراج وتعيين الشروط على الحدود : هذا هو الحل المضبوط لمسألة الانعراج ولكنه غير متاح إلا في بعض الحالات الخاصة. انظر الفقرة 38 من المجلد Optics IV من كتاب A. Summerfed, Lectures on theoretical Physics.

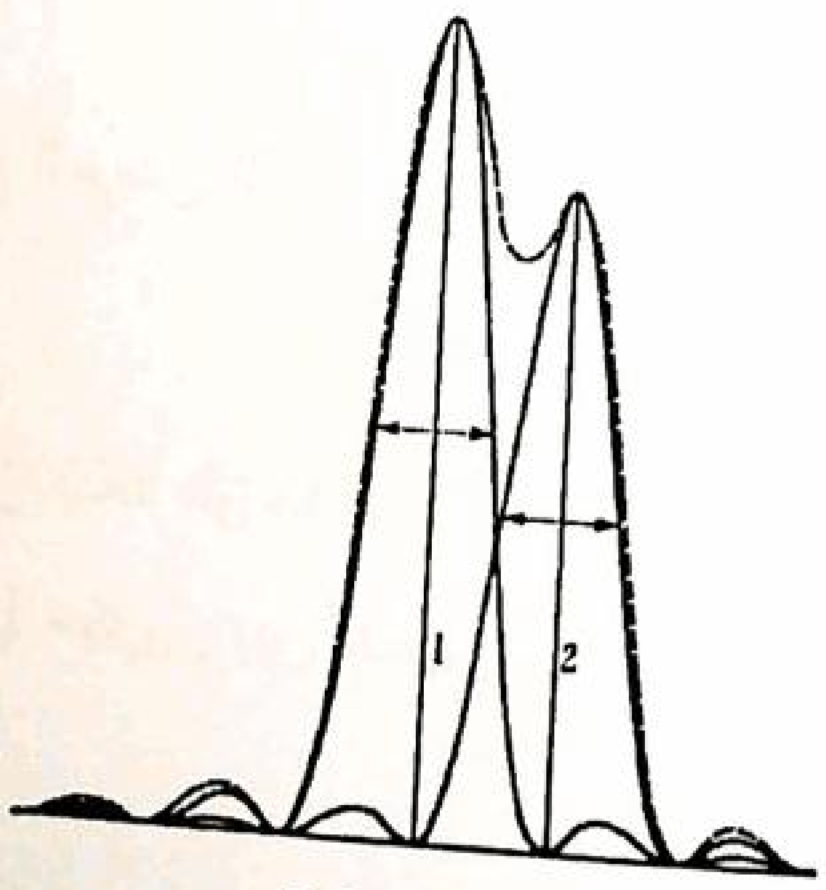


الشكل.24

7.2- قوة الفصل Resolving Power

إن ما يهدف إليه جهاز التحليل الطيفي هو الرفع من قدرته على التحليل، أي على الفصل بين خطين طيفيين متجاورين؛ وكذا الحال في الأدوات البصرية الأخرى، فالتلسكوب الأفضل هو الذي يستطيع على سبيل المثال التمييز بين نجمي النجوم المزدوجة والمجهر الأدق هو الذي يعطي خيالين منفصلين لنقطتين شديدتي التقارب موضحاً بذلك البنية الدقيقة للنسج الذي يدرسه.

أ- لنبدأ بالمحززة ولنأخذ كمعيار (معيار ريلي) لفصل الخطوط الطيفية لطيفين – نعينهما بـ 1 و2 – عن بعضهما تطابق القيمة العظمى الرئيسية لشكل انعراج الطيف 2، ذي طول الموجة $\lambda + \delta\lambda$ مع الصفر الأول لشكل انعراج الطيف الأول ذي طول الموجة λ. إن لمجموع شدتي الطيفين انخفاضاً شديداً بين النهايتين العظمتين يتيح للعين التمييز بينهما، الشكل.25.



الشكل.25

رأينا في دراسة المحززة أن الصورة في (2.3) تنعدم عندما يأخذ فرق الطور Δ من أجل الطيف ذي الرتبة ℓ القيمة

$$\frac{N\Delta}{2} = N\pi\ell \qquad (2.55)$$

حسب $'(2.3)$ $\ell = \frac{d}{\lambda}(\alpha - \alpha_0)$.

تقابل هذه القيمة الشدة العظمى لأنها تعدم المخرج أيضاً. تنعدم الصورة مرة ثانية عندما تضاف π إلى هذه القيمة – من غير أن ينعدم المخرج – فنحصل على الشدة الأولى المعدومة من أجل $\Delta = \Delta_0$ المحققة للعلاقة

$$\frac{N\Delta_0}{2} = N\pi\ell + \pi \tag{2.55'}$$

وبتبديل ℓ بقيمتها من أجل الطيف المعين بـ 1

$$= \pi\left(1 + N\frac{d}{\lambda}(\alpha - \alpha_0)\right) \cong \pi N\frac{d}{\lambda}(\alpha - \alpha_0)$$

يجب أن تتساوى هذه القيمة مع قيمة الشدة العظمى للطيف المعين بـ 2 أي مع

$$\frac{N\Delta}{2} = N\pi\ell = N\pi\frac{d}{\lambda + \delta\lambda}(\alpha - \alpha_0)$$

أو

$$\frac{\pi(N\ell + 1)}{\pi N\ell} = \frac{1}{N\ell} + 1 \cong \frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = 1 + \frac{\delta\lambda}{\lambda}$$

وأخيراً

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = N\ell \tag{2.56}$$

من قوة فصل الرتبة الأولى، من أجل $\ell = 2$، تكبر قوة الفصل مع ارتفاع رتبة الطيف فهي أكبر بمرتين، ولكنها مستقلة عن المسافة بين حزوز المحززة، إن ما يهم هو العدد الكلي للمحزوز. نحصل على أعلى رتبة ممكنة حسب (2.55) من أجل α قريبة من الواحد، عندما نرصد بزاوية قريبة من سطح المحززة:

$$\ell_{max} \simeq \frac{d}{\lambda}$$

وقوة الفصل الأعظمية متناسبة مع العرض الكلي للمحززة Nd.

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} \simeq \frac{Nd}{\lambda} \tag{2.57}$$

هكذا فإن لمحززة ذات عشرة حزوز يبعد الواحد عن الآخر فيها بـ 1 سنتمتر قوة فصل مكافئة لمحززة رولاند ذات الـ 100.000 حز ببعد 1 مكرون بين الحزين.

ب– انعراج فراونهوفر –الموشور

سنفترض أننا حصلنا بواسطة المسدد على ضوء متواز كلياً ووحيد اللون نستقبله بعد مروره عبر الموشور بواسطة تلسكوب. سنفترض كذلك أن عدسات المسدد والتلسكوب أعرض من مسقطي الموشور على اتجاهي الأشعة الواردة والمنعرجة. ستحدد أبعاد حزمة الأشعة بأبعاد وجه الموشور الذي يمر الضوء عبره. ليكن هذا الوجه المستطيل ذي العرض 2A والطول 2B العمودي على مستوى الشكل، الشكل.26، حيث الوجه متساوي الساقين للموشور. يظهر شكل انعراج فراونهوفر الناتج عن هذا

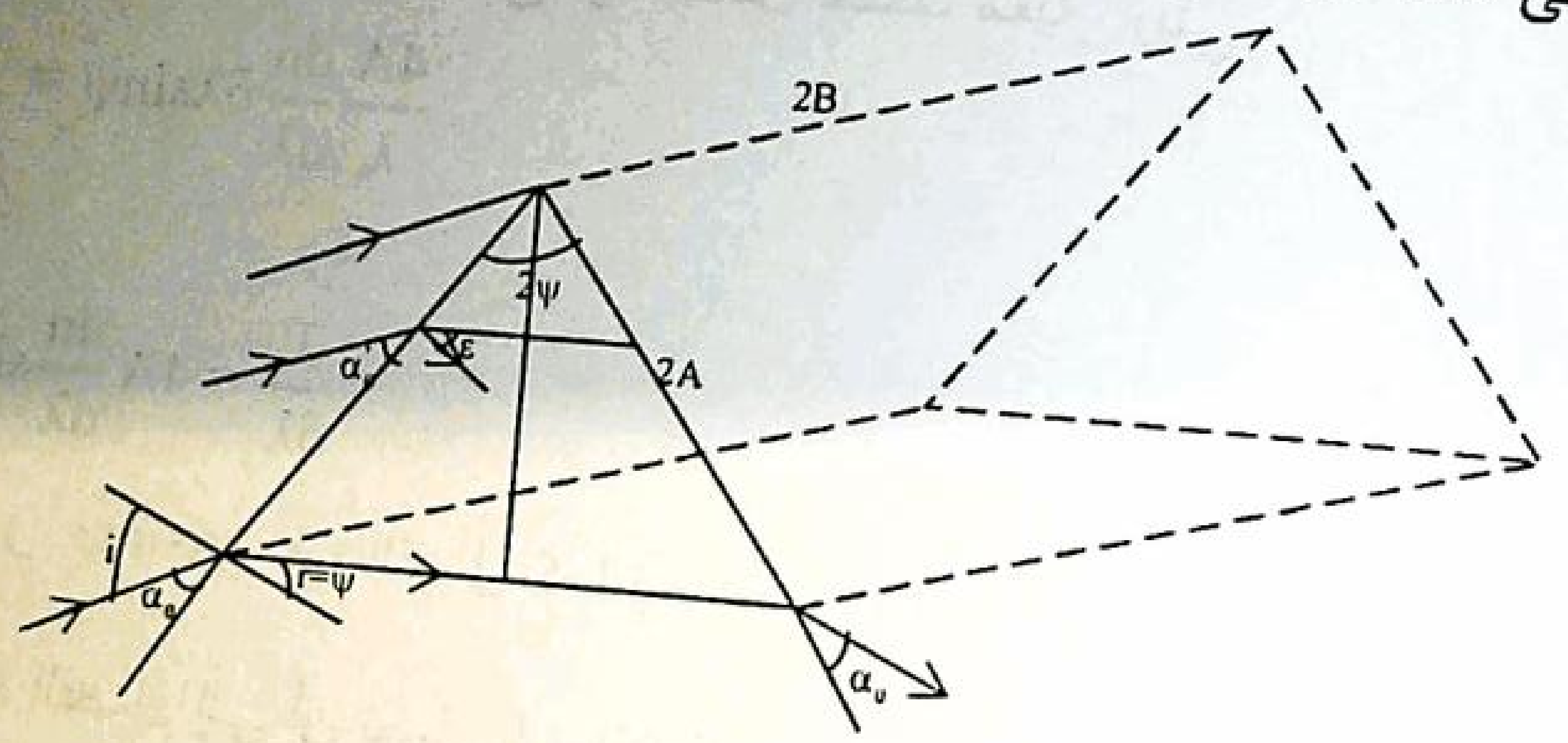
المستطيل في مستوى التلسكوب البؤري. يضاء وجه الموشور الأيسر بواسطة شق المسدد الموازي له وتتوزع شدة الضوء بعد انكسارها حسب العلاقة (2.31) ومربع العلاقة '(2.31). لا يختلف توزع شدة الضوء في هذه العلاقة عن توزع المحززة '(2.3) ذات العرض $Nd = 2A$ لأن قيمة $\sin\frac{\Delta}{2}$ في جوار القيمة العظمى الرئيسية للشدة تساوي $\frac{\Delta}{2}$. وهكذا لا يختلف الحساب هنا عما فعلناه في حالة المحززة. إن وضع الصفرين الأولين للشدة على يمين ويسار القيمة العظمى الرئيسية محدد بالعلاقة (2.55) و'(2.55)

$$\frac{N\Delta}{2} = \frac{2\pi A\left(\alpha_{1,2} - \alpha_0\right)}{\lambda} = \pm\pi \qquad (2.58)$$

جيب التمام α_0 هنا هو جيب التمام الموجه للشعاع الصادر المساوي لجيب التمام الموجه للشعاع الوارد و $\alpha_{1,2}$ هما على الترتيب جيبا تمام الأولين على يمين ويسار الشعاع α_0 ثم إن

$$\alpha_0 = n\sin\psi \qquad (2.59)$$

وهي علاقة تصح على حالة الانكسار على طرفي الموشور الأيسر والأيمن[4].



الشكل.26

[4] نرى بسهولة من قوانين الانكسار عندما نرمز بـ i و r لزاويتي الورود والانكسار على الوجه الأيسر و 'i و 'r بهاتين الزاويتين على الوجه الأيمن

أن

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \quad ; \quad \frac{\sin i'}{\sin r'} = \frac{1}{n}$$

أن

$$2\psi = r + i'$$

وأن الانحراف الكلي للشعاع الوارد هو $\delta = i + r' - 2\psi$

لدينا إذاً

$$\frac{\sin i}{\sin(2\psi - i')} = n \quad ; \quad \frac{\sin i'}{\sin(\delta + 2\psi - i)} = \frac{1}{n}$$

وعندما يكون طريق الشعاع متناظراً كما في الشكل.26 فإن $r = i' = \psi$، وأخيراً، لدينا من اجل طرف الموشور الأيسر

$$\cos\alpha_0 \equiv \alpha_0 = \sin i = n\sin\psi$$

وكذلك، من أجل الطرف الأيمن

$$\cos\alpha_0 \equiv \alpha_0 = \sin r' = n\sin i' = n\sin\psi$$

على نحو متناظر λ بنفس اتجاه الشعاع ذي الطول $\lambda + \delta\lambda$ لا ينكسر الشعاع الوارد ذو طول الموجة الزاوية الصغيرة التي يعملها الشعاع المنكسر مع خط التناظر ε ولا تصح عليه العلاقة (2.58). لتكن (الموازي لقاعدة الموشور)؛ لدينا عوضاً عن (2.58)

$$\alpha_{01} = n'\sin(\psi + \varepsilon) \qquad (2.59)_1$$

حيث n' معامل الانكسار المقابل لطول الموجة $\lambda + \delta\lambda$. يعمل الشعاع الصادر مع الشعاع المنكسر زاوية هي

$$\alpha'_{01} = n'\sin(\psi - \varepsilon) \qquad (2.59)_2$$

الفرق بين مجموع هذين المقدارين و $2\alpha_0$ المعطاة من أجل طول الموجة λ هو

$$2n'\sin\psi\cos\varepsilon - 2n\sin\psi \;\simeq\; 2\frac{dn}{d\lambda}\delta\lambda\sin\psi$$

حيث كتبنا الفرق $n' - n = \frac{dn}{d\lambda}\delta\lambda$ وأهملنا الحدود من الدرجة الثانية بـ ε : $\cos\varepsilon = 1$. نضع هذا المقدار في العلاقة (2.58) لنحصل على قوة الفصل حسب معيار ريلي

$$\frac{4A}{\lambda}\frac{dn}{d\lambda}\delta\lambda\sin\psi = \pm 1$$

و

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = 4A\frac{dn}{d\lambda}\sin\psi \qquad (2.60)$$

تحدد قاعدة الموشور $4A\sin\psi$ قوة الفصل كما يحددها تشتت الموشور $\frac{dn}{d\lambda}$. لا يغير تكبير ψ وتصغير A بنفس النسبة قوة الفصل إلى أن نصل إلى الانعكاس الكلي $\sin\psi = \frac{1}{n}$ وتصبح العلاقة (2.60)

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = 2A\frac{2}{n}\frac{dn}{d\lambda}$$

يلعب عرض الموشور $2A$ دور المقدار Nd، عرض المحززة ويحل محل λ في (2.57) المقدار $\frac{n}{2}\frac{d\lambda}{dn}$. تبين المقارنة العددية أن قوة فصل الموشور – من أجل سطح مساو لسطح المحززة أصغر بـ 8 مرات على الأقل من قوة فصل المحززة. إلا أن الموشور غير معرض لتوضيع الأطياف من مختلف الرتب التي تسبب ضياعاً كبيراً في الشدة.

ج- المقارب – التلسكوب

لنفرض أننا نرصد نجماً مزدوجاً وأن محور المقارب موجه نحو النجم الأول. يحدث هذا النجم في مستوى المقارب البؤري مخطط الانعراج، الشكل.19، ولدينا العلاقة '(2.38)

$$\sin\theta_1 = 0{,}61\frac{\lambda}{A}$$

حيث A نصف قطر الشيئية (عدسة المقارب) و λ طول الموجة الوسطية للنجم و θ_1 الزاوية بين الشعاع المرصود واتجاه القيمة الصغرى الأولى، 0,61 أول جذر لدالة بسل J_1. سنأخذ كمعيار لتمييز النجم الثاني عن النجم الأول تطابق نهايته العظمى الرئيسية على بعد أكبر من بعد النهاية الصغرى الأولى للنجم الأول عن نهايته العظمى الرئيسية (معيار ريلي).

لذا نعرف قوة فصل التلسكوب بمقلوب أصغر مسافة زاوية بين النجمين:

$$\frac{I}{\sin\theta_1} = \frac{A}{0,61\lambda} \quad (2.61)$$

ونقول إن قوة الفصل متناسبة مع أبعاد عدسة التلسكوب، ولذا تبنى التلسكوبات العملاقة.

يلعب بؤبؤ العين دور محيط الشيئية ويتراوح قطره 2A بين 1 و8 مم حسب لمعان الضوء؛ لدينا إذاً من أجل موجة $\lambda = 5\cdot10^{-4}$ مم نسب $\frac{\lambda}{A}$ تتراوح بين $\frac{5.10^{-4}}{0,5}$ و $\frac{5.10^{-4}}{4}$ وبالتالي تقع $\sin\theta_1$ بين المقدارين:

$$6\cdot10^{-4} \rangle \sin\theta_1 \rangle 0,7\cdot10^{-4}$$

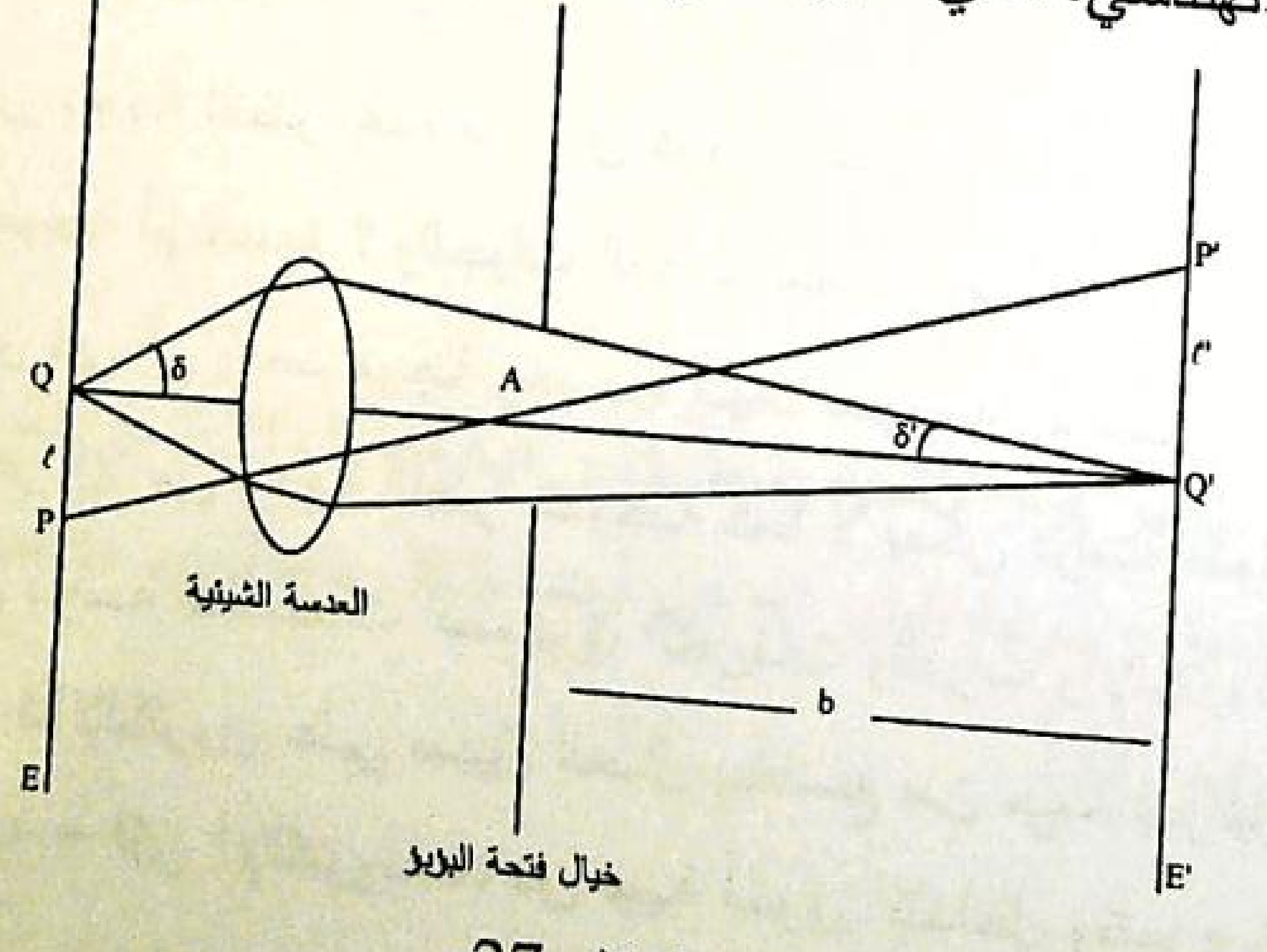
قيمة هذه الزاوية بالدرجة بدلاً عن الراديان

$$2' \rangle \sin\theta_1 \rangle 15''$$

وهكذا وبغض النظر عن التركيب الخلوي لشبكية العين فإن الانعراج يضع حداً أعلى لقوة فصل العين. عندما تكون الإضاءة شديدة والبؤبؤ متقلص فإن العين تميز الاتجاهات التي هي بحدود زاوية تساوي دقيقة واحدة.

د- المجهر

لتكن، في مستوى الخيال 'E، النقطتان 'Q و'P خيالي النقطتين المتجاورتين Q و P في المستوى الشيئي E. لتكن 2A خيال فتحة البؤبؤ و b المسافة الفاصلة بين هذا الخيال والمستوي 'E. لدينا حسب قانون الجيب في الضوء الهندسي، الذي سنبرهنه في الفقرة القادمة، العلاقة (3.15)، انظر الشكل.27



الشكل.27

$$\ell n \sin\delta = \ell' n' \sin\delta' \simeq \ell' n' \delta' \qquad (2.62)$$

حيث n و n' معاملا الانكسار في الوسطين، δ' صغيرة أمام δ. يلعب خيال فتحة البؤبؤ دور فتحة الانعراج. يجب لكي يرى الخيالان Q' و P' كنقطتين منفصلتين تحقيق معيار ريلي، أي أن يكون

$$\frac{\ell'}{b} \geq \sin\theta_1 = 0{,}61\frac{\lambda'}{A} \qquad (2.63)$$

لدينا، من جهة أخرى

$$\frac{A}{b} \simeq \delta'$$

كما أن $\lambda' = \frac{\lambda_0}{n'}$ حيث λ_0 طول الموجة في الخلاء (الهواء).

ومنه

$$\ell' \geq 0{,}61\frac{\lambda_0}{n'\delta'}$$

يجب إذاً بالعودة إلى (2.62) أن تكون المسافة بين النقطتين Q و P

$$\ell \simeq \frac{\ell' n'\delta'}{n\sin\delta} \rangle \frac{0{,}61\lambda_0}{n\sin\delta} \qquad (2.64)$$

3. الضوء الهندسي

1.3- مبدأ فيرما Fermat

تختفي الظواهر الضوئية الموجية، التداخل والانعراج، عندما تصبح أبعاد الثقوب والشقوق والفتحات كبيرة أمام أطوال الموجة. أو بعبارة أخرى عندما تتناهى طول الموجة إلى الصفر. يمكن عندئذ دراسة الضوء من وجهة نظر تقليدية بحتة، وجهة نظر نيوتن المخالفة لوجهة نظر هويغنز والظواهر المؤيدة لها، واعتبار الضوء حبيبات (الفوتونات) غير خاضعة لأي قوة خارجية وتسير بالتالي على خطوط مستقيمة بسرعة ثابتة. فالضوء من وجهة النظر هذه فرع من فروع الميكانيك التقليدي. ولابد هنا من طرح السؤال عن ماهية الضوء أهو موجة أم جسيم ؟ والجواب الوحيد الممكن بعد نزاع طويل حول هذين التصورين هو بالقول إن الضوء هو في آن واحد موجة وجسيم، إنهما مفهومان متممان الواحد منهما للآخر : لا يمكن دراسة بعض الظواهر إلا من وجهة النظر الموجية كما لا يمكن دراسة ظواهر أخرى إلا من وجهة النظر الجسيمية. يعترض دراسة الجسيمات الصغيرة، الجزيئات والذرات والإلكترونات، نفس الإشكال كما سنرى في المجلد القادم. فالإلكترون على سبيل المثال يخضع من جهة لقوانين الميكانيك التقليدي - النسبوي عندما ترتفع سرعته - لكن الإلكترونات، من جهة أخرى تتداخل وتتعرج كما يفعل الضوء. إنهما

$$\ell n \sin\delta = \ell' n' \sin\delta' \simeq \ell' n' \delta' \qquad (2.62)$$

حيث n و n' معاملا الانكسار في الوسطين، δ' صغيرة أمام δ. يلعب خيال فتحة البؤبؤ دور فتحة الانعراج. يجب لكي يرى الخيالان Q' و P' كنقطتين منفصلتين تحقق معيار ريلي، أي أن يكون

$$\frac{\ell'}{b} \geq \sin\theta_1 = 0{,}61\frac{\lambda'}{A} \qquad (2.63)$$

لدينا، من جهة أخرى

$$\frac{A}{b} \simeq \delta'$$

كما أن $\lambda' = \frac{\lambda_0}{n'}$ حيث λ_0 طول الموجة في الخلاء (الهواء).

ومنه

$$\ell' \geq 0{,}61\frac{\lambda_0}{n'\delta'}$$

يجب إذاً بالعودة إلى (2.62) أن تكون المسافة بين النقطتين Q و P

$$\ell \simeq \frac{\ell' n' \delta'}{n \sin\delta} \rangle \frac{0{,}61\lambda_0}{n \sin\delta} \qquad (2.64)$$

3. الضوء الهندسي

1.3- مبدأ فيرما Fermat

تختفي الظواهر الضوئية الموجية، التداخل والانعراج، عندما تصبح أبعاد الثقوب والشقوق والفتحات كبيرة أمام أطوال الموجة. أو بعبارة أخرى عندما تتناهى طول الموجة إلى الصفر. يمكن عندئذ دراسة الضوء من وجهة نظر تقليدية بحتة، وجهة نظر نيوتن المخالفة لوجهة نظر هويغنز والظواهر المؤيدة لها، واعتبار الضوء حبيبات (الفوتونات) غير خاضعة لأي قوة خارجية وتسير بالتالي على خطوط مستقيمة بسرعة ثابتة. فالضوء من وجهة النظر هذه فرع من فروع الميكانيك التقليدي. ولابد هنا من طرح السؤال عن ماهية الضوء أهو موجة أم جسيم ؟ والجواب الوحيد الممكن بعد نزاع طويل حول هذين التصورين هو بالقول إن الضوء هو في آن واحد موجة وجسيم، إنهما مفهومان متممان الواحد منهما للآخر : لا يمكن دراسة بعض الظواهر إلا من وجهة النظر الموجية كما لا يمكن دراسة ظواهر أخرى إلا من وجهة النظر الجسيمية. يعترض دراسة الجسيمات الصغيرة، الجزيئات والذرات والإلكترونات، نفس الإشكال كما سنرى في المجلد القادم. فالإلكترون على سبيل المثال يخضع من جهة القوانين الميكانيك التقليدي – النسبوي عندما ترتفع سرعته – لكن الإلكترونات، من جهة أخرى، تتداخل وتنعرج كما يفعل الضوء. إنهما

مظهران متممان أحدهما للآخر وننتقل من أحدهما – الميكانيك التقليدي – إلى الأخر – الميكانيك الكمومي – كما ننتقل هنا من الضوء الهندسي إلى الضوء الموجي والعكس بالعكس. كما سنرى أننا سنحصل من التماثل بين الميكانيك التقليدي والضوء الهندسي على معادلة موجة، معادلة شرودينغر، يخضع لها الجسيم المادي تقابل معادلة الموجة الكهرطيسية وتفسر ظاهرة التداخل للجسيمات المادية.

لقد أتت فيزياء القرن العشرين لتؤيد تصور نيوتن لحبيبات الضوء. فقد جاء المفعول الكهرضوئي الذي اكتشفه آنشتاين (1905)، خمس سنوات بعد بدء النظرية الكمومية على يد بلانك، ليثبت وجود الفوتون: تحمل الموجة الكهرطيسية ذات التردد ν جسيماً الفوتون، طاقته $h\nu$، حيث h ثابتة بلانك. يستطيع هذا الجسيم عند اصطدامه بحاجز مادي (معدني) اقتلاع أحد إلكترونات الحاجز معطياً إياه طاقة حركية تحددها معادلة انحفاظ الطاقة

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A$$

حيث الحد الأول في الطرف الثاني هو طاقة الإلكترون الحركية والثاني A هو الطاقة التي تربط الإلكترون بالإيونات المحيطة به والواجب بذلها لفك هذا الارتباط. هذا هو المظهر الجيسمي للموجة الكهرطيسية المتمم لمظهرها الموجي.

لنبق في إطار الميكانيك التقليدي ولننظر إلى الفوتون كجسيم حر خاضع لحركة مستقيمة منتظمة حسب مبدأ غاليليه، الذي استنتجناه من مبدأ الفعل الأصغر أيضاً ((I.(6.§1.4). تعني الحركة المستقيمة أن مسار الجسيم الحر بين نقطتين هو الطريق الأقصر (إنه المستقيم في الفضاء المنبسط والجيوديزي في الفضاء ذي الانحناء– قوس الدائرة الكبرى التي تقع النقطتان من سطح الكرة عليها أو قوس اللولب الواصل بينهما على سطح الأسطوانة – الخ). ولما كانت سرعة الجسيم الحر ثابتة فإن الزمن الذي تستغرقه الحركة بين هاتين النقطتين هو أقصر ما يكون. هذا هو محتوى مبدأ فيرما (الذي سبق تاريخياً مبدأ الفعل الأصغر) الخاص بالضوء. نكتب هذا المبدأ على الشكل

$$\delta\int_{P_1(x_1,y_1)}^{P_2(x_2,y_2)} dt = 0 \tag{3.1}$$

2.3– تقوس الاشعة الضوئية

لنفرض أن الوسط الذي تنتشر فيه الاشعة وسط يتغير فيه معامل الانكسار بشكل متصل بدليل المتغير x : $n(x)$. تتغير السرعة – سرعة الطور – هي أيضاً بشكل متصل ويأخذ مبدأ فيرما الشكل التالي:

$$\frac{1}{c}\delta\int_{P_1}^{P_2} n(x)\,d\ell = 0 \tag{3.2}$$

مظهران متممان أحدهما للآخر ونتنقل من أحدهما – الميكانيك التقليدي – إلى الأخر – الميكانيك الكمومي – كما ننتقل هنا من الضوء الهندسي إلى الضوء الموجي والعكس بالعكس. كما سنرى أننا سنحصل من التماثل بين الميكانيك التقليدي والضوء الهندسي على معادلة موجة، معادلة شرودينغر، يخضع لها الجسيم المادي تقابل معادلة الموجة الكهرطيسية وتفسر ظاهرة التداخل للجسيمات المادية.

لقد أتت فيزياء القرن العشرين لتؤيد تصور نيوتن لحبيبات الضوء. فقد جاء المفعول الكهرضوئي الذي اكتشفه آنشتاين (1905)، خمس سنوات بعد بدء النظرية الكمومية على يد بلانك، ليثبت وجود الفوتون: تحمل الموجة الكهرطيسية ذات التردد ν جسيماً الفوتون، طاقته $h\nu$، حيث h ثابتة بلانك. يستطيع هذا الجسيم عند اصطدامه بحاجز مادي (معدني) اقتلاع أحد إلكترونات الحاجز معطياً إياه طاقة حركية تحددها معادلة انحفاظ الطاقة

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A$$

حيث الحد الأول في الطرف الثاني هو طاقة الإلكترون الحركية والثاني A هو الطاقة التي تربط الإلكترون بالإيونات المحيطة به والواجب بذلها لفك هذا الارتباط. هذا هو المظهر الجيسمي للموجة الكهرطيسية المتمم لمظهرها الموجي.

لنبق في إطار الميكانيك التقليدي ولننظر إلى الفوتون كجسيم حر خاضع لحركة مستقيمة منتظمة حسب مبدأ غاليليه، الذي استنتجناه من مبدأ الفعل الأصغر أيضاً ((I.(6.§1.4)). تعني الحركة المستقيمة أن مسار الجسيم الحر بين نقطتين هو الطريق الأقصر (إنه المستقيم في الفضاء المنبسط والجيوديزي في الفضاء ذي الانحناء– قوس الدائرة الكبرى التي تقع النقطتان من سطح الكرة عليها أو قوس اللولب الواصل بينهما على سطح الأسطوانة – الخ). ولما كانت سرعة الجسيم الحر ثابتة فإن الزمن الذي تستغرقه الحركة بين هاتين النقطتين هو أقصر ما يكون. هذا هو محتوى مبدأ فيرما (الذي سبق تاريخياً مبدأ الفعل الأصغر) الخاص بالضوء. نكتب هذا المبدأ على الشكل

$$\delta\int_{P_1(x_1,y_1)}^{P_2(x_2,y_2)} dt = 0 \qquad (3.1)$$

2.3– تقوس الاشعة الضوئية

لنفرض أن الوسط الذي تنتشر فيه الاشعة وسط يتغير فيه معامل الانكسار بشكل متصل بدليل المتغير x : $n(x)$. تتغير السرعة – سرعة الطور – هي أيضاً بشكل متصل ويأخذ مبدأ فيرما الشكل التالي:

$$\frac{1}{c}\delta\int_{P_1}^{P_2} n(x)\,d\ell = 0 \qquad (3.2)$$

حيث $d\ell$ عنصر طول الشعاع P_1

$$dt = \frac{d\ell}{V} = \frac{d\ell n}{c}$$

نرمز للمقدار الذي تحسب قيمه المطرافية بـ S:

$$S = \int_{P_1}^{P_2} n(x)\, d\ell \qquad (3.2)'$$

إن $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ والفعل الأصغر هو

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n(x)\sqrt{1 + y'^2}\, dx = 0$$

نطبق معادلة أولر، انظر (((I.(6.(1.8

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

f مستقلة عن y، $n(x)\cdot$ $\frac{\partial f}{\partial y'} = y'\left(1 + y'^2\right)^{-1/2}$؛

$$\frac{d}{dx}\frac{df}{dy'} = n(x)\frac{d}{dx}y'\left(1 + y'^2\right)^{-1/2} + \frac{dn(x)}{dx}y'\left(1 + y'^2\right)^{-1/2} = 0 \qquad (3.3)$$

لتكن α الزاوية التي يعملها مماس المنحني $y = y(x)$ مع Ox. لدينا

$$\cos\alpha\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d}{dx}\sin\alpha = \frac{d}{dx}y'\left(1 + y'^2\right)^{-1/2} \quad , \quad \sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} , \quad tg\alpha = y'$$

وهكذا فمعادلة أولر (3.3) هي

$$n\cos\alpha\frac{d\alpha}{dx} + \sin\alpha\frac{dn}{dx} = 0 \qquad (3.4)$$

لنلاحظ أخيراً أن $\cos\alpha = \frac{dx}{d\ell}$ و $\cos\alpha\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\alpha}{d\ell}$، ولكن $\frac{d\alpha}{d\ell}$ تعريفاً[5] هو انحناء منحني الأشعة $y(x)$.

نرمز له بـ κ ونكتب الصيغة العامة لمبدأ فيرما في وسط يتغير فيه معامل الانكسار $n(x, y, z)$ بشكل متصل على الشكل

$$|\kappa| = \frac{1}{n}\left|\vec{\nabla} n\right|\sin\alpha \qquad (3.5)$$

تبين هذه العلاقة، التي سنعود إليها بشكل أكثر تفصيلاً بعد قليل، أن الأشعة لا تسير على شكل مستقيم إلا في الأوساط المتجانسة $\vec{\nabla} n = 0$. يتناقص معامل الانكسارفي الجو مع الابتعاد عن سطح الأرض، $\vec{\nabla} n$ يتجه نحو سطح الأرض، نحو مركزها. إن المستوي، الشكل.28، العمودي عن سطح الأرض هو المستوى اللاصق للأشعة الضوئية المنحنية، اتجاه الانحناء هو اتجاه $\vec{\nabla} n$: تنحني الأشعة الضوئية انحناء محدباً في اتجاه الأرض أو بتعبير آخر تتكسر الأشعة في الاتجاه الذي تزداد فيه كثافة الهواء.

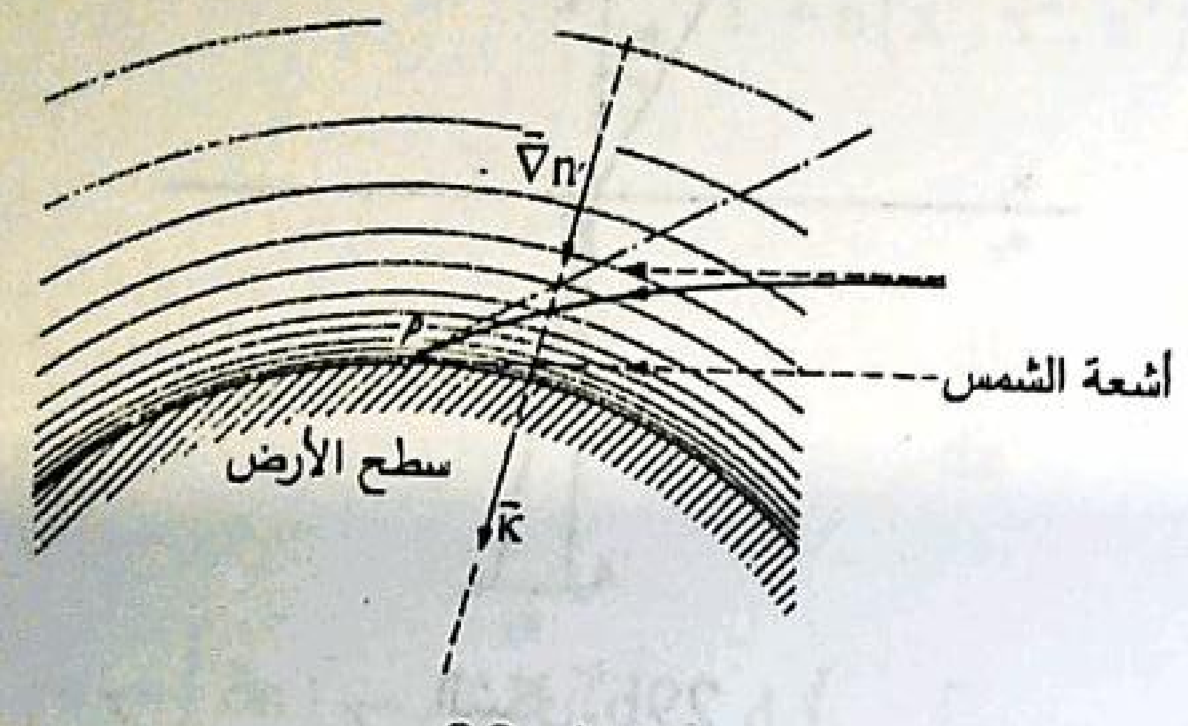
---

[5] عرفنا في ((I.(2.§3.4) المستوى اللاصق ونصف قطر الانحناء (التقوس) من أجل نقطتين متجاورتين على المنحني P و P' بالعلاقة

$$R = \frac{\overline{PP'}}{\Delta\theta} = \frac{\widehat{PP'}}{\Delta\theta} = \frac{d\ell}{d\theta}$$

حيث $\Delta\theta$ الزاوية بين المماسين في النقطتين المذكورتين، مقلوب نصف قطر الانحناء هو الانحناء (التقوس) κ.

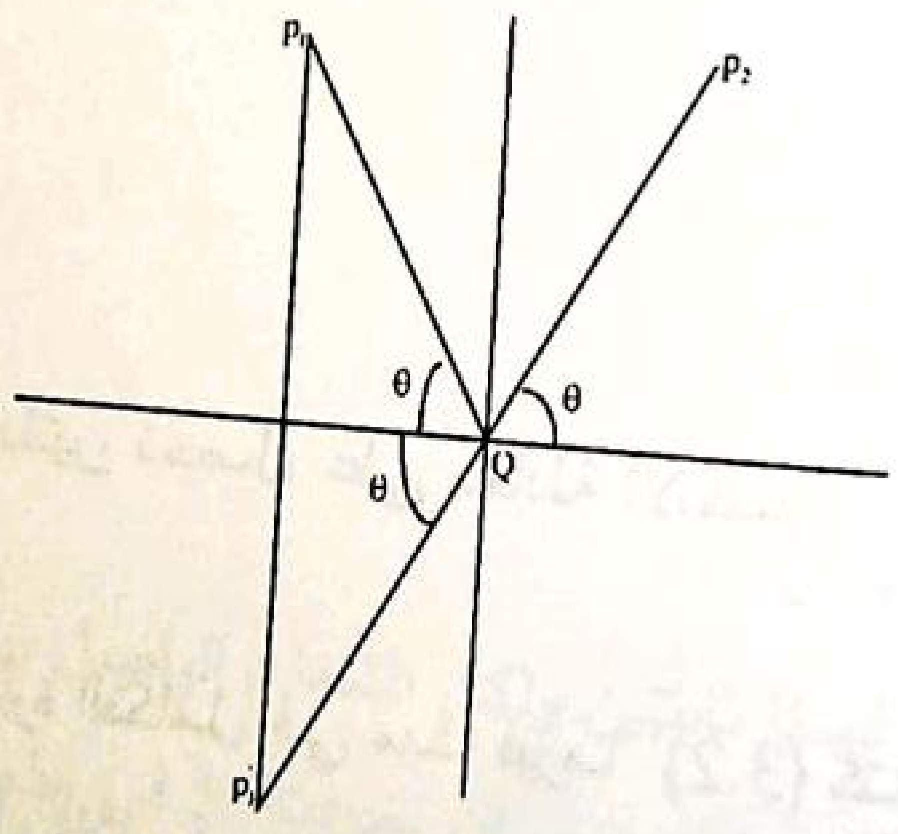
تبدو الشمس عند الشروق حينما ينظر إلى أشعتها المتوازية (الخطوط المقطعة) أعلى من وضعها الحقيقي. نرى الأشعة المنحنية في الوسط غير المتجانس كأنها مستقيمة، ونرى الشمس فوق الأفق خلال حوالي خمس دقائق بعد غروبها. ذلك أن الضوء الهندسي غدا جزءاً من طبيعتنا، وهي التي تجعلنا نسقط أشعة الشمس المنحنية على استقامة أعيننا.



الشكل.28

3.3- قوانين الضوء الهندسي

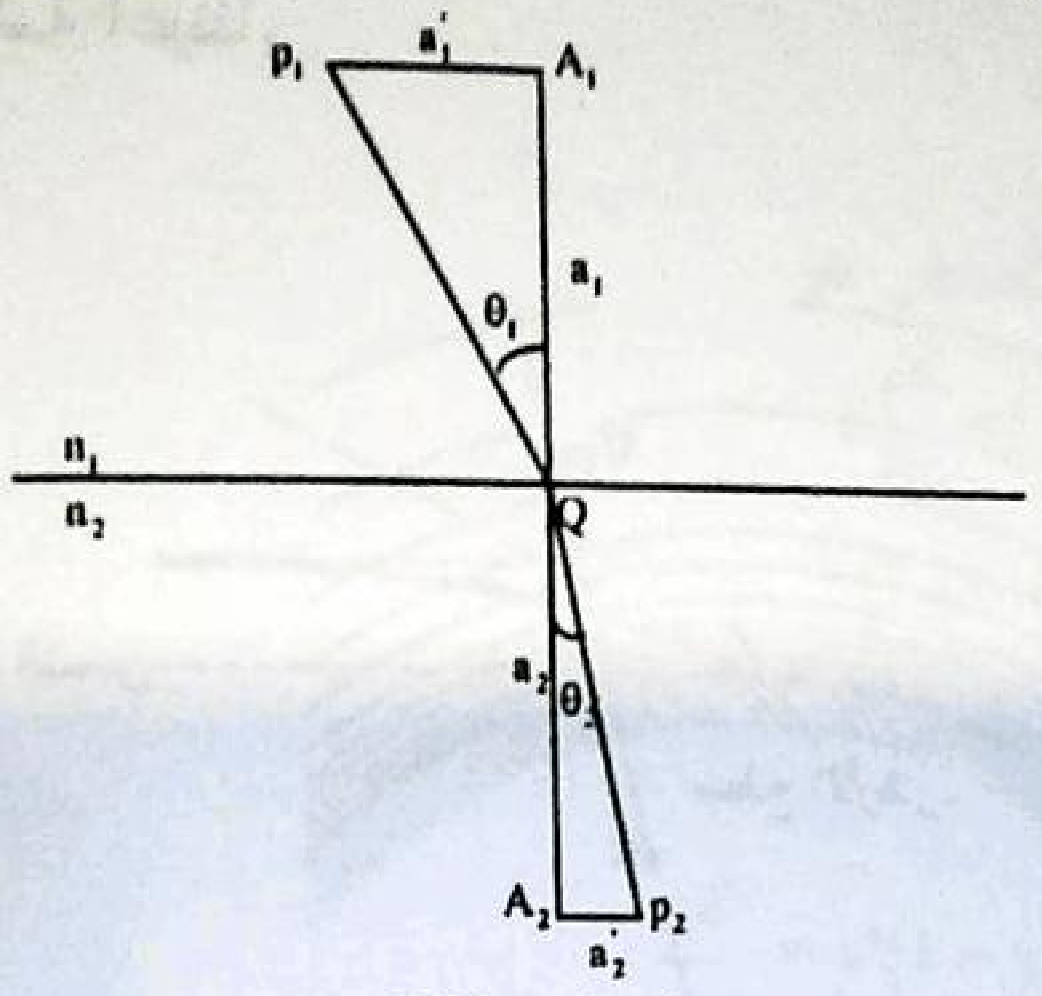
نستخلص قوانين الضوء الهندسي من مبدأ فيرما كما استخلصنا قوانين الميكانيك التقليدي من مبدأ الفعل الأصغر. فنرى أولاً أننا لسنا بحاجة لحساب التغيرات للتحقق من قانون الانعكاس. إن أقصر طريق بين النقطة p_1 من الشعاع الوارد و p_2 من الشعاع المنعكس هو المستقيم الذي تعينه النقطة p_1' خيال p_1 بالنسبة لمستوى الورود، الشكل.29a



الشكل.29a

أما الانكسار حيث n_1 و n_2 معاملي انكسار الوسطين فإن الطريق الضوئي "المسافة" بين النقطتين p_1 في الوسط الأول و p_2 في الوسط الثاني فتعينها العلاقة، الشكل.29b

$$n\ell = n_1 p_1 Q + n_2 p_2 Q = n_1 \frac{a_1}{\cos\theta_1} + n_2 \frac{a_2}{\cos\theta_2} \qquad (1)$$



الشكل.29b

يجب أن يكون هذا المقدار أصغرياً حسب مبدأ فيرما (3.2) وهو مقدار خاضع لشرط إضافي، مادامت النقطتان p_1 و p_2 محددتين هو ثبات الطول $a_1' + a_2'$:

$$a_1' + a_2' = a_1 tg\theta_1 + a_2 tg\theta_2 \qquad (2)$$

نستعمل طريقة مضاريب لاغرانج، مضروب واحد هنا

$$\delta n\ell + \lambda\delta(a_1' + a_2') = 0 \qquad (3)$$

ونحصل من أجل تغيرات θ_1 و θ_2 بأخذ العلاقات الثلاثة بعين الاعتبار

$$0 = a_1\left(-\frac{n_1\sin\theta_1}{\cos^2\theta_1} + \lambda\frac{1}{\cos^2\theta_1}\right)\delta\theta_1 + a_2\left(-\frac{n_2\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2} + \lambda\frac{1}{\cos^2\theta_2}\right)\delta\theta_2$$

ومنه

$$n_1\sin\theta_1 + \lambda = 0$$

$$n_2\sin\theta_2 + \lambda = 0$$

وبالتخلص من λ في هاتين المعادلتين نحصل على معادلة الانكسار

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$$

لننظر الآن إلى المقدار تحت إشارة التكامل في مبدأ فيرما '(3.2) كتابع لوسيط ما u ولنعالج مسألة تغيرات S كما عالجنا مسألة الفعل الأصغر $S = \int L(q^i, \dot{q}^i, t)dt$. المتغيرات q^i هنا هي الإحداثيات الديكارتية x^i ، $i = 1, 2, 3$ ، $\dot{q}^i$ هي مشتقات x^i بالنسبة للوسيط u نرمز لها بـ $\dot{x}^i$ و"اللاغرنجي" هو $n\left[\sum_i\left(\frac{dx^i}{du}\right)^2\right]^{1/2}$. نكتب تغيرات S كما فعلنا مع اللاغرانجي في (((I.(6.(1.11 :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt + \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right]_{t_1}^{t_2} \quad (3.6)$$

لدينا هنا

$$L = n\left(x^1, x^2, x^3\right) \left[\sum_k \left(\frac{dx^k}{du} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.7)$$

و

$$\frac{dL}{d\dot{x}^i} = n\dot{x}^i \left[\sum_k \left(\dot{x}^k \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (3.8)$$

ومنه

$$\delta S = \int_{u_1}^{u_2} \sum_i \left\{ \frac{\partial n}{\partial x^i} \left[\sum_k \left(\dot{x}^k \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{d}{du} \left(n\dot{x}^i \left[\sum_k \left(\dot{x}^k \right)^2 \right]^{-1/2} \right) \right\} \delta x^i du + \sum_i n\dot{x}^i \left[\sum_k \left(\dot{x}^k \right)^2 \right]^{-1/2} \delta x^i \Big|_{u_1}^{u_2} \quad (3.9)$$

إن تغيرات الإحداثيات معدومة عندما نثبت النقطتين P_1 و P_2 (الوسيطين u_1 و u_2)، ينعدم الحد الأخير المكامل وبما أن δx^i اعتباطية فإننا نحصل على معادلة لاغرانج، التي هي انعدام الحدود الثلاثة المقابلة بين القوسين الكبيرين

$$\frac{\partial n}{\partial x^i}\frac{d\ell}{du} = \frac{d}{du}\left(n \frac{dx^i}{du}\frac{du}{d\ell} \right)$$

أو

$$\frac{\partial n}{\partial x^i} = \frac{d}{d\ell}\left(n \frac{dx^i}{d\ell} \right)$$

التي نكتبها من أجل المركبات على الشكل

$$\vec{\nabla} n = \frac{d}{d\ell}\left(n \frac{d\vec{x}}{d\ell} \right) \quad (3.10)$$

هذه هي معادلة أولر لاغرانج لمبدأ فيرما.

لنفرض الآن أن النقطتين P_1 و P_2 ليستا ثابتتين ولكن الشعاع الواصل بينهما شعاع حقيقي أي أنه يحقق (3.10)، أن المقدار بين القوسين الكبيرين معدوم. إن تغيرات S في هذه الحالة هي الحد الأخير المكامل في (3.9)، أي أن

$$\delta S = n\left(\frac{d\vec{x}}{d\ell} \delta \vec{x} \right) \Big|_{P_1}^{P_2} \quad (3.11)$$

ليكن لدينا مساران ضوئيان متجاوران P_1P_2 و Q_1Q_2 بين شيئين P_1، Q_1 وخيالهما P_2، Q_2 ولتكن $\delta\bar{x}$ بـ $\bar{t}$. لدينا من (3.11) الفرق بين تغير $\bar{x}$ بين P_1 و Q_1 $\overline{P_1Q_1} = \overline{\delta x}$ لنرمز للمماس ذي الطويلة 1 $\frac{d\bar{x}}{d\ell}$ "الفعلين"

$$\delta S = S(P_1P_2) - S(Q_1Q_2) = n(\bar{t} \cdot \delta\bar{x}) - n'(\bar{t}' \cdot \delta\bar{x}') \quad (3.12)$$

هذه العلاقة صحيحة من أجل أي شعاعين من الحزمة الضوئية الرقيقة صادرين عن النقطتين Q_1P_1. لنأخذ شعاعين صادرين مماسهما $\bar{t}_1$ و $\bar{t}_2$، يقابلهما في Q_2P_2 شعاعان مماسهما $\bar{t}_1'$ و $\bar{t}_2'$. لدينا من العلاقة السابقة

$$n(\bar{t}_1 \cdot \delta\bar{x}) - n'(\bar{t}_1' \cdot \delta\bar{x}') = n(\bar{t}_2 \cdot \delta\bar{x}) - n'(\bar{t}_2' \cdot \delta\bar{x}')$$

أو

$$n\left[(\bar{t}_1 - \bar{t}_2) \cdot \delta\bar{x}\right] = n'\left[(\bar{t}_1' - \bar{t}_2') \cdot \delta\bar{x}'\right] \quad (3.13)$$

تحدد هذه العلاقة خيال مجموعة مشعة، تمر عبر نظمة بصرية[6]، بواسطة مجموعة الاتجاهات (قانون برنس Bruns). واضح أنها لا تصح إلا من أجل التغيرات الطفيفة $\delta\bar{x}$. لنلاحظ أن $\bar{t} \cdot \delta\bar{x}$ هو $|\delta x|\cos\widehat{t,\delta x}$ ولذا نكتب (3.13) على الغالب على الشكل

$$n|\delta\bar{x}|\left\{\cos\left(\widehat{\bar{t}_1, \delta\bar{x}}\right) - \cos\left(\widehat{\bar{t}_2, \delta\bar{x}}\right)\right\} = n'|\delta\bar{x}'|\left\{\cos\left(\widehat{\bar{t}_1', \delta\bar{x}}\right) - \cos\left(\widehat{\bar{t}_2', \delta\bar{x}'}\right)\right\} \quad (3.13)'$$

هذا من أجل النقاط P و Q الواقعة في نفس المستوي.

لنفرض الآن أن $\bar{t}$ و $\delta\bar{x}$ لا يقعان في مستو واحد وليكن E مستوى التغيرات $\delta\bar{x}$ و $\bar{\tau}$ مسقط المماس $\bar{t}$ على هذا المستوى أي $\bar{t} \cdot \delta\bar{x} = \bar{\tau} \cdot \delta\bar{x}$ ولنأخذ ثلاثة أشعة صادرة عن P_1، مماساتها، أو بالأحرى مساقط مماساتها على E هي τ_1، τ_2، τ_3. لدينا من (3.13)

$$n(\bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_2) \cdot \delta\bar{x} = n'(\bar{\tau}_1' - \bar{\tau}_2')\delta\bar{x}' \quad (1)$$

$$n(\bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_3) \cdot \delta_1\bar{x} = n'(\bar{\tau}_1' - \bar{\tau}_3')\delta_1\bar{x}' \quad (2)$$

نختار هذه المماسات بحيث لا يكون $\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1$ موازياً لـ $\bar{\tau}_3 - \bar{\tau}_1$ ونحسب الجداء المتجهي المزدوج

$$(\delta\bar{x} \times \delta_1\bar{x}) \cdot \{(\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1) \times (\bar{\tau}_3 - \bar{\tau}_1)\} \quad (3)$$

المساوي، بتطبيق المتطابقة:

$$(\bar{A} \times \bar{B}) \cdot (\bar{C} \times \bar{D}) = (\bar{A} \cdot \bar{C})(\bar{B} \cdot \bar{D}) - (\bar{B} \cdot \bar{C})(\bar{A} \cdot \bar{D})$$

لـ

$$= \left[\delta\bar{x} \cdot (\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1)\right]\left[\delta_1\bar{x} \cdot (\bar{\tau}_3 - \bar{\tau}_1)\right] - \left[\delta_1\bar{x} \cdot (\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1)\right]\left[\delta\bar{x} \cdot (\bar{\tau}_3 - \bar{\tau}_1)\right] \quad (3)'$$

إن الحد الأول في الجداء المزدوج (3) هو عنصر السطح $d\varepsilon$ المقام على $\delta\bar{x}$ و $\delta_1\bar{x}$ في E، أما الثاني فهو جداء مسقطي الزاوية المجسمة $d\Omega$ المقامة على المتجهات الواحدية الثلاث t_1، t_2، t_3 (من أجل

[6] نسمي نظمة بصرية مجموعة الأجسام الشفافة التي يجتازها الشعاع الضوئي بين نقطتين.

التغيرات الطفيفة لـ τ) على هذا السطح والجداء السلمي للمقدارين هو $d\varepsilon d\Omega \cos(\bar{N}, \bar{t})$ حيث $\bar{N}$ المتجهة العمودية على E. إن ضرب الجداء المزدوج بـ n^2 والقيام بنفس العملية للطرفين الثانيين في (1) و(2) يعطينا

$$n^2 d\varepsilon d\Omega \cos(\bar{N}, \bar{t}) = n'^2 d\varepsilon' d\Omega' \cos(\bar{N}', \bar{t}') \tag{3.14}$$

تعرف هذه المعادلة باسم قانون كيرشوف–كلازيوس، الذي يعبر عن انحفاظ امتداد الحزمة الضوئية صغيرة الأبعاد.

لنطبق أخيراً العلاقة (3.13) على سطوح عمودية على محور تناظر النظمة البصرية خيالها في سطوح عمودية على هذا المحور ناتج عن حزمة ضوئية فتحتها الزاوية 2u محيطة بمحور التناظر. نأخذ t_1 و t_2 للشعاعين الحديين للحزمة ونضع y بدلاً عن δx فنحصل على قانون الجيب الهام لآبه (1873)، انظر الشكل.27

$$n y \sin u = n' y' \sin u' \tag{3.15}$$

4.3- الانتقال من الضوء الموجي إلى الضوء الهندسي، معادلة الأيكونال

عالجنا في مطلع هذه الفقرة الضوء الهندسي من وجهة نظر الميكانيك التقليدي وتطبيق مبدأ الفعل الأصغر للجسيمات الحرة عليه. نريد الآن دراسة الشروط التي تحققها معادلة الموجة الكهرطيسية للانتقال إلى الضوء الهندسي، عندما يتناهى طول الموجة إلى الصفر. لنرمز لإحدى مركبات الحقل الكهرطيسي (الحقل الكهربائي على سبيل المثال) بـ u ولننظر إلى ما تؤول إليه معادلة الموجة

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \tag{3.16}$$

عندما تتناهى متجهة الموجة إلى اللانهاية $k = \frac{2\pi}{\lambda} \underset{\lambda\to 0}{\rightarrow} \infty$. نفتش عن حل تقريبي لهذه المعادلة التفاضلية المتدنية يتيح لنا استخلاص بعض النتائج الملموسة. نكتب هذا الحل على الشكل

$$u = A e^{ik_0 S} \tag{3.17}$$

حيث k_0 مقدار محدود نجعله يتناهى إلى اللانهاية؛ $S = S(x, y, z)$ و $A = A(x, y, z)$ الطور والسعة مقداران بطيئا التغير عند تغير الإحداثيات. هذا يعني أن u تتغير بسرعة كبيرة عندما تتناهى k_0 إلى اللانهاية. يطلق على الطور S اسم أيكونال Eikonal (وهي كلمة ألمانية أصلها يوناني وتعني الخيال). نشتق $u(x, y, z)$ المعرفة بدليل الأيكونال، من أجل إحداثية ديكارتية ما، x مثلاً، لنجد

$$\frac{\partial u}{\partial x} = i k_0 u \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial LnA}{\partial x} u$$

حيث كتبنا الحد الثاني في الطرف الأيمن عوضاً عن $\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x} u$

والمشتق الثاني

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k_0^2 u\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + ik_0 u\frac{\partial LnA}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x} + ik_0 u\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + ik_0 u\frac{\partial LnA}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 LnA}{\partial x^2}u + \left(\frac{\partial LnA}{\partial x}\right)^2 u$$

نهمل الحدين الأخيرين لأن السعة A تتغير ببطء ونكتب

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k_0^2 u\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + 2ik_0 u\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial LnA}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x}\right)$$

وتأخذ معادلة الموجة (3.16) الشكل

$$0 = \nabla^2 u + k^2 u = -k_0^2 u\left(\vec{\nabla} S\right)^2 + 2ik_0 u\left(\frac{1}{2}\nabla^2 S + \vec{\nabla} LnA \cdot \vec{\nabla} S\right) + k^2 u$$

أو

$$0 = -k_0^2 u\left[\left(\vec{\nabla} S\right)^2 - \frac{k^2}{k_0^2}\right] + 2ik_0 u\left(\frac{1}{2}\nabla^2 S + \vec{\nabla} LnA \cdot \vec{\nabla} S\right)$$

تحقق u هذه المعادلة إذا تحقق الشرطان التاليان، الأول

$$\left(\vec{\nabla} S\right)^2 = \frac{k^2}{k_0^2} = n^2 \tag{3.18}$$

حيث $n^2 = \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}$، n معامل انكسار الموجة ذات الطول λ_0 بالنسبة للوسط المقابل لطول للموجة λ،

والثاني

$$\vec{\nabla} LnA \cdot \vec{\nabla} S = -\frac{1}{2}\nabla^2 S \tag{3.19}$$

يطلق على الشرط الأول (3.18) اسم معادلة الآيكونال (وإن لم تكن هذه التسمية مقبولة بالإجماع)، إنها معادلة بالمشتقات من الرتبة الأولى المرفوعة إلى الدرجة الثانية. يبين تعريفنا (3.17) لـ u أن الطور الثابت، $S(x, y, z) =$ ثابـت، يعين سطوح الموجة ذات الناظم $\vec{\nabla} S$ الذي يمكن النظر إليه كخطوط الأشعة وهو اتجاه ثابت إذا كان معامل الانكسار ثابتاً حسب (3.18)؛ وإلا فإن اتجاه الأشعة يتغير في الأوساط التي يتغير فيها معامل الانكسار وترسم الأشعة منحنيات كما رأينا في (3.5) انطلاقاً من مبدأ فيرما. إن أبسط حل لمعادلة الأيكونال في وسط متجانس – n ثابت – هو الدالة الخطية

$$S = n(\alpha x + \beta y + \gamma z) \tag{3.20}$$

الخاضعة الشروط $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$؛ اي أن α، β، γ هي جيوب التمام الموجهة للشعاع (مركبات $\vec{\nabla} S$ هي nα، nβ، nγ). يعين الحل (3.20) والشروط الخاضعة له أحد جيوب التمام الثلاثة ويبقى الآخران اعتباطيين.

الحل الممكن الآخر للمعادلة في وسط متجانس هو الحل الكروي ذو النقطة الشاذة O

$$S = nr \qquad (\vec{\nabla} S)^2 = n^2\left(\frac{r}{r}\right)^2 = n^2 \tag{3.21}$$

نحصل على الحل العام بأخذ سطح ما وإنشاء فئة من السطوح الموازية له (التي تبعد عن بعضها بعضاً مسافات لامتناهية في الصغر. ونكون بذلك قد حصلنا على الصيغة الرياضية التي تفسر الظل : يصدر منبع ضوئي نقطي أشعة مستقيمة تصل إلى حاجز معتم – حاجز لا يصدر الضوء ولا يمتصه تعريفاً – فتحدد خلفه ظلاً له. تتناقص سعة الموجة إلى الصفر محدثة انقطاعاً في الاتجاه العمودي على حد الظل، وهو ما يعبر عنه الشرط (3.19). وبما أن $\lambda \to 0$ فلا وجود لظواهر الانعراج التي درسناها في الفقرة السابقة.

لنأخذ متجهة واحدية $\vec{s}$ في اتجاه الأشعة العمودية على الآيكونال $S(x, y, z) =$ ثابـت. ولنكتب الزاوية $\Delta\theta$ التي يصنعها المماسان s و s' على الشكل $d\vec{s} = \vec{s}' - \vec{s}$ ونسمي تقوساً $\vec{\kappa}$ المتجهة التي طويلتها مقلوب نصف قطر الانحناء ونكتب

$$\vec{\kappa} = \frac{d\vec{s}}{d\ell} \tag{3.22}$$

إن $\vec{s}$ تعريفاً هي

$$\vec{s} = \frac{\vec{\nabla} S}{|\vec{\nabla} S|} = \frac{\vec{\nabla} S}{n} \tag{3.23}$$

التي ترينا أن

$$\vec{\nabla} \times (n\vec{s}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} S) \equiv 0 \tag{3.24}$$

ومنه حسب مبرهنة ستوكس

$$\oint n\vec{s} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

أو نظراً لـ (3.23)

$$\int_1^2 n\vec{s} \cdot d\vec{\ell} = S_2 - S_1 \tag{3.25}$$

لنكتب الانحناء في الإحداثيات الديكارتية

$$\vec{\kappa} = \frac{d\vec{s}}{d\ell} = \frac{d\vec{s}}{dx}\frac{dx}{d\ell} + \frac{d\vec{s}}{dy}\frac{dy}{d\ell} + \frac{ds}{dy}\frac{dz}{d\ell}$$

لكن المشتقات $\frac{dx}{d\ell}$، ... ليست سوى مركبات المتجهة الواحدية $\vec{s}$: s_x، s_y، s_z؛ أي أن

$$\vec{\kappa} = \frac{d\vec{s}}{dx}s_x + \frac{d\vec{s}}{dy}s_y + \frac{d\vec{s}}{dz}s_z$$

وبما أن $|\vec{s}|^2 = 1$ فإن

$$0 = \frac{1}{2}\vec{\nabla}|\vec{s}|^2 = s_x\vec{\nabla}s_x + s_y\vec{\nabla}s_y + s_z\vec{\nabla}s_z$$

ندخل هذا المقدار المنعدم في صيغة $\vec{\kappa}$ لتصبح

$$\vec{\kappa} = s_x\left(\frac{d\vec{s}}{dx} - \vec{\nabla}s_x\right) + s_y\left(\frac{d\vec{s}}{dy} - \vec{\nabla}s_y\right) + s_z\left(\frac{d\vec{s}}{dz} - \vec{\nabla}s_z\right)$$

مركبات هذه المتجهة حيث تنعدم الحدود من الشكل $\frac{\partial s_x}{\partial x} - \vec{\nabla}_x s_x$ ليبقى كمركبة لـ κ_x في الحد الثاني المقدار $\frac{\partial s_x}{\partial y} - \vec{\nabla}_x s_y$ مضروباً بـ s_y وفي الحد الثالث $\frac{\partial s_x}{\partial z} - \vec{\nabla}_x s_z$ مضروباً بـ s_z أي

$$\kappa_x = s_y\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial x}\right) + s_z\left(\frac{\partial s_x}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial x}\right)$$

$$\equiv -s_y\left(\vec{\nabla} \times \vec{s}\right)_z + s_z\left(\vec{\nabla} \times \vec{s}\right)_y \equiv \left[\left(\vec{\nabla} \times \vec{s}\right) \times \vec{s}\right]_x$$

وهكذا فإن

$$\vec{\kappa} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{s}\right) \times \vec{s} \qquad (3.26)$$

لنكتب العلاقة (3.24) على الشكل

$$0 = \vec{\nabla} \times (n\vec{s}) \equiv n\left(\vec{\nabla} \times \vec{s}\right) + \vec{\nabla}n \times \vec{s}$$

أو

$$\vec{\nabla} \times \vec{s} = \frac{-1}{n}\left(\vec{\nabla}n \times \vec{s}\right) \qquad (3.24)'$$

نبدل في معادلة الانحناء $\vec{\nabla} \times \vec{s}$ بهذا المقدار لنضعها على الشكل

$$\vec{\kappa} = \frac{1}{n}\vec{s} \times \left(\vec{s} \times \vec{\nabla}n\right) = \frac{1}{n}\left\{\vec{\nabla}n - \left(\vec{s} \cdot \vec{\nabla}n\right)\vec{s}\right\} \qquad (3.26)'$$

ترينا هذه العلاقة أن المماس $\vec{s}$ والناظم الرئيسي $\vec{\kappa}$ و $\vec{\nabla}n$ تقع كلها في المستوى اللاصق. أو بعبارة أخرى أن اتجاه الأشعة $\vec{s}$ وغراديان معامل الانكسار n يحددان المستوى اللاصق. إن $\vec{\kappa} = 0$ عندما يكون معامل الانكسار ثابتاً وتنتشر الأشعة الضوئية على خطوط مستقيمة. لنلاحظ من (3.26) أن $\vec{s}$ عمودي على $\vec{\nabla} \times \vec{s}$ لأنه يقع في مستوى κ وبالتالي فالقيمة المطلقة للانحناء هي حسب '(3.26)

$$|\kappa| = \frac{1}{n}\left|\vec{\nabla}n\right|\sin\alpha \qquad (3.27)$$

حيث α هي الزاوية بين $\vec{\nabla}n$ والمماس $\vec{s}$. تعمم هذه العلاقة (3.5) التي استخلصناها من مبدأ فيرما مما يدل على أن الضوء الهندسي عندما ننظر إليه كتقريب للكهرطيسية (للضوء الفيزيائي) ينطبق تماماً على الميكانيك التقليدي للجسيمات في الأوساط المتجانسة وغير المتجانسة على حد سواء.

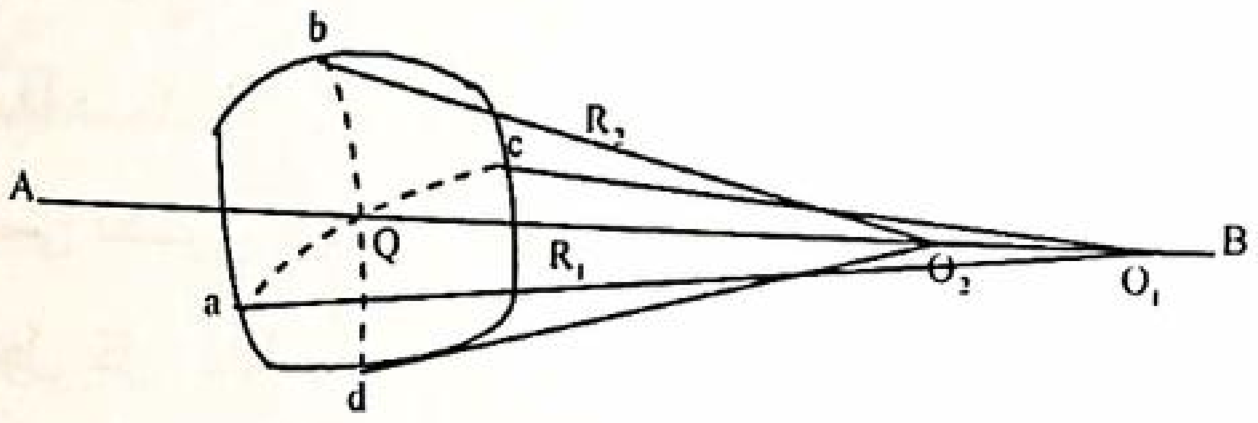
ملاحظة:

يكتسي هذا الرقم أهمية تاريخية كبرى لأن الانتقال من الميكانيك التقليدي (النيوتوني) إلى الميكانيك الكمومي الموجي، من المسار إلى الموجة هو اتباع عكس ما فعلناه هنا. يلعب الفعل التقليدي دور الأيكونال للوصول إلى المعادلة الموجية، معادلة شرودينغر كما سنرى في المجلد القادم.

5.3- شدة الضوء في الضوء الهندسي

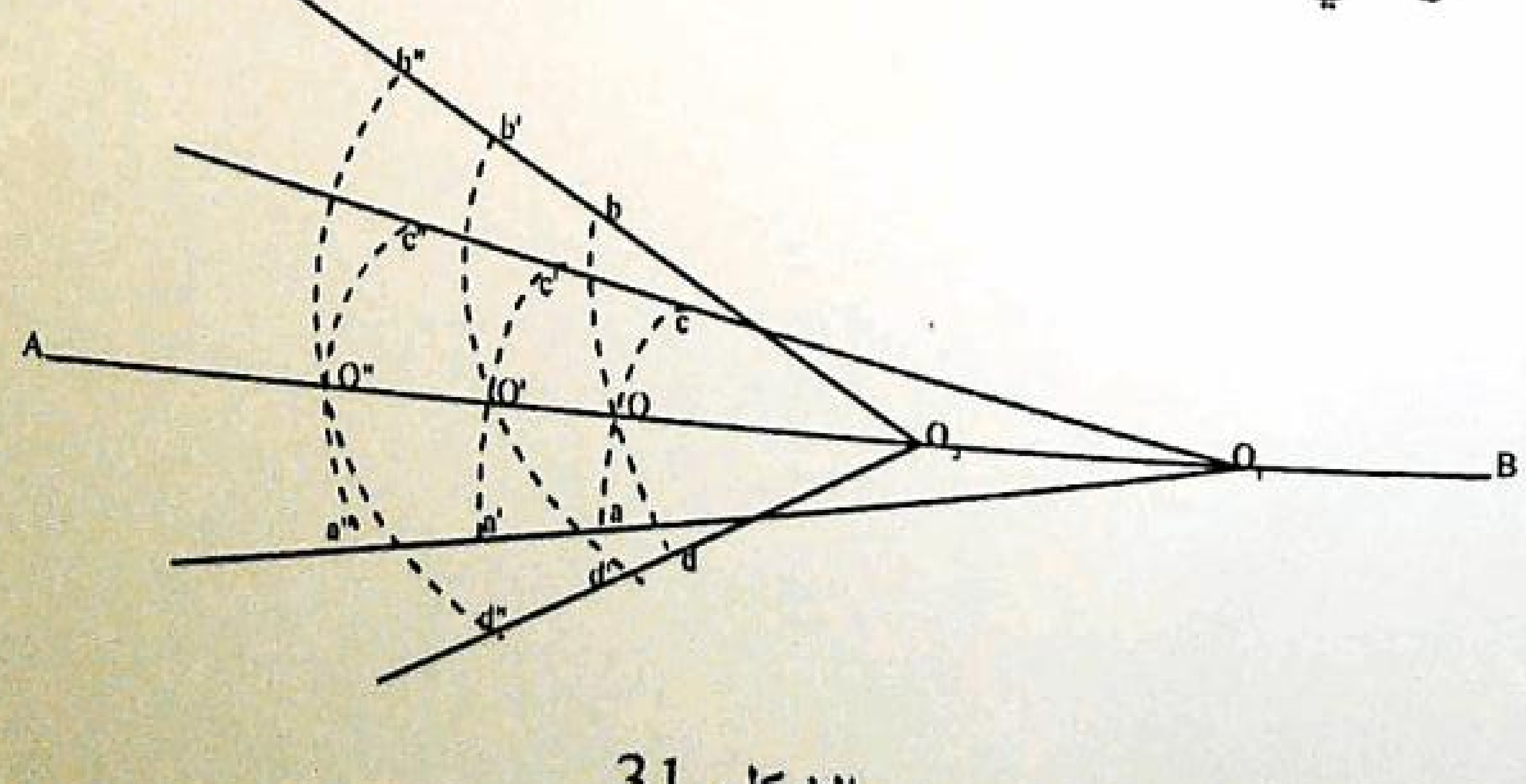
تتحدد كثافة الطاقة في الكهرطيسية (الضوء الموجي) بمتجهة بوينتيغ، فكيف تتوزع شدة الضوء في الضوء الهندسي ؟ لا تحدد الأشعة الضوئية إلا اتجاه انتشار الضوء في نقطة ما. لننظر إلى سطح موجة تعينه حزمة أشعة لامتناهية في الصغر. من المعلوم في الهندسة التفاضلية أن عنصر السطح يعين في نقطة ما O منه بإحداثيتين منحنيتين، بمنحنيين متقاطعين في O لا يقعا في مستوى واحد؛ ولعنصر السطح بالتالي مستويان لاصقان ونصفا قطر انحناء رئيسيان (واقعان على الترتيب في هذين المستويين). ليكن ac و bd عنصري دائرتي الانحناء على عنصر السطح، الشكل.30، يتلاقى الشعاعان الماران بالنقطتين a و c في O_1، aO_1، نصف قطر الانحناء الأول، والشعاعان الماران بالنقطتين b و d في O_2، bO_2، نصف قطر الانحناء الثاني. يتناسب المنحنيان ac و bd مع نصفي قطري الانحناء R_1 و R_2، كل منهما يساوي لزاوية فتحة الأشعة مضروبة بنصف القطر. ومساحة عنصر السطح متناسبة مع R_1R_2، مع جداء الطولين العنصريين ac و bd. إن التدفق، وبالتالي كثافة الطاقة متناسبة عكساً مع مساحة السطح المقطوع ولدينا في الأخير شدة الضوء

$$I = \frac{\text{ثابت}}{R_1R_2} \tag{3.28}$$



الشكل.30

تعني هذه العلاقة أن للشعاع AB المار بـ O نقطتين ثابتتين O_1 و O_2 هما مركزا انحناء كل سطح الموجة التي تقطع هذا الشعاع في نقطة O : $OO_1 = R_1$ و $OO_2 = R_2$. فهي تحدد إذاً تغيرات شدة الضوء في مختلف نقاط الحزمة الموازية للشعاع AB حسب بعدها عن النقطتين المذكورتين، الشكل.31. ولكنها لا تحدد أي علاقة بين شدات الضوء في مختلف نقاط سطح الموجة المقابلة للأشعة الأخرى A_1B_1، A_2B_2، الخ...



الشكل.31

إن شدة الموجة متناسبة مع مربع سعتها كما نعلم، لذا يمكننا كتابة مركبات الموجة (الحقل الكهربائي) على الشكل

$$u = \frac{c}{\sqrt{R_1 R_2}} e^{ikR} \qquad (3.29)$$

إن R في معامل الطور e^{ikR} هي إما R_1 أو R_2، والمقداران e^{ikR_1} و e^{ikR_2} متناسبين $e^{ikR_2} = ce^{ikR_1}$ حيث c مقدار ثابت لثبات الفرق بين R_1 و R_2 $c = e^{ik(R_2 - R_1)}$ عندما يتطابق نصفا قطر الانحناء لسطح الموجه على بعضهما $R_1 = R_2$ تأخذ العلاقتان السابقتان الشكل

$$I = \frac{\text{ثابت}}{R^2} \qquad (3.28)'$$

$$u = \frac{c}{R} e^{ikR} \qquad (3.29)'$$

سطوح الموجة كروية صادرة عن منبع ضوئي نقطي في مركزها.

ترينا العلاقة (3.28) أن شدة الضوء تصبح لامتناهية في الكبر في النقطتين O_1 و O_2 مركزي انحناء سطح الموجة $R_1 = 0$، $R_2 = 0$. عندما نطبق هذه العلاقة على كل شعاعات الحزمة نرى أن شدة الضوء لامتناهية في الكبر على سطحين هما المحل الهندسي لكل مراكز انحناء سطح الموجه المقابلة لمختلف الأشعة BA، B_1A_1، B_2A_2،... يطلق على هذين السطحين اسم الحارقتين Caustics. ولدينا، في الحالة الخاصة التي تكون فيها سطوح الموجة التي تحددها حزمة الأشعة كروية، $R_1 = R_2 =$ ثابت من أجل كل نقاط السطح الكروي وتتحول الحارقتان إلى نقطة وحيدة هي البؤرة.

يجب أن نشير أنه من الممكن (في حالة سطوح موجة مقعرة) وقوع مركز انحناء سطح الموجة على امتداد الشعاع الضوئي – خارج النظمة البصرية التي أنتجت الشعاع يقال عندئذ عن الحارقتين والبؤرة إنها خيالية. ويستحيل على الشدة أن تصبح لامتناهية في أي نقطة من نقاط الشعاع. لنشر أيضاً أن الشدة اللامتناهية مستحيلة بطبيعة الحال وبالتالي فإن تقريب الضوء الهندسي غير صالح في النقاط القريبة من الحارقة.

الفصل السابع

التيارات المتناوبة
الظواهر شبه المستقرة

1- دارات التيارات المتناوبة.................. 337
2- الإرنان Resonance.................. 351
3- قيادة الموجة.................. 367

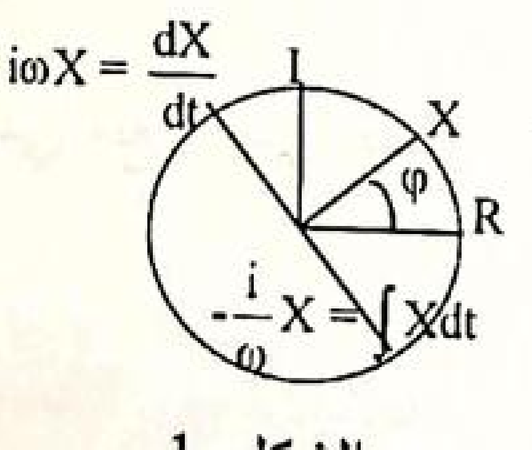
الفصل السابع: التيارات المتناوبة، الظواهر شبه المستقرة

1. دارات التيارات المتناوبة

1.1- الممانعة Impedance

وضعنا عنواناً إضافياً لهذا الفصل يبين أن تغيرات الكمونات والحقول في معادلات ماكسويل الواقعة في توصيف الظواهر التي سنعالجها بطيئة جداً إذ إن تردد موجات التيار المتناوب υ هو عادة 50 هرتز، خمسين دورة في الثانية، بينما تبلغ ترددات الموجات الضوئية، على سبيل المثال، الـ 10^{15} هرتز، وهو مقدار كبير جداً أما تردد التيار المتناوب. نحدد البطء بالقول إن طول الموجة كبير جداً أمام الأبعاد التي ندرس الظاهرة فيها : $\ell \langle\langle \lambda = cT$.

نمثل إنتاج التيار المتناوب بدوران قضيب مغنطيسي قرب وشيعة بسرعة زاوية ω، $\omega = 2\pi\upsilon = 100\pi$ ونكتب تدفقه عبر سطح S، $\phi = SB\cos\omega t$ على شكل عقدي يسهل الحساب، شريطة أن نعتبر أن المقدار الفيزيائي الذي يهمنا هو القسم الحقيقي لهذه الدالة. إن مشتق أي دالة عقدية من الشكل $X = e^{i(\omega t+\varphi)}$ بالنسبة للزمن هو جداؤها بالمقدار الثابت $i\omega$ أي إضافة طور $e^{i\pi/2}$ إلى φ، والدالة الأصلية لهذه الدالة $\int_0 X dt = \frac{1}{i\omega} X$ إضافة طور $e^{-i\pi/2}$ إلى X، الشكل.1



الشكل.1

سنكتب إذاً تدفق الحقل المغنطيسي الدوري على الشكل

$$\phi = SBe^{i\omega t} \tag{1.1}$$

والقوة المحركة الكهربائية الناتجة عن تغيره مع الزمن

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\omega e^{i\pi/2}\phi = -\omega e^{i(\omega t+\varphi)} \tag{1.2}$$

إنها فرق الكمون بين نهايتي دارة يمر فيها التيار المتناوب الناتج عن التحريض

$$V = V_0 e^{i(\omega t+\varphi)} \tag{1.3}$$

تغيرات V بطيئة جداً كما قلنا، إذ يصل طول الموجة إلى 6000 كم، مما يسمح لنا النظر إلى الحقلين الكهربائي والمغنطيسي، التابعين للزمن، وكأنهما ناتجين عن شحنات وتيارات مستقلة عن الزمن: شحنات ساكنة وتيارات مستمرة. تأخذ الشحنة داخل الموصل القيمة التي تأخذها في حالة الكهربائية الساكنة، $\rho = 0$؛ والفارق الوحيد عن حالة الكهربائية الساكنة هو أن هذه القيمة ليست آنية وإنما نتيجة تناقص أسي سريع مع الزمن، إنها تحتاج إلى زمن قصير جداً لكي تستقر على هذه القيمة. لدينا، في واقع الأمر، من معادلة الاتصالية

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

حيث كثافة التيار $\vec{J}$ المتغيرة دورياً متناسبة مع الحقل الكهربائي المتغير على نفس النحو و $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$. نفترض أن معامل الناقلية σ هو لوسط متجانس ومتناحي وبالتالي أن $\vec{\nabla}\sigma = 0$. تصبح معادلة الاتصالية في هذه الحالة:

$$\sigma \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

رأينا في الفصل الخامس أن لـ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ داخل المادة نفس علاقة غاوص من أجل $\vec{E}$ في الفضاء الخاوي على أن نستبدل بسماحية المادة ε سماحية الخواء ε_0

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

تصبح معادلة الاتصالية معادلة تفاضلية بـ ρ

$$\sigma \frac{\rho}{\varepsilon} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

و

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma t}{\varepsilon}} \qquad (1.4)$$

تتناقص الشحنة داخل الموصل بشكل أسي مع الزمن، نطلق على الزمن اللازم لكي تصبح هذه الكثافة مساوية لـ $\frac{\rho_0}{e}$ اسم ثابتة الزمن τ :

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

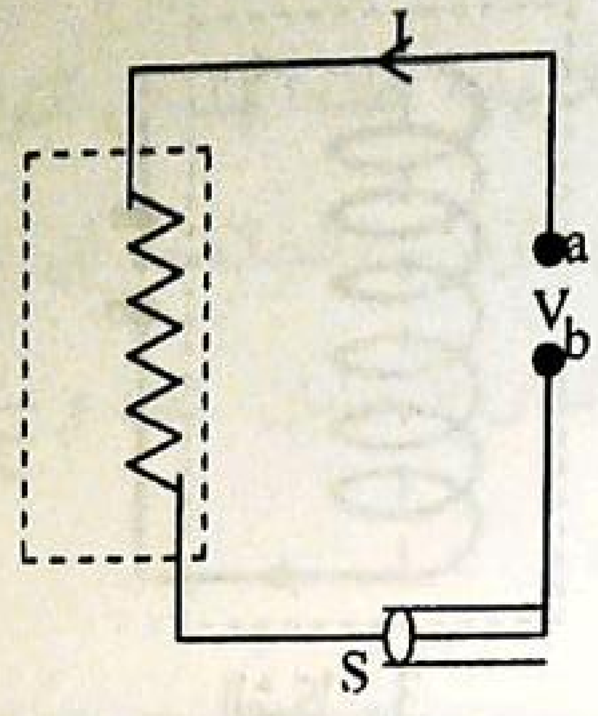
يمكن أخذ $\varepsilon = \varepsilon_0$ في أغلب المعادن و $\frac{1}{\sigma} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ في حالة النحاس أي أن

$$\tau = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8} \simeq 10^{-19} \text{ ثانية}$$

سننظر فيما يلي إلى دارة يغذيها تيار متناوب مؤلفة من ثلاثة عناصر مثالية نتمثلها بسلك ذي مقاومة R ووشيعة ذات تحريض L ومكثفة ذات سعة C نسميها مكونات الدارة ذات النهايتين a و b، a هي ذات الكمون الأعلى.

1- رأينا أن القوة المحركة الكهربائية تتبدد على شكل حرارة نتيجة اصطدام إلكترونات النقل بأيونات الموصل الثابتة. سنتصور سلكاً طولانياً لا التفاف فيه، لا وجود لحقل مغنطيسي ناتج عن التحريض

ونهمل الحقل المغنطيسي الناتج عنه بين نهايتي الدارة بأن نحيطه بقفص معدني يمنع تسرب هذا الحقل، الشكل.2



الشكل.2

إن

$$RI = V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{\sigma}\int \vec{J} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{\sigma}\vec{J}\,\vec{L} = \frac{IL}{\sigma S} \qquad (1.5)$$

حيث L طول الدارة و $\vec{J} = \frac{\vec{I}}{S}$ ، S مقطع السلك تعريفاً وبالتالي فإن المقاومة

$$R = \frac{L}{\sigma S} \qquad (1.5)'$$

مقدار ثابت لا يتأثر بدورية التيار.

2– هذا في حالة سلك لا يجول الحقل المغنطيسي فيه، أما في حالة الملف (الوشيعة) فإن

$$-e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

إن الحد الأول هو جولان الحقل المعدوم داخل الملف والحد الثاني هو فرق الكمون V تعريفاً.

و

$$V = -e = L\frac{dI}{dt} = Li\omega I$$

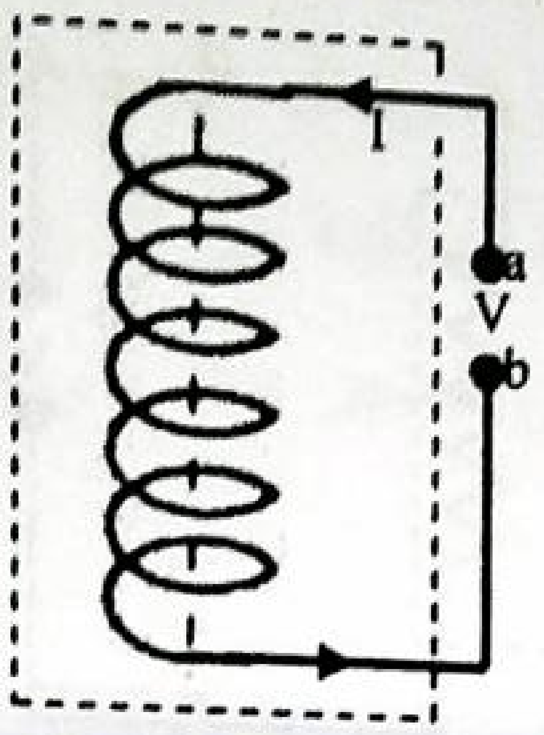
حيث L معامل تحريض الملف، نرمز لمثل التناسب بين الكمون والتيار بـ Z_L، كما في (1.5) ونطلق عليه اسم ممانعة الملف

$$V = Z_L I \qquad (1.6)$$

$$Z_L = i\omega L \qquad (1.6)'$$

نفرض هنا أيضاً أن الملف مثالي، لا مقاومة للتيار في السلك والموصل موصل تام ولا تأثير للحقل المغنطيسي الذي ينتجه على تدفق الحقل بين طرفي الدارة a و b، على القوة المحركة الكهربائية.

نجعل هذا التأثير مهملاً بإحاطة الوشيعة بقفص معدني كما في حالة المقاومة، الشكل.3



الشكل.3

3- نرمز على نفس النحو لمثل التناسب بين الكمون وشدة التيار الذي يشحن مكثفة سعتها C بـ Z_C ونسميه ممانعة المكثفة. لدينا كما في الحالة السابقة

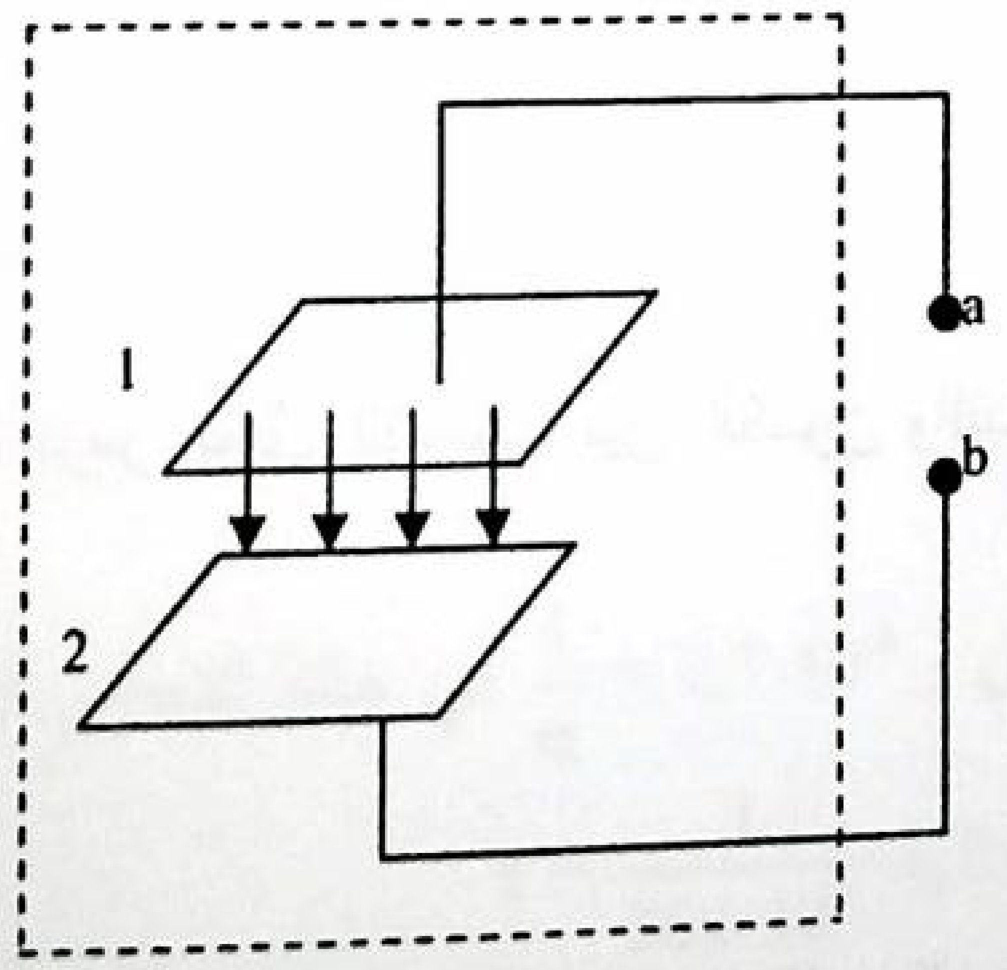
$$V = -e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\text{في السلك}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

حيث أشرنا بـ 1 و 2 إلى لبوسي المكثفة، الشكل.4، الحد الأول في الطرف الثاني معدوم لأن الحقل $\vec{E}$ يساوي الصفر داخل الموصل والثاني هو $\frac{Q}{C}$ و

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{\int I dt}{C} = \frac{I}{i\omega C} = Z_C I \qquad (1.7)$$

وممانعة المكثفة هي

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} \qquad (1.7)'$$



الشكل.4

نفرض أن الحالة مثالية فلا مقاومة للتيار في السلك ولا وجود للحقل المغنطيسي في جوار المكثفة كما في الحالة السابقة، كما نفرض أن الحجم بين اللبوسين عازل تام لا يسمح بمرور أي شحنة بينهما، وأن

اللبوسين متقاربان لكنهما بعيدان عن المركبات الأخرى للدارة بحيث تبقى خطوط الحقل الكهربائي محصورة بينهما.

لنلاحظ أن ممانعة المكثفة تتناهى إلى اللانهاية عندما يتناهى التواتر الزاوي ω إلى الصفر $Z_C \underset{\omega \to 0}{\to} \infty$، إنها لامتناهية في الحالات المستقلة عن الزمن. والخلاصة إن للعناصر الأساسية المثالية للدارة ثلاث ممانعات هي المقاومة R الحقيقية والممانعان التخيليان $i\omega L$ و $\frac{1}{i\omega C}$.

2.1- قواعد كيرشوف

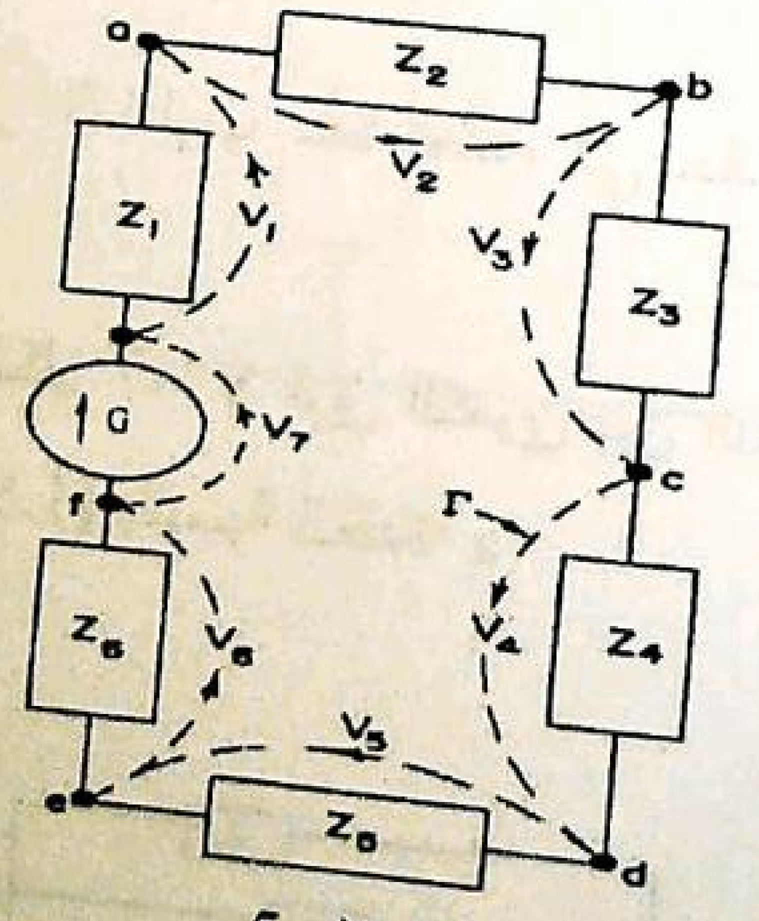
نستطيع بفضل اللجوء إلى العناصر المثالية للدارة وضع قواعد للتيار المتناوب لا تختلف عن القواعد التي وضعناها للتيار المستمر – المستقل عن الزمن –، مستعملين العلاقات الخطية، (1.5)، (1.6) و(1.7) بين فرق الكمون والممانعة.

لنفرض أن لدينا دارة مؤلفة من مولد للتيار المتناوب G، ومن عدد من الممانعات، ست ممانعات مثلاً. لا يهمنا ما يقع داخل كل واحدة منها وكل ما يمكننا قوله إنه لا وجود لحقل معنطيسي خارجها. لنتصور إذاً مساراً مغلقاً Γ، الشكل.5، يتجنب المرور عبر الممانعات. إن جولان الحقل الكهربائي عبر هذا المسار معدوم إذاً ولدينا

$$0 = \oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \sum_{n=1}^{6} V_n$$

ومنه بأخذ العلاقة الخطية بين شدة التيار وفرق الكمون قاعدة كيرشوف الأولى

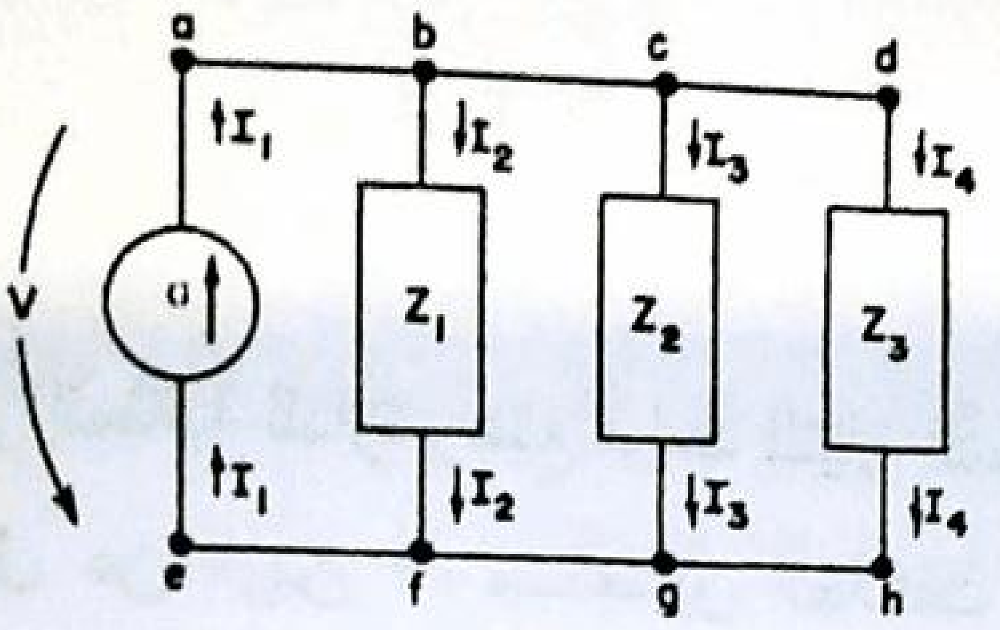
$$\sum_n V_n = \sum Z_n I_n = 0 \qquad (1.8)$$



الشكل.5

ولدينا كذلك، عندما نضع الممانعات على التوازي، الشكل.6، وبإهمال المقاومة في الأسلاك التي تصل العقد a, b, c, d ببعضها $V_a = V_b = V_c = V_d$. ولدينا على نفس النحو تساوي الكمون في العقد e, f, g, h . هذا من جهة، ومن جهة أخرى فإن عناصر الدارة المثالية لا تتيح تراكم الشحنات الكهربائية عند طرفيها، وبعبارة أخرى إن كل الشحنات التي تصل إلى العقدة تغادرها، أو إن المجموع الجبري للتيارات التي تدخل العقدة يساوي الصفر : انحفاظ الشحنة الكهربائية

$$\sum_n I_n = 0 \qquad (1.9)$$



الشكل.6

نعطي إشارة + إلى التيار الذي يدخل العقدة وإشارة – للذي يغادرها.

لدينا عندما ننظر للعقدة a على سبيل المثال

$$I_1 - (I_2 + I_3 + I_4) = 0$$

وإلى العقدة e

$$(I_2 + I_3 + I_4) - I_1 = 0$$

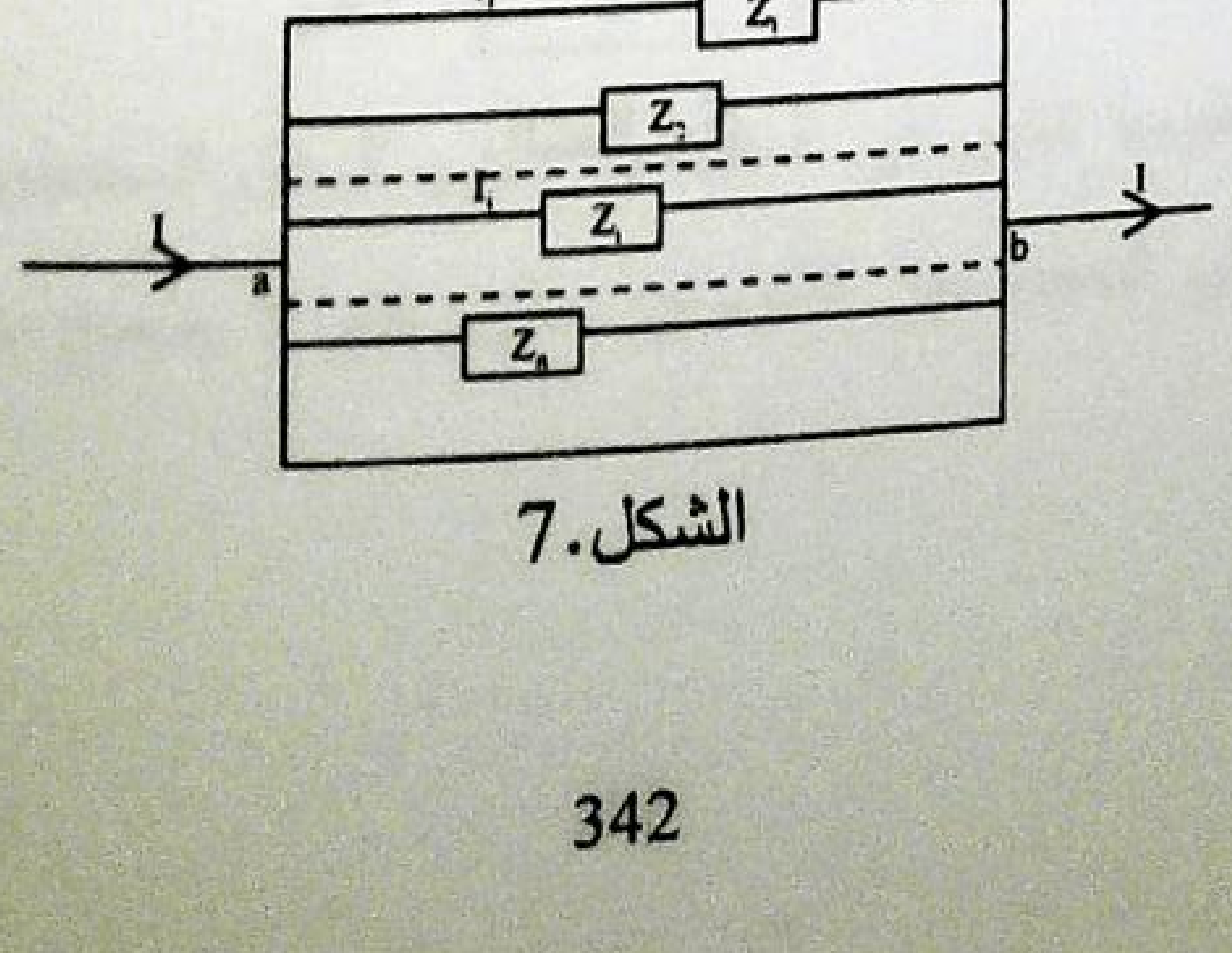
إن (1.8) و(1.9) هما قاعدتا كيرشوف. نكتب القاعدة الأولى في حال وجود مولد للتيار المتناوب، قوة محركة كهربائية e على الشكل

$$\sum Z_i I_i - e = 0 \qquad (1.8)'$$

لا تختلف المحاكمة في حالة التيار المتناوب عما فعلناه في حالة التيار المستمر لتعيين الصلة بين الممانعات المربوطة على التوازي.

ليكن I التيار الداخل إلى الدارة، الشكل.7، V فرق الكمون بين النقطتين a و b و I_i و Z_i شدة التيار والممانعة في الفرع i. لدينا حسب (1.9) بالنسبة للعقدة a

$$I - \sum_{i=1}^{N} I_n = 0$$



الشكل.7

ومن جهة أخرى فإن

$$Z_i I_i = V \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, N$$

وهكذا فإن

$$I = \sum_{i=1}^{N} I_i = V\left(\sum_i \frac{1}{Z_i}\right)$$

والممانعة الكلية $Z = \frac{V}{I}$ هي

$$Z = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{Z_i}} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots + \frac{1}{Z_N}} \qquad (1.10)$$

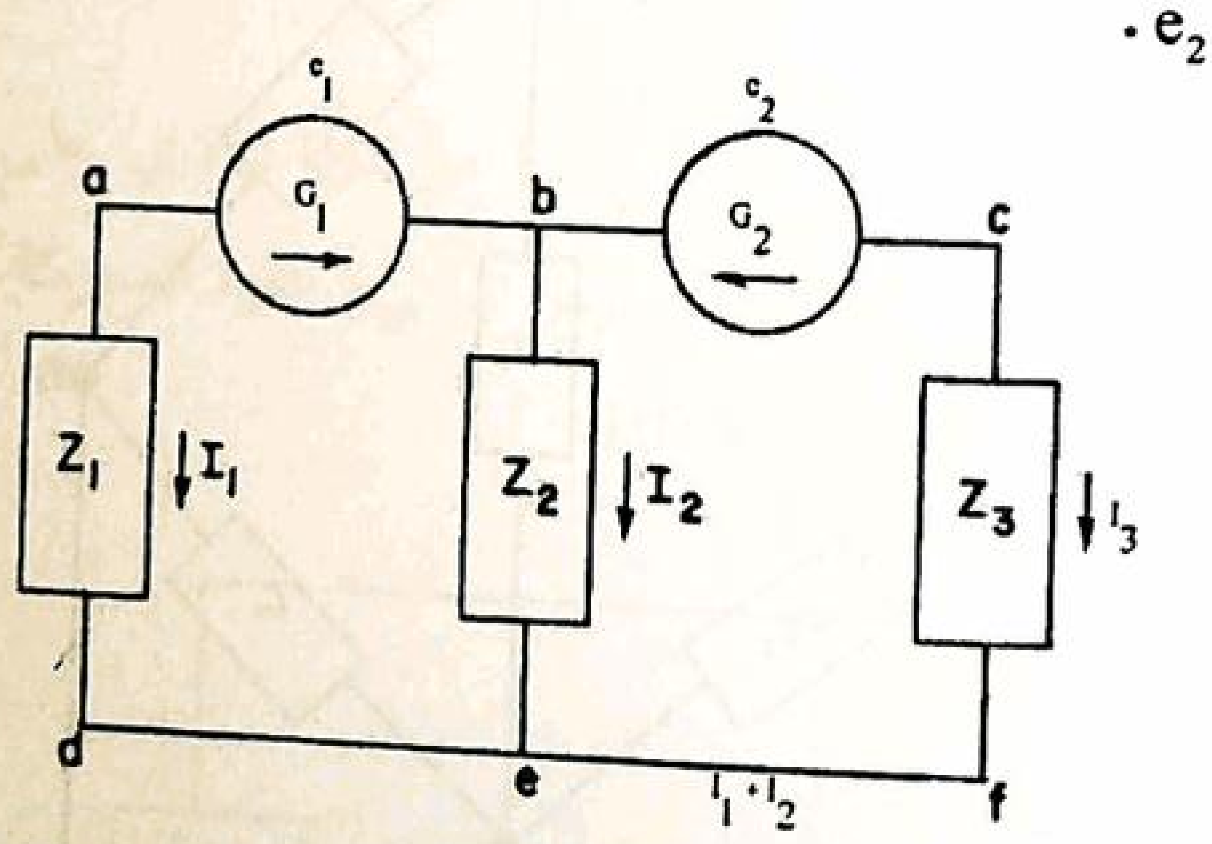
نكتب هذه الممانعة في حال وجود ممانعتين فقط على التوازي

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad (1.10)'$$

.

ملاحظة :

تفترض العلاقة (1.10) أن V هو نفسه بالنسبة لكل الممانعات المتوازية ولكنها لا تنطبق على حالة وجود مولدات على الخطوط الواصلة بين الممانعات، حيث يجب تطبيق العلاقة '(1.8) من أجل كل مولد. ليكن لدينا، على سبيل المثال، الدارة التالية، الشكل.8، بثلاث ممانعات ومولدين G_1 و G_2 بقوتين محركتين كهربائيتين e_1 و e_2.



الشكل.8

لدينا حسب (1.9)

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

و

$$I_3 = -(I_1 + I_2) \qquad (1)$$

وفي الدارة اليسرى a b e d حسب '(1.8)

$$I_2Z_2 - e_1 - I_1Z_1 = 0 \quad (2)$$

وفي الدارة اليمنى c b e f

$$I_2Z_2 - I_3Z_3 - e_2 = 0 \quad (3)$$

وحل هذه المعادلات الثلاث، هو من (2) و(3) آخذين (1) بعين الاعتبار

$$I_1 = \frac{Z_2e_2 - (Z_2 + Z_3)e_1}{Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2Z_3}$$

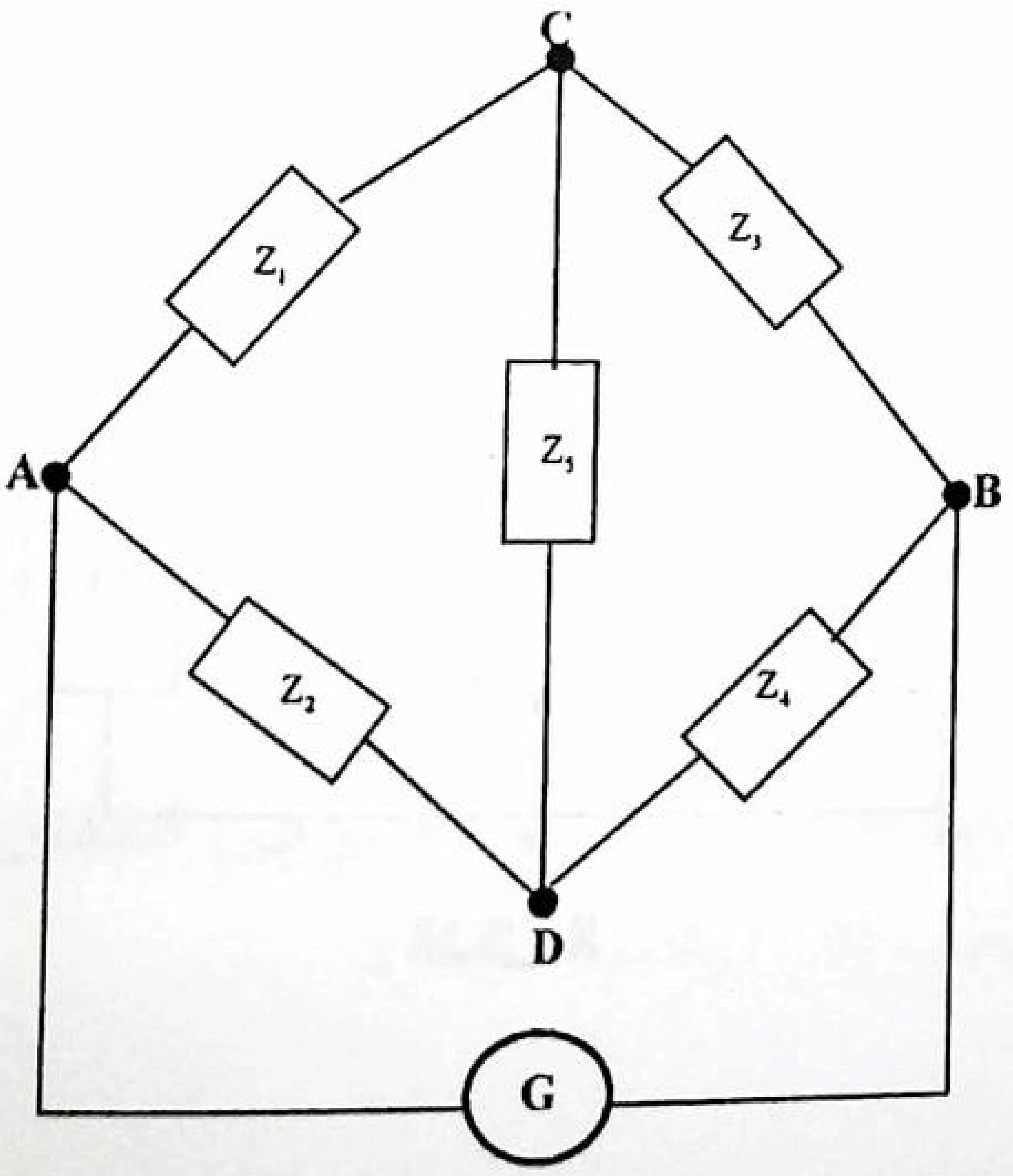
$$I_2 = \frac{Z_1e_2 + Z_3e_1}{Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2Z_3}$$

ومن (1)

$$I_3 = \frac{e_1Z_2 - e_2(Z_1 + Z_2)}{Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2Z_3}$$

كثيراً ما تستعمل قواعد كيرشوف لمعرفة الشروط التي يجب أن تحققها الممانعات بحيث لا يمر التيار في إحداها : لتكن لدينا خمس ممانعات مركبة على الشكل التالي، الشكل.9، ما هي العلاقة التي تربط بين الممانعات الأربعة الأولى بحيث لا يمر التيار في الممانعة الخامسة، في الجسر، جسر وطستن Wheatstone، بين C و D؟ يعني عدم مرور التيار بين C و D أن $V_A - V_C$ يساوي $V_A - V_D$ وبالتالي

$$I_1Z_1 = I_2Z_2$$



الشكل.9

كما يعني أن $I_3 = I_1$ و $I_4 = I_2$ وبالتالي

$$I_1Z_3 = I_2Z_4$$

ونقول عن الجسر عندئذ إنه متوازن وإن النسبة

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{Z_2}{Z_4} \quad (1.11)$$

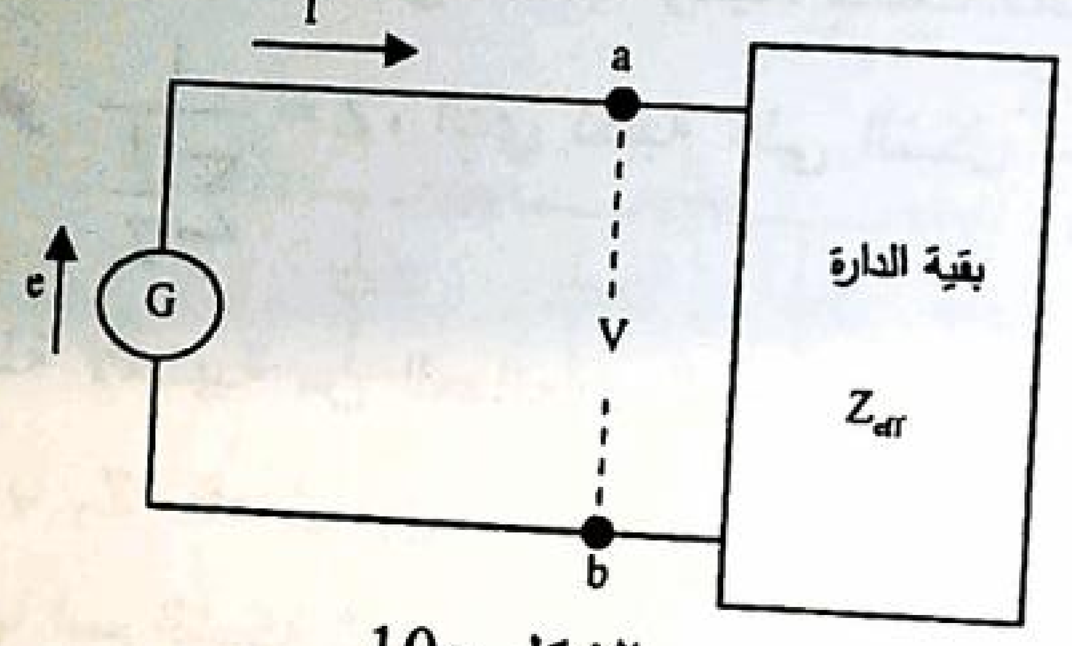
هي التي تحقق هذا التوازن.

إن جمعية قاعدتي كيرشوف تتيح لنا النظر إلى دارات معقدة من وجهة نظر إجمالية : لنفرض أن لدينا مولداً قوته المحركة الكهربائية e ينتج تياراً I في دارة ما. إن كل ما يمكننا قوله هو أن I متناسب مع e بحيث نكتب '(1.8) على الشكل

$$IZ_{eff} - e = 0$$

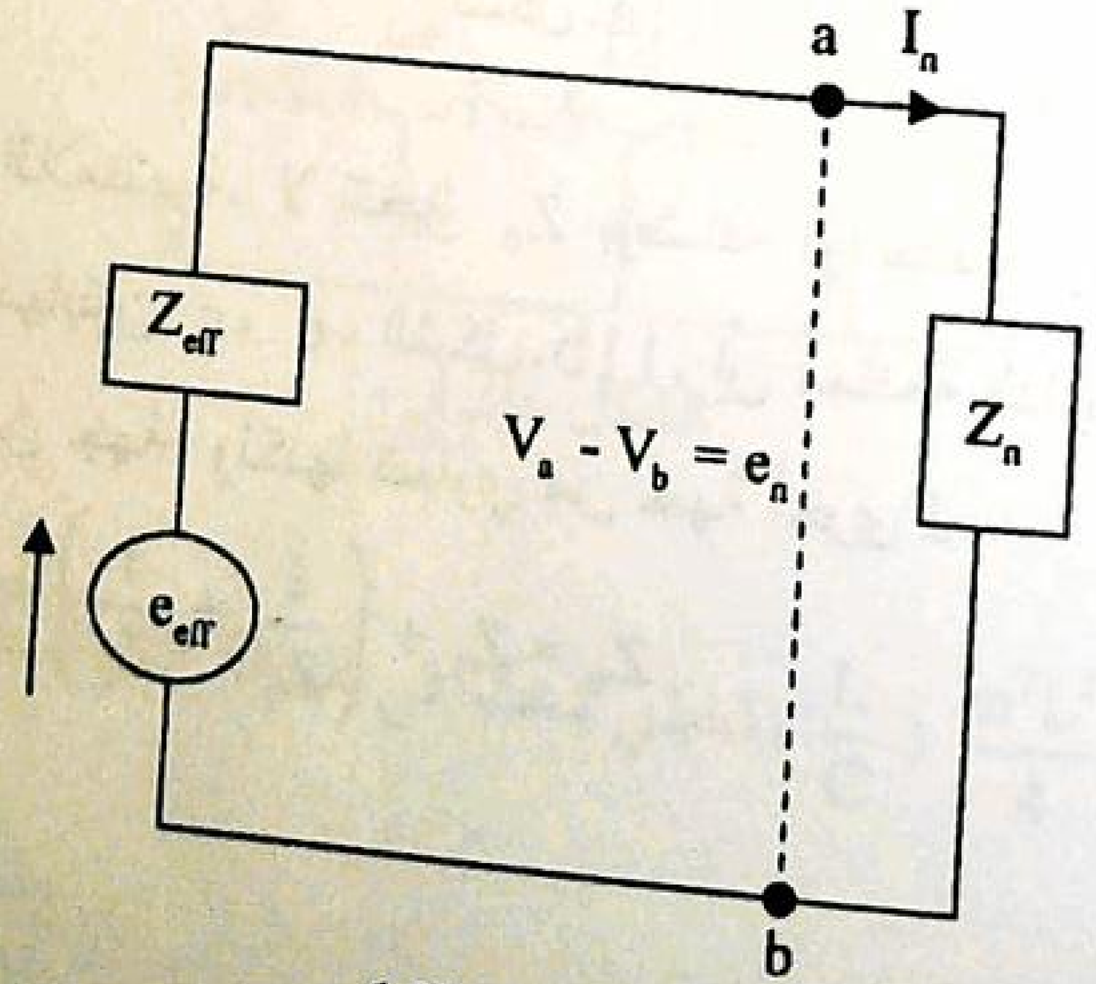
$$I = \frac{e}{Z_{eff}}$$

ونكون قد استبدلنا في الدارة المعقدة مختلف ممانعاتها بممانعة واحدة، الشكل.10a، نسميها الممانعة الفعالة.



الشكل.10a

لنفرض على العكس أن ما يهمنا هو القسم النهائي I_n من دراة تحتوي على مولدات ومستهلكات للطاقة (محركات مثلاً) قوتها المحركة الكهربائية سالبة. نرمز بـ e_{eff} للقوة المحركة الكهربائية الكلية على يسار القسم النهائي وبـ Z_{eff} لممانعته الكلية، الشكل.10b.



الشكل.10b

نكتب '(1.8) على شكل مجموع التيارات والقوى المحركة الكهربائية قبل النقطة a حيث التيار هو I_n إنها

$$I_n Z_{eff} - e_{eff}$$

ونضيف إليها القسم الأخير الواقع بين a و b فتأخذ المعادلة '(1.8) الشكل

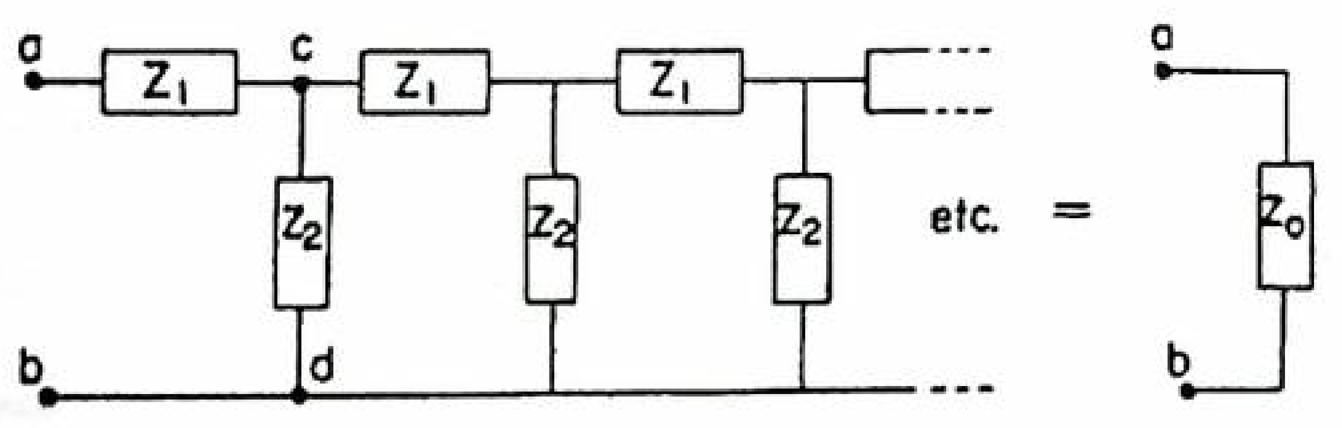
$$I_n Z_{eff} + I_n Z_n - e_{eff} = 0$$

إن $I_n Z_n$ هو فرق الكمون بين طرفي القسم النهائي من الدارة، نرمز له بـ V_n ونكتب

$$V_n = e_{eff} - I_n Z_{eff} \qquad (1.8)''$$

3.1- المرشحات Filters

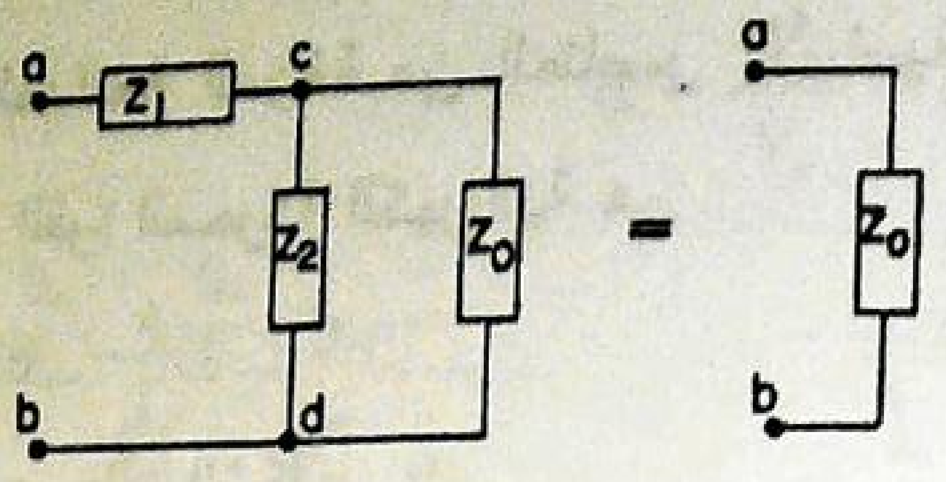
يمكننا دوماً اختزال مجموعة من الممانعات إلى ممانعة وحيدة مادمنا نعلم أن جمعها على التسلسل هو $Z = \sum_i Z_i$، وعلى التوازي هو $Z = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{Z_i}}$، الذي نكتبه على الشكل $\frac{1}{Z} = \sum_i \frac{1}{Z_i}$. لنتصور أن لدينا بين نهايتي دارة a، b سلسلة لامنتهية من الممانعات المتساوية، لنرمز لها بـ Z_1 وعدداً لامنته من الممانعات المتوازية، نرمز لها بـ Z_2، تفصل بين ممانعتين متجاورتين من السلسلة؛ تأخذ الدارة شكل سلّم لانهاية لدرجاته Z_2 يطلق عليها اسم الشبكة السلّمية، الشكل.11a



الشكل.11a

لتكن Z_0 ممانعة هذه الدارة اللامنتهية. لا تتغير Z_0 بإضافة أو حذف درجة من درجات السلم، لنقل إن Z_0 هي ممانعة الدارة ذات النهايتين c، d، الشكل.11b. إن ممانعة الدارة بإعادة الدرجة cd و Z_1 على طرف السلم هي Z_0 أيضاً، من جهة، ولكنها تساوي من جهة أخرى لـ

$$Z_0 = Z_1 + \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_0}\right) = Z_1 + \frac{Z_2 Z_0}{Z_2 + Z_0}$$



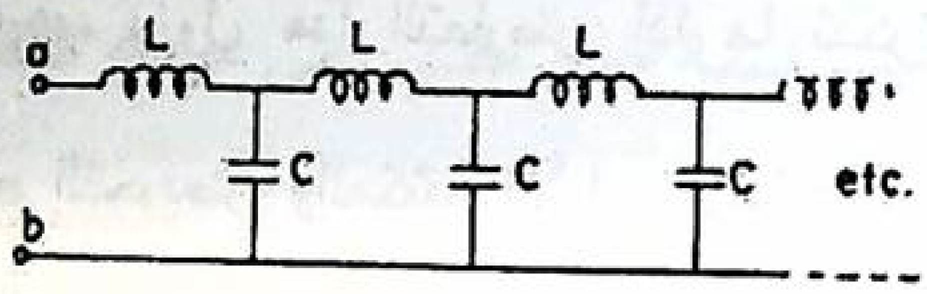
الشكل.11b

نحصل بهذه المحاكمة على معادلة من الدرجة الثانية بـ Z_0، حلها

$$Z_0 = \frac{Z_1}{2} + \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1Z_2} \qquad (1.12)$$

يطلق على Z_0 اسم الممانعة المميزة للشبكة اللامنتهية. لنفرض أن Z_1 هي ممانعة ملف $Z_1 = i\omega L$ و Z_2 ممانعة مكثفة $Z_2 = \frac{1}{i\omega C}$، ولدينا، $Z_1Z_2 = \frac{L}{C}$ الشكل. 12a

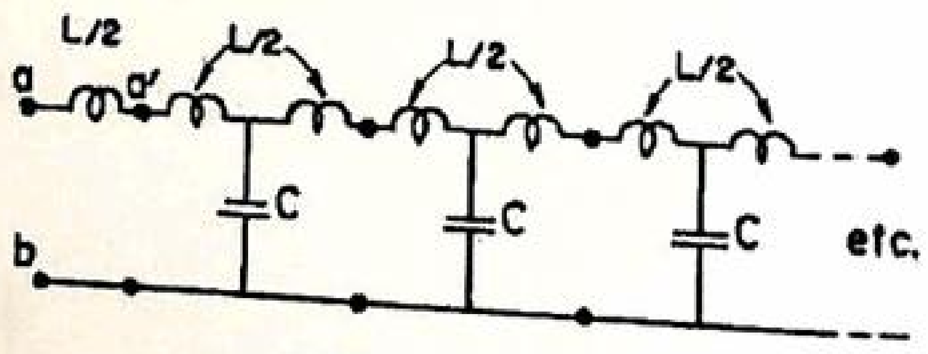
$$Z_0 = \frac{i\omega L}{2} + \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2L^2}{4}} \qquad (1.12)'$$



الشكل.12a

نتخلص من الحد الأول في هذه العلاقة بأن نتصور بدء الدارة في النقطة 'a منتصف الوشيعة الأولى، عوضاً عن a، بدايتها، لا يتغير في القسم اللانهائي المتبقي شيء، فالمكثفات موضوعة على التوازي بين ملفين تحريضهما L، الشكل.12b، نكتب الممانعة المميزة إذاً على الشكل

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2L^2}{4}} \qquad (1.12)''$$



الشكل.12b

إن Z_0 عدد حقيقي إذا كان $\frac{\omega^2L^2}{4} < \frac{L}{C}$ وتخيلي بحت في الحالة المعاكسة $\frac{L}{C} < \frac{\omega^2L^2}{4}$؛ ونكتبه عندئذ على الشكل

$$Z_0 = i\sqrt{\frac{\omega^2L^2}{4} - \frac{L}{C}} \qquad (1.12)'''$$

لنلاحظ قبل متابعة البحث أن الممانعة المؤلفة من العناصر الأساسية R ، L ، C هي عدد عقدي، نكتبه على الشكل $Z = R + iY$ ؛ القوة المحركة الكهربائية هي

$$e = IZ = I(R + iY)$$

نكتب القسم الحقيقي لـ $e = I_0 e^{i\omega t} Z$ على الشكل

$$e = I_0(\cos\omega t + i\sin\omega t)(R + iY) = I_0 R\cos\omega t - I_0 Y\sin\omega t \qquad (1.13)$$

والطاقة الوسطية التي يزود المولد الدارة بها في واحدة الزمن، الاستطاعة الوسطية للمولد $\langle P \rangle$، هي تكامل $eI = eI_0\cos\omega t$ من أجل دورة واحدة T مقسوماً على T

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T eI_0\cos\omega t dt = \frac{1}{T}\left\{\int_0^T I_0^2 R\cos^2\omega t dt - I_0^2 Y\sin\omega t\cos\omega t dt\right. \qquad (1.14)$$

يعطي تكامل الحد الأول المقدار $I_0^2 R/2$ بينما تكامل الحد الثاني معدوم. نرى إذاً أن تبدد طاقة المولد ناتج عن المقاومة وحدها بينما يبقى عنصرا الدارة الآخران L و C خامدين، فهما ارتكاسيان Reactive. قد تبدو هذه الملاحظة متعارضة مع '(1.12) التي تبين أن للعنصرين الارتكاسيين مقاومة من أجل تواترات التيار الصغيرة $\omega < \sqrt{\frac{4}{LC}}$. يزول هذا التعارض إذا ما تذكرنا أن العلاقة '(1.12) هي لدارة لامتناهية وأن المولد يزود بالتدريج التحريض والمكثفة الأولين بالطاقة ومن ثم إلى الثانيين وهكذا دواليك. فالمولد يزود الدارة بالطاقة بدون انقطاع، وبالتالي فإن الدارة اللامنتهية المؤلفة من العنصرين الارتكاسيين تبدد الطاقة عندما يكون تواتر التيار ω أصغر من $\sqrt{\frac{4}{LC}}$، نطلق على هذا التواتر اسم تواتر الانقطاع $\omega_0 = \sqrt{\frac{4}{LC}}$. توحي هذه المحاكمة، لإزالة التعارض كلياً أنه يستحيل أن تكون الدارة لامتناهية من أجل تواترات $\omega > \omega_0$، أن التيار سيتوقف عن اختراقها بالكامل في هذه التواترات. تلعب الدارة في هذه الحالة دور مرشحة تسمح لقطاعات من التواتر باجتيازها وتقطع الطريق أمام قطاعات تواتر التيار الأخرى. يلزمنا معرفة العلاقة بين كمونين متجاورين من السلسلة اللامنتهية لتعيين كيفية عمل هذه المرشحة التي تمنع مرور التواترات العالية.

تعريف 1:

نسمي النسبة بين كمونين متجاورين لمقطعين متتاليين من السلسلة n و n + 1 معامل الانتشار، نرمز له بـ α

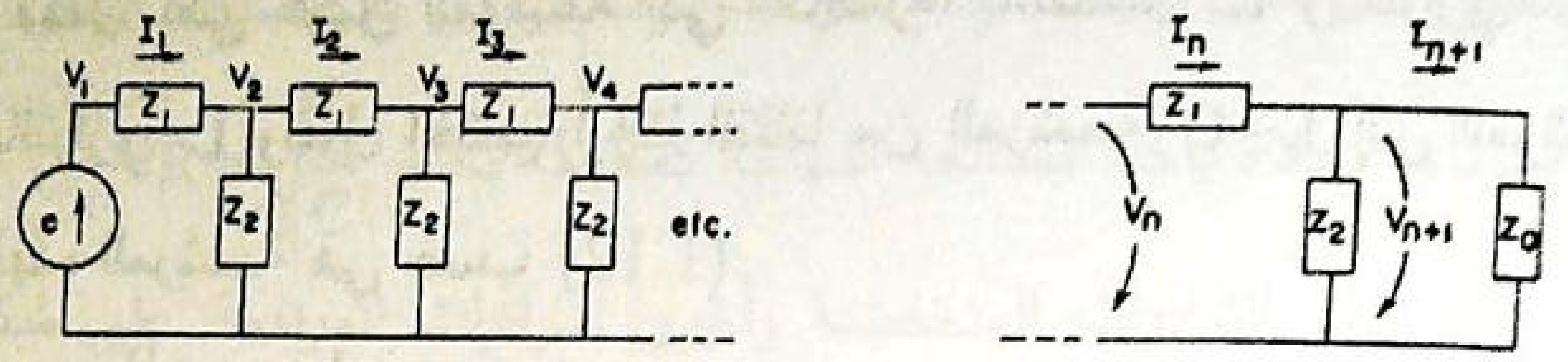
$$\alpha = \frac{V_{n+1}}{V_n}$$

إن

$$V_n - V_{n+1} = I_n Z_1$$

هذا من جهة، ومن جهة ثانية فإن $V_n = I_n Z_0$، كما يوضح، الشكل.13، ومنه

$$\alpha = \frac{V_{n+1}}{V_n} = 1 - \frac{Z_1}{Z_0} = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0} \quad (1.15)$$



الشكل.13

إن $V_1 = e$ و $V_2 = \alpha e$ ومن (1.15)

$$V_{n+1} = \alpha^n e \quad (1.16)$$

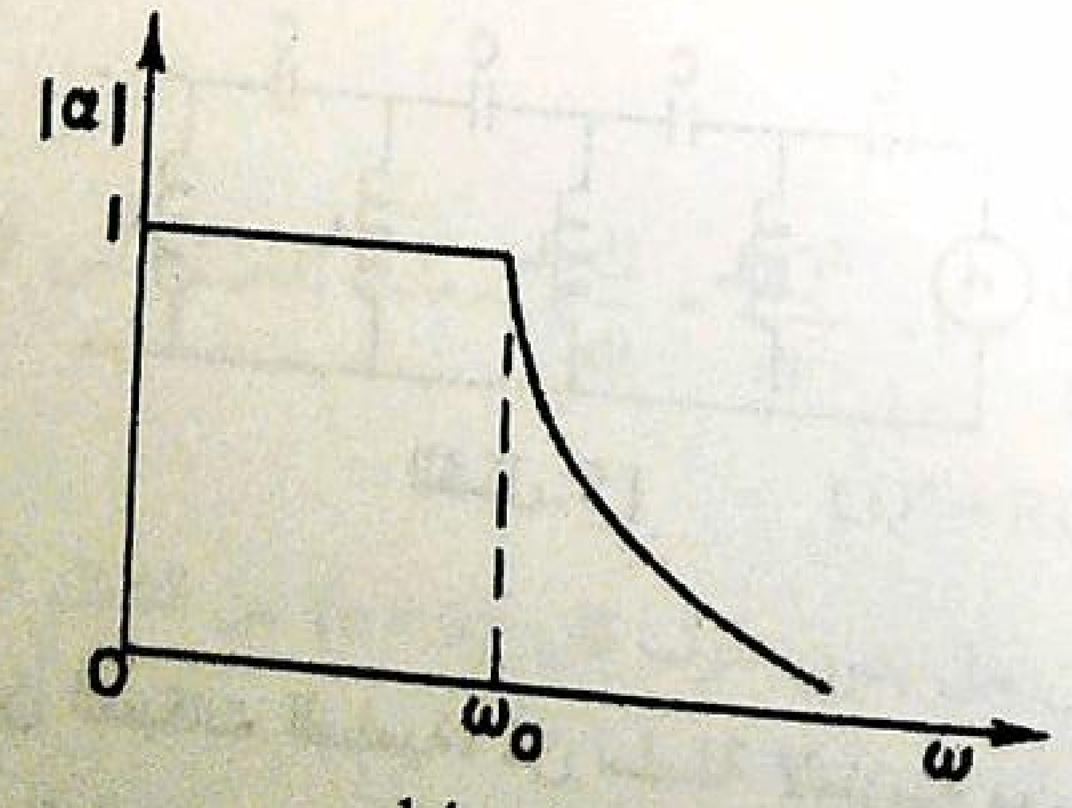
و α حسب (1.12) و $Z_1 = i\omega L$ هي

$$\alpha = \frac{\sqrt{L/C - \frac{\omega^2 L^2}{4}} - i\omega L/2}{\sqrt{L/C - \frac{\omega^2 L^2}{4}} + i\omega L/2} \quad (1.17)$$

من أجل $\omega < \omega_0 = \sqrt{\frac{4}{LC}}$ معامل الانتشار عدد عقدي، حاصل قسمة عدد عقدي على مرافقه العقدي، (المقدار تحت الجذر موجب)، فهو عدد قيمته المطلقة تساوي الواحد، إنه مجرد طور $\alpha = e^{i\varphi}$ يعين تأخر الكمون عند الانتقال من مقطع إلى آخر في السلسلة ولا يعيق مرور التيار؛ أما من أجل القيم $\omega > \omega_0$ فالمقدار تحت الجذر سالب والصورة والمخرج في معامل الانتشار تخيليان و α عدد حقيقي أصغر من الواحد :

$$\alpha = \frac{\sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{4} - L/C} - \omega L/2}{\sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{4} - L/C} + \omega L/2} \quad (1.18)$$

ويعني أن الكمون يتناقص من مقطع في السلسلة إلى المقطع المجاور. يعطي، الشكل.14a، المظهر العام لمعامل الانتشار المساوي للواحد بالقيمة المطلقة من أجل $\omega < \omega_0$ والمتناقص بسرعة كبيرة بعد هذه القيمة.

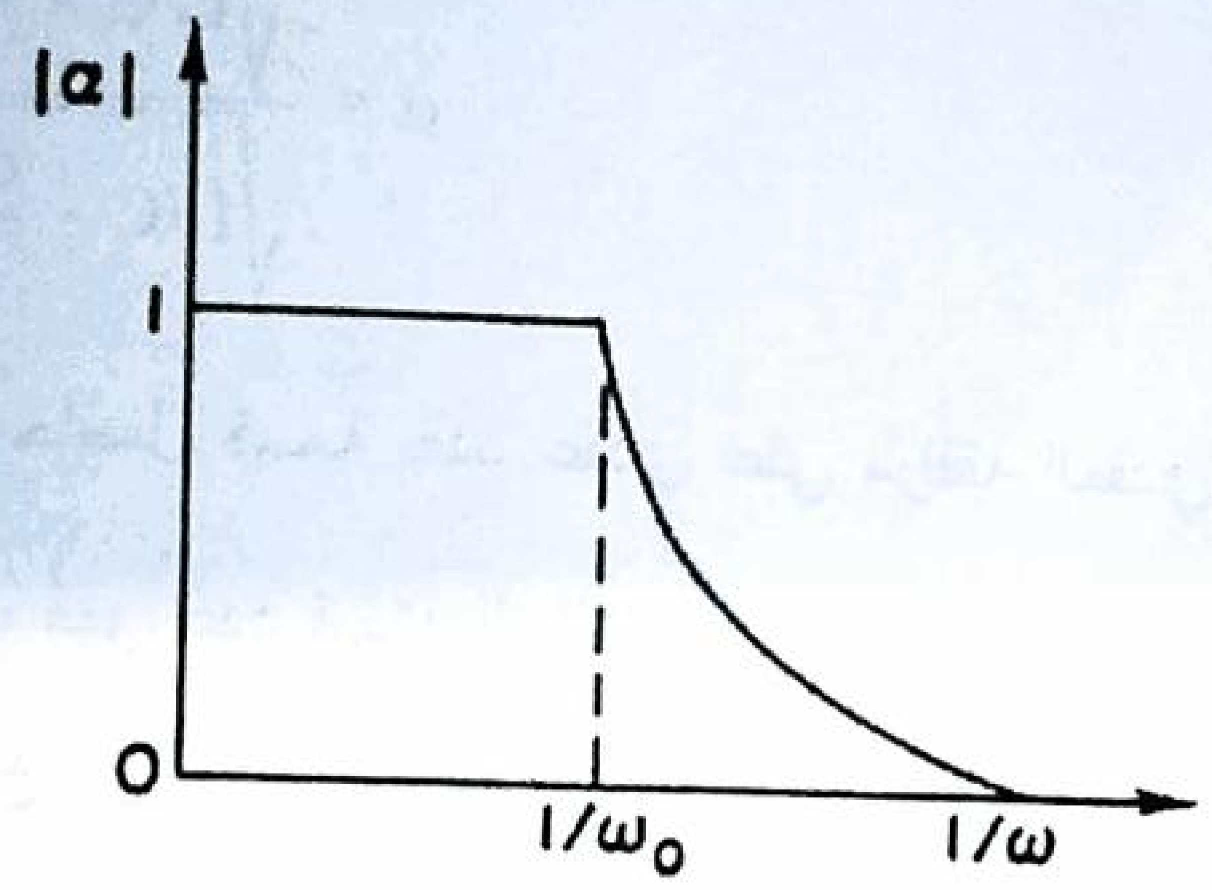


الشكل.14a

يمكن إنشاء مرشحة تعمل على عكس المرشحة التي عناصرها بالتسلسل L وبالتوازي C بأخذ العناصر على التسلسل C وبالتوازي L ونقول اختصاراً إننا انتقلنا من المرشحة L - C إلى المرشحة C - L ذلك أن الممانعة المميزة لهذه المرشحة هي حسب (1.12)

$$Z_0 = \frac{1}{2i\omega C} + \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{1}{4\omega^2 C^2}}$$

ولا تختلف من حيث الصيغة عن '(1.12) إلا بالاستعاضة عن ω بمقلوب $\frac{1}{\omega}$ وتبقى المحاكمة التي قادتنا إلى تناقص الكمون (1.18) صحيحة باستبدال $\frac{1}{\omega}$ ب ω وإلى المظهر العام التالي لمعامل الانتشار، الشكل.14b.

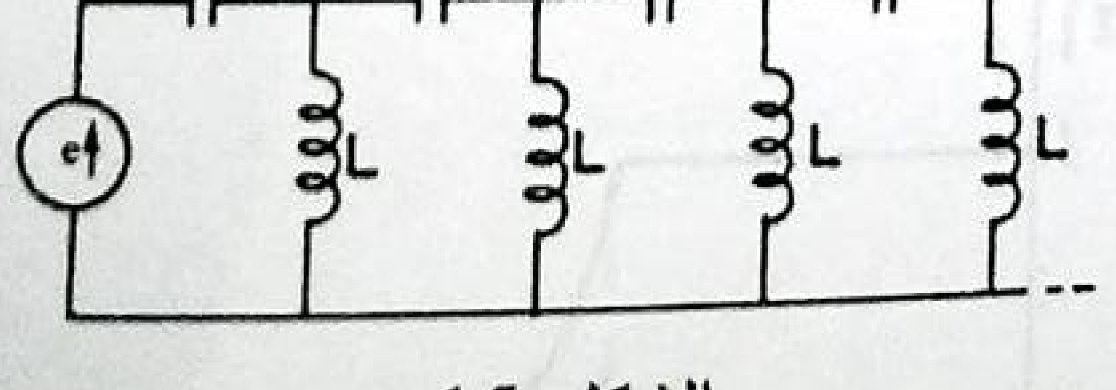


الشكل.14b

يتوقف التيار عن اختراق الدارة من أجل التواترات الصغيرة ولا يسمح إلا بمرور التيارات ذات التواتر الأعلى من ω_0

$$\frac{1}{\omega} \langle \frac{1}{\omega_0}$$

وهكذا فالدارة اللامنتهية L - C من الشكل.12 مرشحة التواترات المنخفضة و C - L، الشكل.15، مرشحة التواترات المرتفعة.



الشكل.15

انطلقنا في دراسة المرشحات من الشبكات السلمية، من سلسلة لامنتهية من الممانعات. إن المهم في هذا الموضوع هو أن تكون الممانعة النهائية مساوية للممانعة المميزة Z_0. ومع أنه من المستحيل عملياً

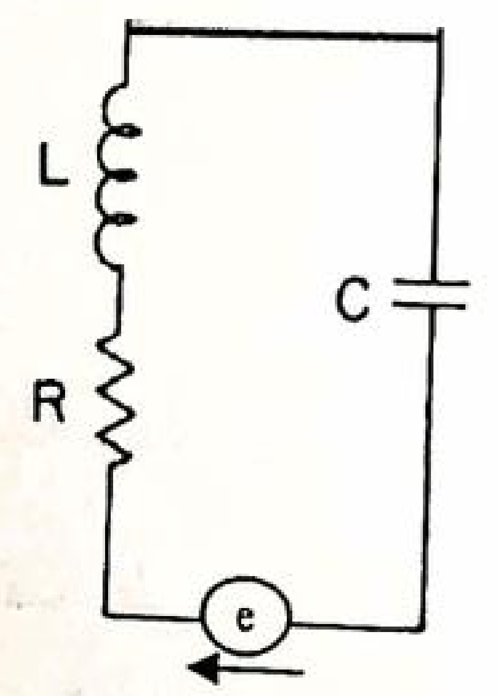
الحصول على ممانعة مميزة بعدد قليل من الممانعات R، L، C، فمن الممكن في أغلب الأحيان تعيينها بتقريب مقبول من أجل مجال محدد من التواترات. يمكن على سبيل المثال إنشاء مرشحة L-C بالخواص التي ذكرناها أعلاه بأخذ الممانعة النهائية كمقاومة بحتة $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

يمكن الجمع بين مرشحة للتواترات المنخفضة وأخرى للتواترات المرتفعة على شكل مرشحة قطاع من التواترات $[\omega_1, \omega_2]$، توقف الأولى التواترات الأعلى من ω_2 والثانية التواترات الأدنى من ω_1.

2. الارنان Resonance

1.2- تفريغ المكثفة، التيارات عالية التواتر

ليكن لدينا دارة مكونة من العناصر المثالية الثلاثة، مقاومة ووشيعة ومكثفة ثم قوة محركة كهربائية، e، تولد تياراً I في الدارة. تعادل e انخفاضات الكمون في المقاومة RI فالملف $L\frac{dI}{dt}$ وأخيراً في المكثفة $\frac{Q}{C}$، الشكل.16



الشكل.16

لدينا إذاً المعادلة التالية

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} - e = 0 \quad (2.1)$$

نكتبها بدليل الشحنة Q : $I = \frac{dQ}{dt}$، $\frac{dI}{dt} = \frac{dQ^2}{dt^2}$، كمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية

$$LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} - e = 0 \quad (2.2)$$

نفتش في البداية وكالمعتاد عن حل بدون طرف ثان $(e = 0)$ من الشكل $Q = Q_0 e^{i\omega t}$، يعين القيم الممكنة للتواتر ω

$$-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C} = 0$$

ومنه

$$\omega = \frac{-iR \pm \sqrt{-R^2 + \frac{4L}{C}}}{-2L} \qquad (2.3)$$

ونميز ثلاث حالات حسب قيمة المميز:

أ- $\frac{4L}{C} - R^2 > 0$، والحل هو إما $Q = C_1 e^{\left(-\frac{R}{2L} - i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\right)t}$ أو $Q = C_2 e^{\left(-\frac{R}{2L} + i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\right)t}$ وهو بالتوضيع مجموع هذه الحلين الخاصين

$$Q = C_1 e^{\left(-\frac{R}{2L} - i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{R}{2L} + i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\right)t} \qquad (2.4)$$

ب- $\frac{4L}{C} - R^2 < 0$، والصورة في (2.3) تخيلية بحتة والحل هو توضيع حلين خاصين أسيين حقيقين

$$Q = C_1' e^{\left(-\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t} + C_2' e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t}$$

ونكتبه اختصاراً

$$Q = C_1' e^{-\alpha t} + C_2' e^{-\beta t} \qquad (2.5)$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{R}{2L} - \sqrt{} > 0 \\ \beta = \frac{R}{2L} + \sqrt{} > 0 \end{cases} \qquad (2.6)$$

ج- $\frac{4L}{C} - R^2 = 0$، $\alpha = \beta$ في هذه الحالة ويتحول الحلان الخاصان في (2.5) إلى حل وحيد ولكن المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية تتوقف على ثابتتين تحددهما الشروط البدائية ولابد لنا من حل ثان نحدده بملاحظة أنه إذا كان للمعادلة حلان [هما هنا من الشكل $e^{-\alpha t}$ و $e^{-\beta t}$] فإن الفرق بينهما مقسوماً على الفرق بين المتغيرين هو حل كذلك يتناهى، عندما يتناهى الفرق بين المتغيرين إلى الصفر، إلى مشتق الحل الأول؛ إنه في الحالة التي تعنينا $te^{-\alpha t}$، وهكذا فالحل في هذه الحالة هو

$$Q = C_1' e^{-\frac{R}{2L}t} + C_2' t e^{-\frac{R}{2L}t} \qquad (2.7)$$

لنبدأ بمناقشة الحلين (2.5) و(2.7)، لتكن $Q = Q_0$ شحنة المكثفة في اللحظة البدائية $t = 0$ والتيار معدوم في هذه اللحظة $I(t=0) = 0 = -\frac{dQ}{dt}$. يحدد هذان الشرطان قيمة الثابتتين C_1' و C_2' في (2.5)

$$Q_0 = C_1' + C_2'$$

$$0 = C_1'\alpha + C_2'\beta$$

ومنه

$$C_1' = \frac{Q_0\beta}{\beta - \alpha} \quad ، \quad C_2' = -\frac{Q_0\beta}{\beta - \alpha} \qquad (2.8)$$

وقيمة الثابتتين في (2.7)

$$Q_0 = C_1' \qquad (2.9)$$

و $\left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t=0} = 0$ تعين مع العلاقة السابقة قيمة الثابتة C_2'

$$-C_1'\frac{R}{2L} + C_2' = 0$$

$$C_2' = \frac{Q_0 R}{2L} \qquad (2.9)'$$

ونكتب (2.7) على الشكل

$$Q = Q_0\left(1 + \frac{R}{2L}t\right)e^{-\frac{R}{2L}t} \qquad (2.10)$$

$$I = -\frac{dQ}{dt} = Q_0\left(\frac{R}{2L}\right)^2 t\, e^{-\frac{R}{2L}t} \qquad (2.11)$$

هذا فيما يخص الحالتين ب و ج، أما في الحالة أ فإن الحل مركب من دالة أسية متناقصة ومن دالة جيبية. إن الحل (2.4) هو من الشكل

$$Q = e^{-\frac{R}{2L}t}\left(C_1 e^{-i\omega t} + C_2 e^{i\omega t}\right)$$

حيث $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$.

ويجب ليكون حقيقياً أن تكون الثابتتان مترافقتين عقديتين

$$C_1 = \bar{C}_2$$

و

$$Q = e^{-\frac{R}{2L}t}\, 2\mathrm{Re}C_2 \cdot e^{i\omega t}$$

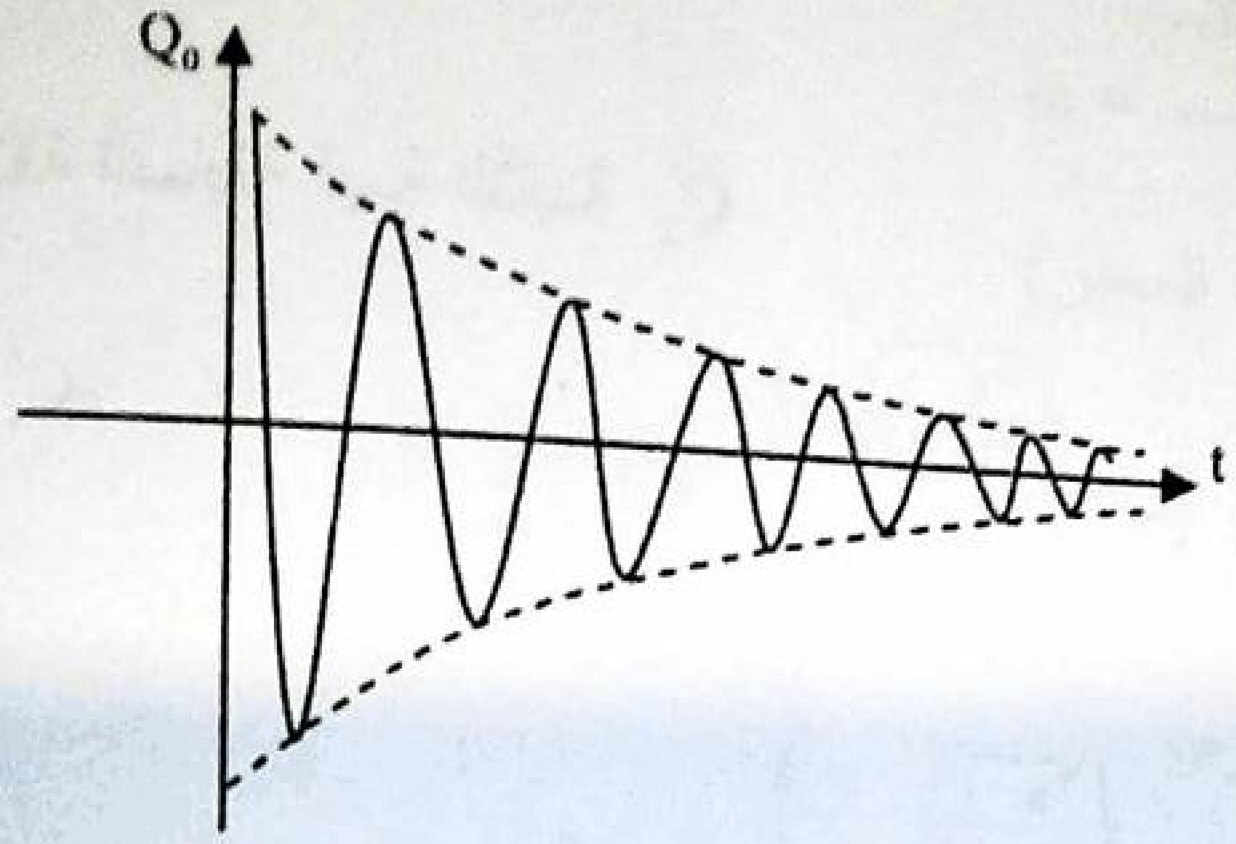
$$= 2e^{-\frac{R}{2L}t}\,\mathrm{Re}C_2 \cdot \cos\omega t \qquad (2.12)$$

يحدد الشرط البدائي $Q = Q_0$ من أجل $t = 0$ القسم الحقيقي لـ C_2، ولدينا أخيراً

$$Q = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\cos\omega t \qquad (2.13)$$

وهكذا فتغيرات Q في هذه الحالة معطاة بالتابع الجيبي $\cos\omega t$ المتخامد أسياً، الشكل.17، نسمي ω من أجل $R \ll \frac{4L}{C}$ بالتواتر الخاص ونرمز له بـ ω_0

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{2.14}$$



الشكل.17

نكتب الحل (2.5) في الحالة ب، آخذين قيمتي الثابتتين في (2.8) بعين الاعتبار، على الشكل

$$Q = \frac{Q_0}{\beta - \alpha}\left(\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t}\right) \tag{2.15}$$

2.2– الإرنان

لننظر الآن إلى الحل بطرف ثان، بوجود المولد للقوة المحركة الكهربائية e، التي تزود الدارة بالتيار المتناوب

$$e = V = V_0 e^{i\omega t}$$

نبدل في (2.2) e و Q بقيمتيهما لنحصل على

$$\left(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}\right) Q_0 e^{i(\omega t + \chi)} = V_0 e^{i\omega t} \tag{2.16}$$

التي تحدد شحنة المكثفة بدليل V_0 ونحصل على معادلة التيار

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{i\omega V}{-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}}$$

ولكن $V = ZI$ ومنه $Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$، إنها مجموع ممانعات العناصر الأساسية المكونة للدارة كما يقتضي الحال. نكتب العدد العقدي Z على الشكل

$$Z = |Z| e^{i\varphi} \tag{2.17}$$

حيث

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \tag{2.18}$$

و

$$|Z| = \left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{1/2}$$

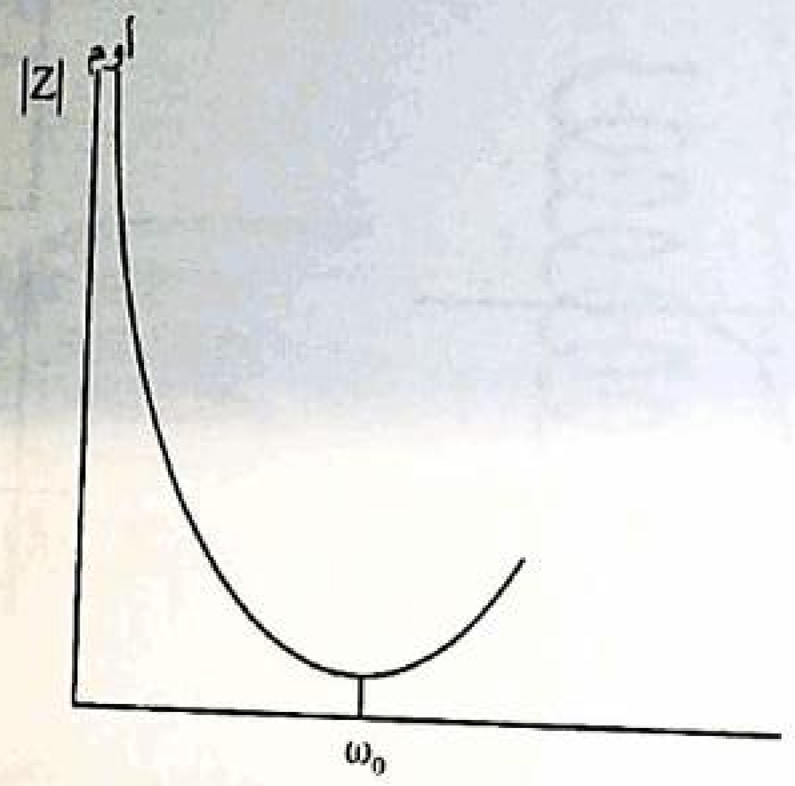
تأخذ الممانعة قيمتها الصغرى من أجل $L\omega = \frac{1}{\omega C}$ أي عندما يكون تواتر المولد مساوياً للتواتر الخاص ω_0 ويبين، الشكل.18، الصورة العامة لتغيرات $|Z|(\omega)$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\varphi = 0$، والتيار في هذه الحالة هو أكبر ما يمكن :

$$V = |Z| e^{i\varphi} I_0 e^{i\omega t}$$

والثابت V_0 يساوي لـ $|Z| I_0$.



الشكل.18

يعبر بلوغ التيار قيمة عظمى عن حالة إرنان عندما يتساوى تواتر المولد مع تواتر الدارة الخاص. وفي الواقع، فإننا إذا ما عدنا إلى (2.16) وكتبنا الحد بين قوسين على الشكل $\rho e^{-i\chi}$، سنجد بأخذ (2.14) بعين الاعتبار، أن

$$\rho = \left[\left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)^2 + \omega^2 R^2\right]^{1/2} = L\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2 \frac{R^2}{L^2}\right]^{1/2} \tag{2.19}$$

و

$$tg\chi = \frac{\omega \frac{R}{L}}{\omega^2 - \omega_0^2} \tag{2.20}$$

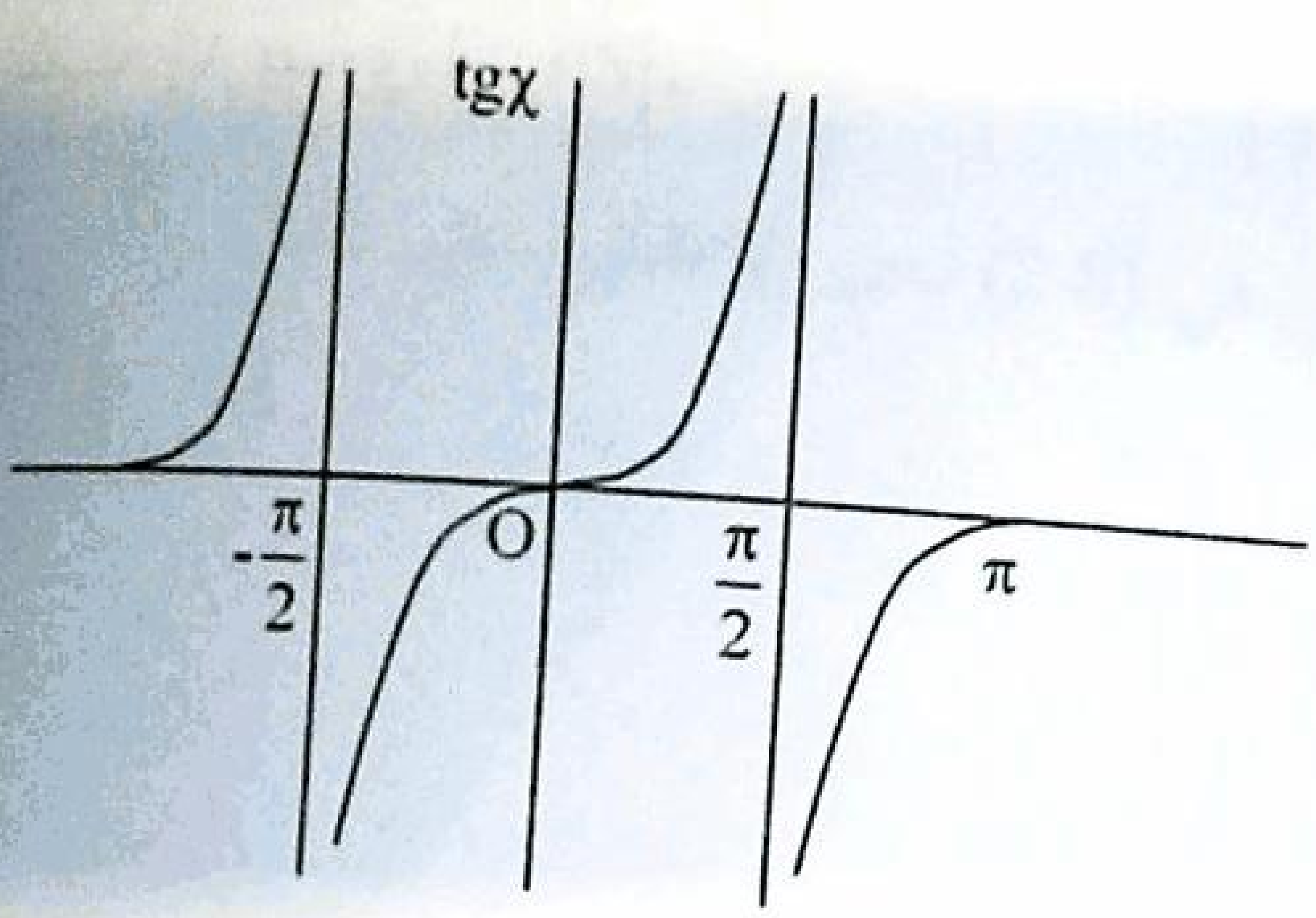
ومنه حل المعادلة (2.16)

$$Q = \frac{V_0/L}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2 \frac{R^2}{L^2}\right]^{1/2}} \cos\left(\omega t + tg^{-1} \frac{\omega \frac{R}{L}}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) \tag{2.21}$$

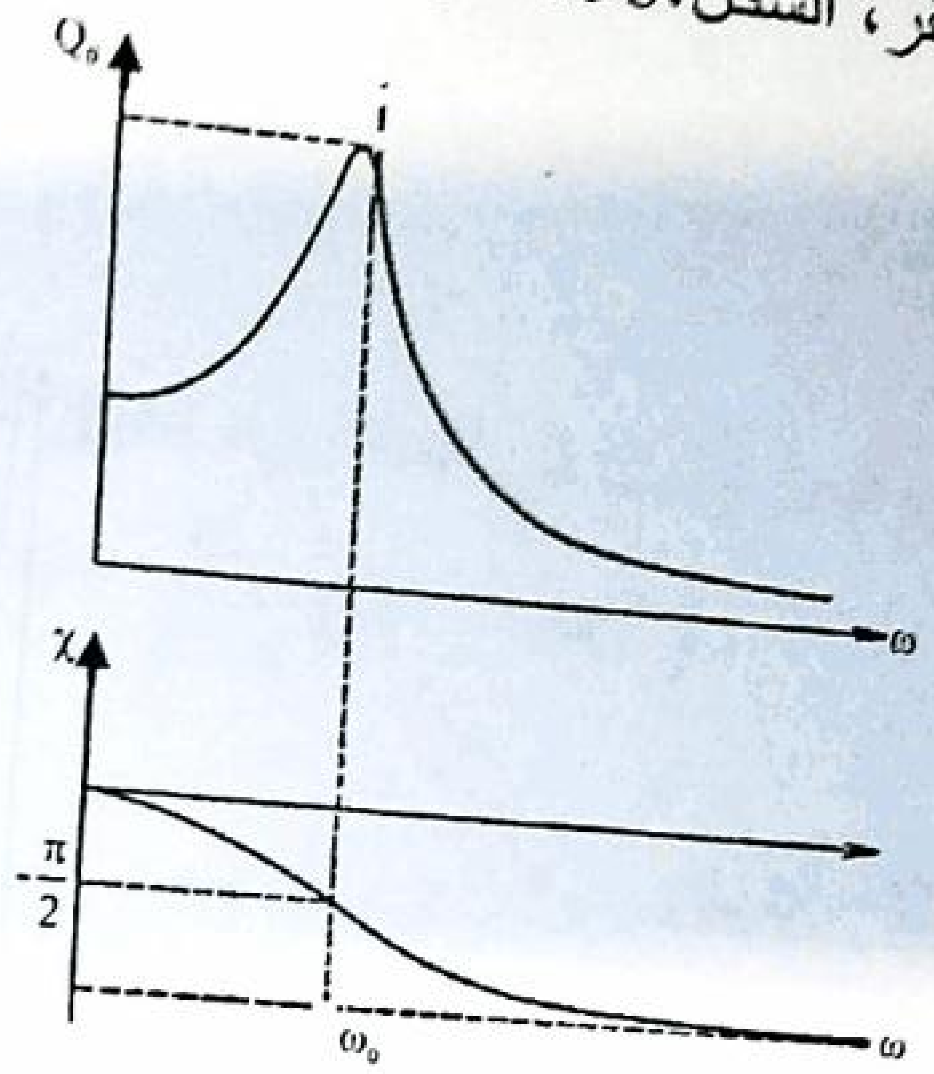
حيث أخذنا القسم الحقيقي وحيث tg^{-1} هي الزاوية χ.

هذا هو الحل الخاص للمعادلة (2.2) – بطرف ثان. إن الحل العام هو هذا الحل الخاص مضافاً إليه الحل العام بدون طرف ثان من الشكل (2.13)، (2.14)، (2.10) التي حددتها قيم الجذر $\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}$.

إن الإرنان تعريفاً هو عند ما يبلغ معامل الدالة الجيبية، Q_0، في (2.21) قيمة عظمى، وهو ما يقع عندما يكون المخرج فيها أصغر ما يمكن أي عندما يتساوى تواتر المولد مع تواتر الدارة الخاص $\omega = \omega_0$، الشكل.19a، الذي يبين تغيرات Q_0 و χ كتابعين لـ γ. يتناهى $tg\chi$ (2.20) إلى $-\infty$ آتياً من الصفر، الشكل.19b، من أجل $(\omega = 0)$ بقيم سالبة وتتغير χ إذاً من π إلى $\pi/2$.



الشكل.19b



الشكل.19a

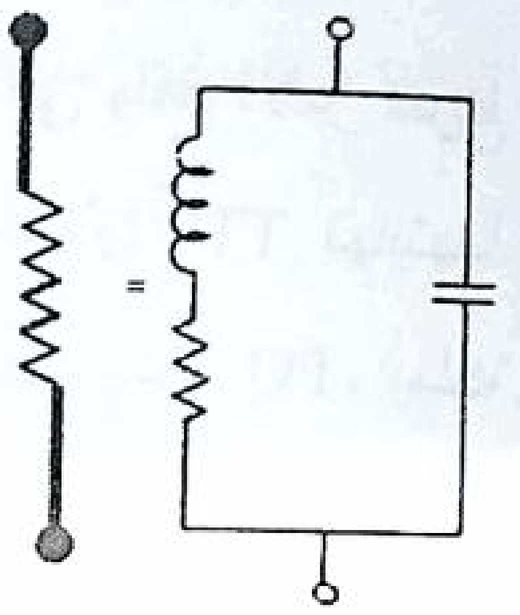
لن ندخل في تفاصيل أخرى، فقد عالجنا هذا الموضوع في كتاب الميكانيك (I.4.§2.5) والمعادلة (2.2) هي ذات المعادلة التي كتبناها لهزاز توافقي متخامد ومقسور. تلعب الشحنة الكهربائية Q دور استطالة الهزاز x، معامل التحريض L دور الكتلة m، R دور المقاومة الميكانيكية، وهي كذلك في حقيقة الأمر لأنها مقاومة أيونات السلك لحركة الإلكترونات وتلعب $\frac{1}{C}$ دور قساوة الهزاز k. إن القوة الميكانيكية الخارجية الدورية هي الكمون (القوة المحركة الكهربائية) الدوري الذي ينتجه المولد؛ وبما أن لذات المعادلات نفس الحلول فإنه يمكننا بالتماثل دراسة تأثر نوابض السيارة في المخبر بالمماثلة مع (2.2) حيث نستبدل بتغيرات الطريق صعوداً وهبوطاً قوة محركة كهربائية بنفس التواتر.

ملاحظة هامة:

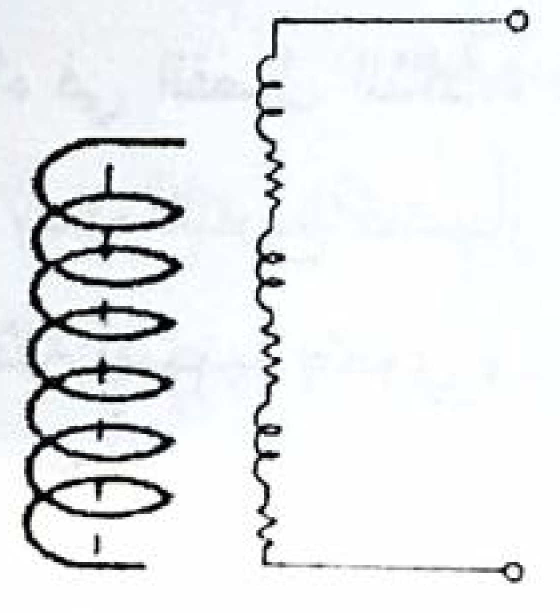
أقمنا كل مناقشتنا على وجود عناصر مثالية في الدارة، لكن الواقع مختلف في طبيعة الحال، فمرور التيار داخل السلك الذي نظرنا إليه كمقاومة بحتة، ينتج حقلاً مغنطيسياً وللسلك بالتالي تحريض ذاتي L، ومن جهة أخرى فإن مرور التيار يعني وجود فرق كمون بين طرفي السلك وبالتالي شحنات مجتمعة على طرفيه من إشارة مختلفة تنتج الحقل الكهربائي المسير للتيار، وهكذا فإن للسلك سعة C. يمكننا إذاً

تصور المقاومة R في واقع الأمر على شكل دارة، الشكل.20a، مكونة من العناصر المثالية الثلاثة التي حللناها. رأينا أن ممانعة هذه الدارة هي مقاومة بحتة عندما نهمل المقدار $L\omega - \frac{1}{\omega C}$ أي عندما يكون التواتر مساوياً لتواتر الدارة الخاص والدارة دارة مرنانة وتواتر الإرنان هو $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

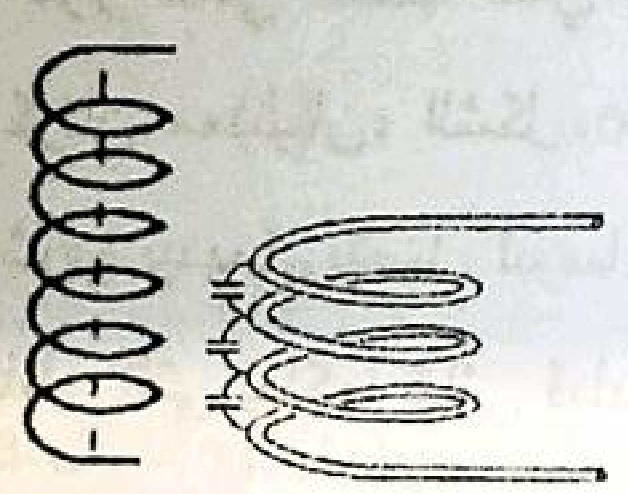
والملف كذلك ليس ملفاً مثالياً، فللسلك الملتف مقاومة ولذا فالملف الواقعي هو أقرب ما يكون إلى ملفات ومقاومات موضوعة على التسلسل، هذا في حال التواترات المنخفضة، الشكل.20b، أما عندما يرتفع التواتر فإن تكاثف الشحنات على السلك حسب (2.21) يجعل من الفراغ الفاصل بين لفتين مكثفة صغيرة، الشكل.20c، والخلاصة فإن التحريض في التواترات القريبة من تواتر الدارة الخاص هو دارة مرنانة كما في حال المقاومة. أما في حالة التواترات التي تتجاوز ω_0 فمن الأفضل تمثيل التحريض بدارة من الشكل.20d. وهكذا فبقدر ما يكون عدد العناصر المثالية أكبر، بقدر ما يكون التمثيل أكثر دقة.



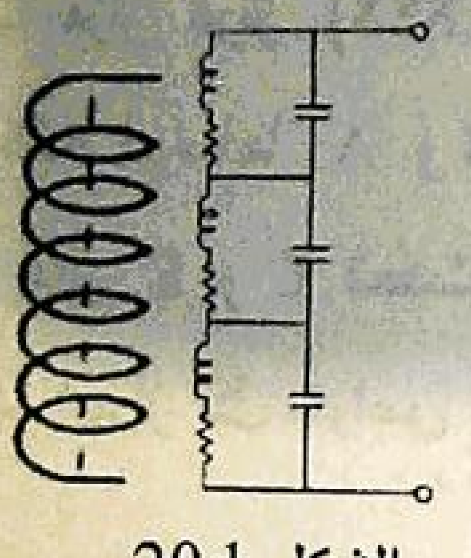
الشكل.20a



الشكل.20b



الشكل.20c



الشكل.20d

إن ممانعة الملف، المتناسبة مع ωL، صغيرة أمام المقاومة عندما تكون التواترات صغيرة؛ والدارة مقصورة على المقاومة. ولكن ارتفاع التواتر يجعل المقاومة مهملة أمام ωL والدارة دراة مثالية مقصورة على التحريض. أما ممانعة المكثفة المتناسبة مع $\frac{1}{\omega C}$ فهي كبيرة في حالة التواترات الصغيرة والمكثفة دارة مفتوحة في هذه الحالة. ولكنها صغيرة في حال التواترات العالية وهذا ما يجعلها تتفرغ : يمر التيار عبر المكثفات بين لفتين عوضاً عن السير عبر الملف.

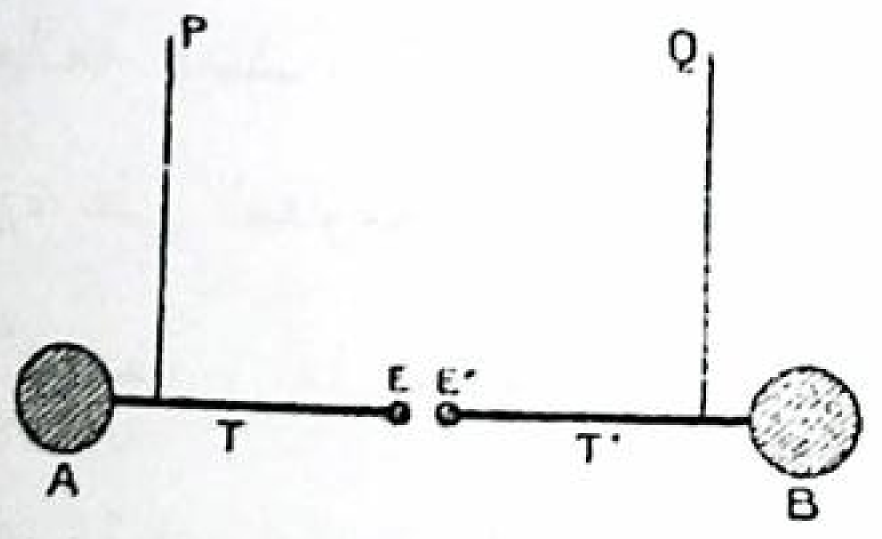
وشيعة التحريض وتفريغ المكثفة:

تتألف وشيعة التحريض من ملفين، ابتدائي P وثانوي S يلتفان حول قضيب حديدي (نواة الوشيعة). تمغنط النواة بإرسال تيار مستمر في الملف P ينقطع فجأة ليبدأ تمغنط النواة بالتناقص وليحدث تغير تدفق الحقل المغنطيسي قوة محركة كهربائية e في الثانوي S. تتكرر العملية بتواتر كبير محدثة قوة محركة كهربائية دورية وتياراً متناوباً عالي التواتر. يوصل ثانوي الوشيعة بالمكثفة لشحنها بهذا التيار المتناوب. أما تفريغها فيجري في دارة أخرى، الشكل.21a، تحوي على تحريضية ذاتية L مؤلفة من عدة لفات فقط وقاطع على شكل كرتين معدنيتين EE' متقاربتين لا تفصلهما عن بعضهما سوى بضع

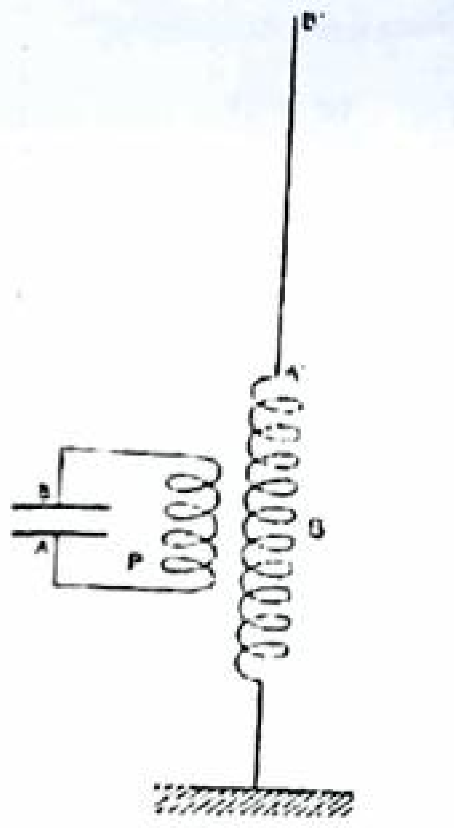
ميلمترات. تحدث شرارة بينهما عندما يصل فرق الكمون بين لبوسي المكثفة إلى الحد المطلوب وتتفرغ المكثفة بتواتر عال. لا يلعب ثانوي وشيعة التحريض S أي دور نظراً لتحريضه الذاتي المرتفع الذي يمنع مرور التيار عالي التوتر فيه.

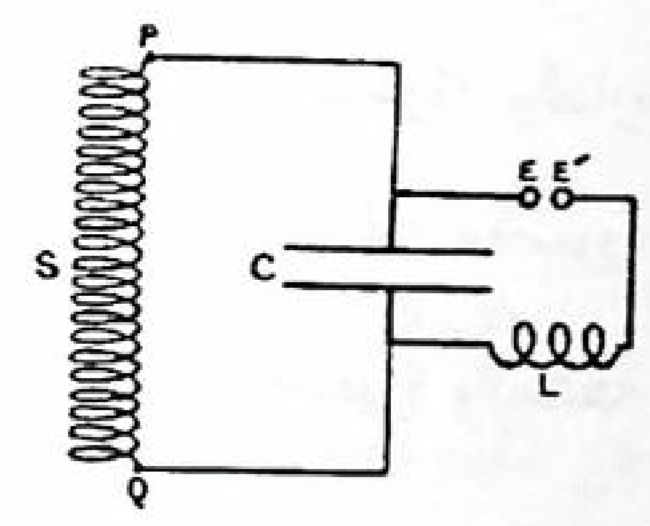
هذا على خلاف ما يجري في الدارات المتشابهة التي يجري فيها تيار عالي التوتر. تنتج الدارة حقلاً مغنطيسياً بذات التواتر في جوارها، تتأثر الدارة الأخرى المشابهة بتغيرات تدفق هذا الحقل، تنشأ فيها قوة محركة كهربائية تحريضية ويجري فيها تيار عالي التوتر، محرض من قبل الدارة الأولى، يؤثر بدوره على الدارة الأولى. نقول عن الدارة الأولى إنها ابتدائية والثانية ثانوية وإننا أمام تحريض متبادل سندرسه في الرقم القادم. يمكن على سبيل المثال أن تكون الدارة الأولى المهتزة مغلقة والثانوية مفتوحة، مكونة من موصل خطي 'A'B، الشكل.21b، هوائي يصدر الأشعة الكهرطيسية إلى مسافات بعيدة. وهذا هو مبدأ الاتصالات اللاسلكية القائم على مبدأ هزاز هرتز.

أما هزاز هرتز (1888)، هزاز ثنائي القطب الذي درسناه في الفصل الثالث، فإنه في واقع الأمر تفريغ مكثفة لبوساها A و B كرتان معدنيتان، الشكل.21c، ودارة التفريغ قضيبان موصلان 'TT نهايتهما كريتان E و 'E تحدث الشرارة بينهما. يتصل لبوسا المكثفة لشحنها بثانوي وشيعة تحريض PQ. يملك هذا الهزاز كل خواص التناظر التي يملكها ثنائي قطب شحنتاه في A و B.



الشكل.21c


الشكل.21b



الشكل.21a

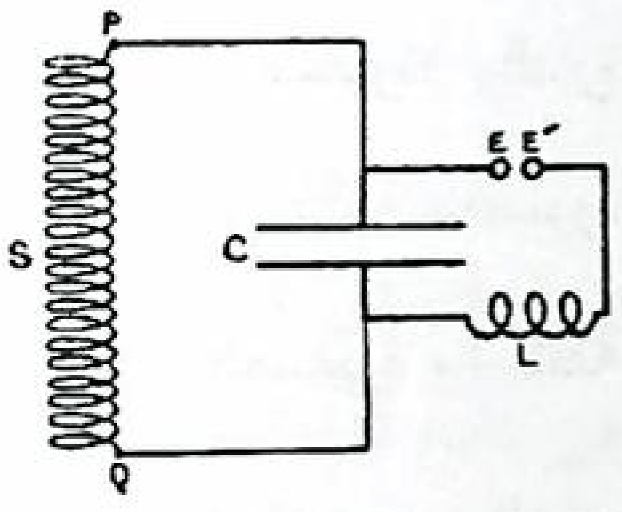
3.2– المكثفة في التواترات العالية

يلزم علينا عندما تكون التواترات عالية أخذ معادلتي ماكسويل بعين الاعتبار: ماكسويل–فارادي التي تحدد تغيرات الحقل المغنطيسي نتيجة تغير الحقل الكهربائي وماكسويل–آمبير التي تحدد بالمقابل تغيرات الحقل الكهربائي نتيجة تغير الحقل المغنطيسي. سنأخذ الحالة الأبسط من الناحية الهندسية، مكثفة أسطوانية الشكل، نصف قطر اللبوس a والمسافة بين اللبوسين d، نشحنها بتيار متناوب. لا يمر التيار عبر المكثفة، $\bar{J}=0$. تبقى معادلة ماكسويل–فارادي على حالها

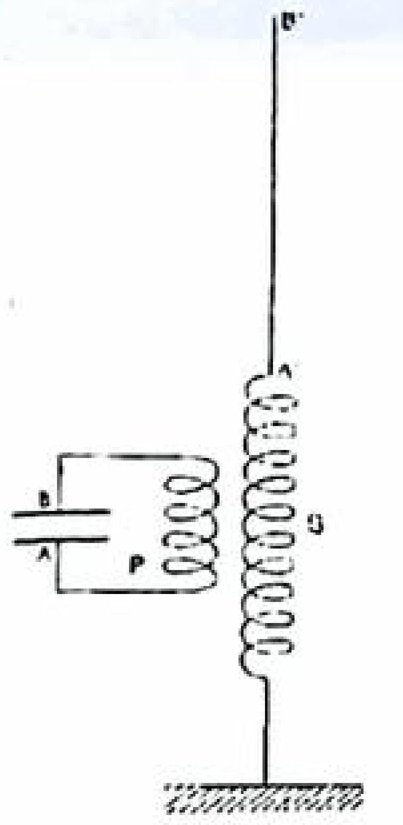
ميلمترات. تحدث شرارة بينهما عندما يصل فرق الكمون بين لبوسي المكثفة إلى الحد المطلوب وتتفرغ المكثفة بتواتر عال. لا يلعب ثانوي وشيعة التحريض S أي دور نظراً لتحريضه الذاتي المرتفع الذي يمنع مرور التيار عالي التوتر فيه.

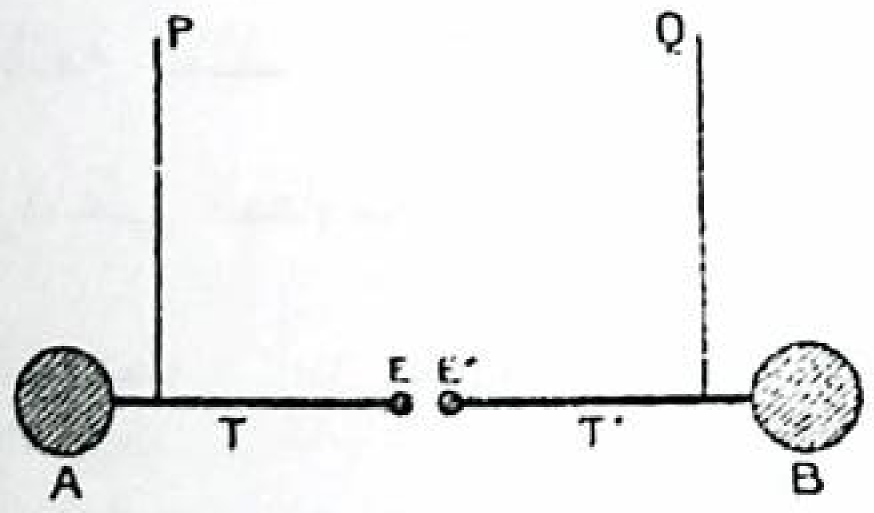
هذا على خلاف ما يجري في الدارات المتشابهة التي يجري فيها تيار عالي التوتر. تنتج الدارة حقلاً مغنطيسياً بذات التواتر في جوارها، تتأثر الدارة الأخرى المشابهة بتغيرات تدفق هذا الحقل، تنشأ فيها قوة محركة كهربائية تحريضية ويجري فيها تيار عالي التوتر، محرض من قبل الدارة الأولى، يؤثر بدوره على الدارة الأولى. نقول عن الدارة الأولى إنها ابتدائية والثانية ثانوية وإننا أمام تحريض متبادل سندرسه في الرقم القادم. يمكن على سبيل المثال أن تكون الدارة الأولى المهتزة مغلقة والثانوية مفتوحة، مكونة من موصل خطي A'B'، الشكل.21b، هوائي يصدر الأشعة الكهرطيسية إلى مسافات بعيدة. وهذا هو مبدأ الاتصالات اللاسلكية القائم على مبدأ هزاز هرتز.

أما هزاز هرتز (1888)، هزاز ثنائي القطب الذي درسناه في الفصل الثالث، فإنه في واقع الأمر تفريغ مكثفة لبوساها A و B كرتان معدنيتان، الشكل.21c، ودارة التفريغ قضيبان موصلان TT' نهايتهما كريتان E و E' تحدث الشرارة بينهما. يتصل لبوسا المكثفة لشحنها بثانوي وشيعة تحريض PQ. يملك هذا الهزاز كل خواص التناظر التي يملكها ثنائي قطب شحنتاه في A و B.



الشكل.21a


الشكل.21b



الشكل.21c

3.2- المكثفة في التواترات العالية

يلزم علينا عندما تكون التواترات عالية أخذ معادلتي ماكسويل بعين الاعتبار: ماكسويل-فارادي التي تحدد تغيرات الحقل المغنطيسي نتيجة تغير الحقل الكهربائي وماكسويل-أمبير التي تحدد بالمقابل تغيرات الحقل الكهربائي نتيجة تغير الحقل المغنطيسي. سنأخذ الحالة الأبسط من الناحية الهندسية، مكثفة أسطوانية الشكل، نصف قطر اللبوس a والمسافة بين اللبوسين d، نشحنها بتيار متناوب. لا يمر التيار عبر المكثفة، $\vec{J} = 0$. تبقى معادلة ماكسويل-فارادي على حالها

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (2.22)$$

وتأخذ معادلة ماكسويل آمبير الشكل

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial E}{\partial t} \qquad (2.23)$$

وليكن

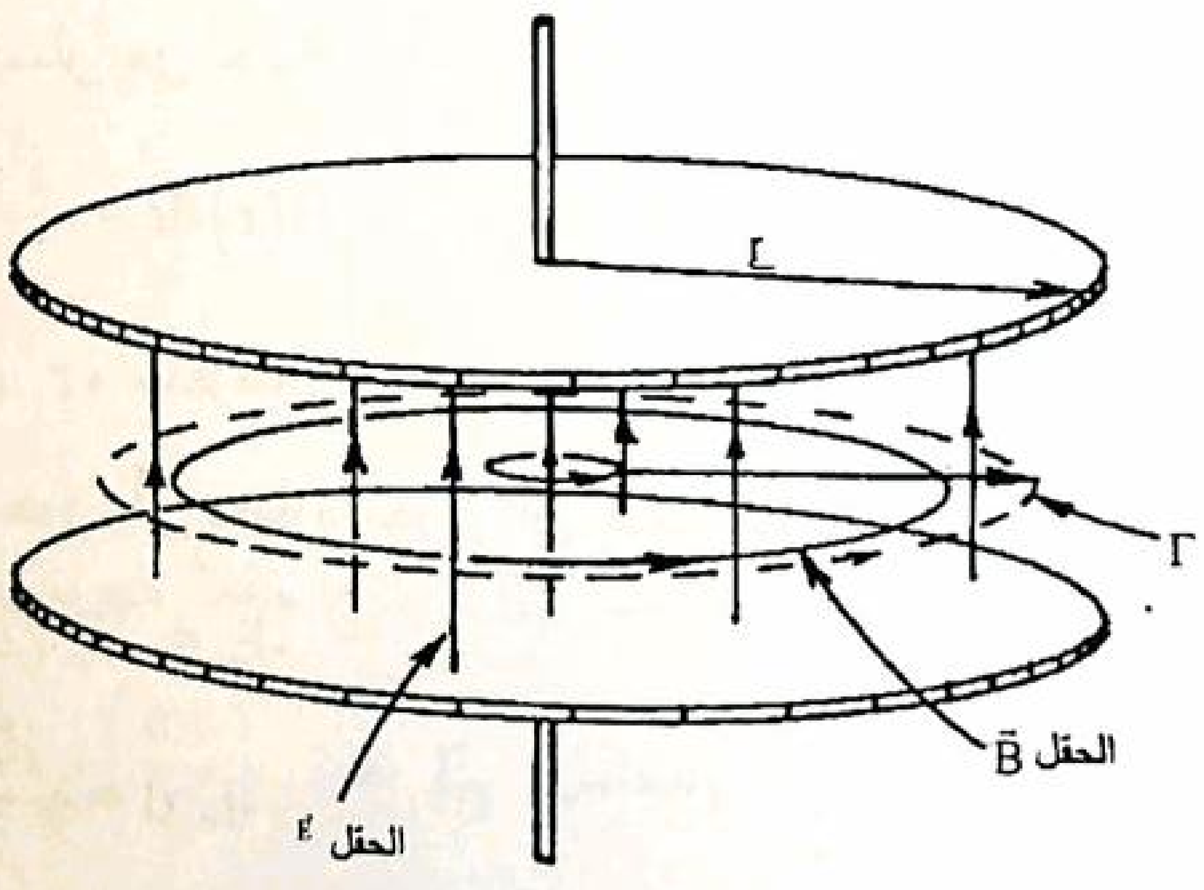
$$E = E_0 e^{i\omega t} \qquad (2.24)$$

الحقل الكهربائي الدوري بين لبوسي المكثفة. يبين جزؤه الحقيقي $E_0 \cos\omega t$ أنه دالة جيبية، أن اتجاهه يتغير بشكل دوري وأن شحنة اللبوسين تتغير بشكل دوري هي أيضاً بين موجبة وسالبة على الوجهين المتقابلين. لكن التناظر في الحجم بين اللبوسين يبين أن لـ $\vec{E}$ في كل لحظة نفس القيمة في الفراغ الفاصل بين اللبوسين، على أن نهمل كما فعلنا في حال الكهربائية الراكدة ما يقع عند حدود اللبوسين. لنأخذ دائرة بين اللبوسين مركزها محور المكثفة ونصف قطرها r؛ ولنكامل (2.23) على سطح هذه الدائرة مستعملين مبرهنة ستوكس :

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{E} \cdot d\vec{S} \qquad (1)$$

$$\int_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{E} \cdot d\vec{S} \qquad (1)'$$

حيث $d\vec{S}$ عنصر سطح الدائرة و $d\vec{\ell}$ عنصر الطول على محيطها Γ، الشكل.22a،



الشكل.22a

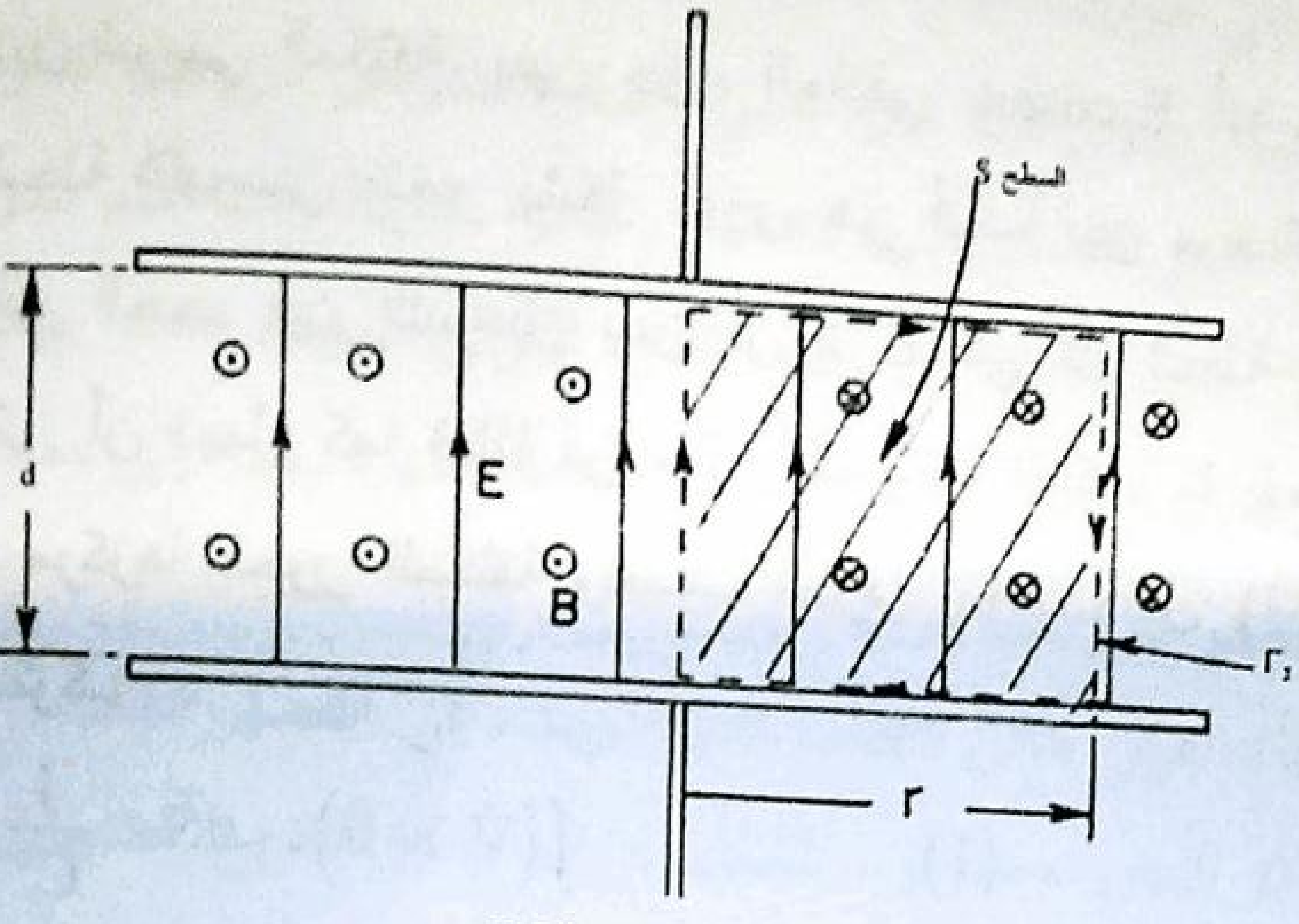
إن خطوط الحقل $\vec{B}$ مماسة للدائرة بالتناظر، E مستقل عن r، ومنه

$$B 2\pi r = \frac{1}{C^2}\frac{\partial}{\partial t} E\pi r^2$$

ومن (2.24)

$$B = \frac{i\omega r}{2C^2} E_0 e^{i\omega t} \qquad (2.25)$$

وهكذا فالحقل المغنطيسي الناتج عن الحقل الكهربائي دوري هو أيضاً، متغير مع الزمن، وسينتج بفضل معادلة ماكسويل-فارادي حقلاً كهربائياً إضافياً إلى الحقل الأول، نرمز للحقل الأصلي بـ E_1 وللإضافي بـ E_2. لدينا من (2.22) بأخذ سطح مستطيل عمودي على السطح الأول محيطه Γ_2، يمر عبر محور المكثفة، طوله r وعرضه d، الشكل.22b.



الشكل.22b

$$\int \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad (2)$$

وباستعمال ستوكس على اليسار من جهة، ونظراً لكون $\vec{B}(r)$ عمودي على السطح من جهة أخرى، فإن

$$(2)' \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t}\int d \cdot B(r)\,dr = -\frac{i^2\omega^2 r^2 d}{4C^2} E_0 e^{i\omega t}$$

إن $\vec{E}$ عمودي على الطول r، سنفرض أن الحقل المغذي للمكثفة هو بحيث يبقى مساوياً لـ $E_0e^{i\omega t}$ في المركز و $E_2 = 0$ على المحور أو بعبارة أخرى أن قيمة الحقل في المركز هي التي تعين E_0؛ لا يبقى في التكامل على $\vec{E}$ في '(2) إلا $-E_2 d$

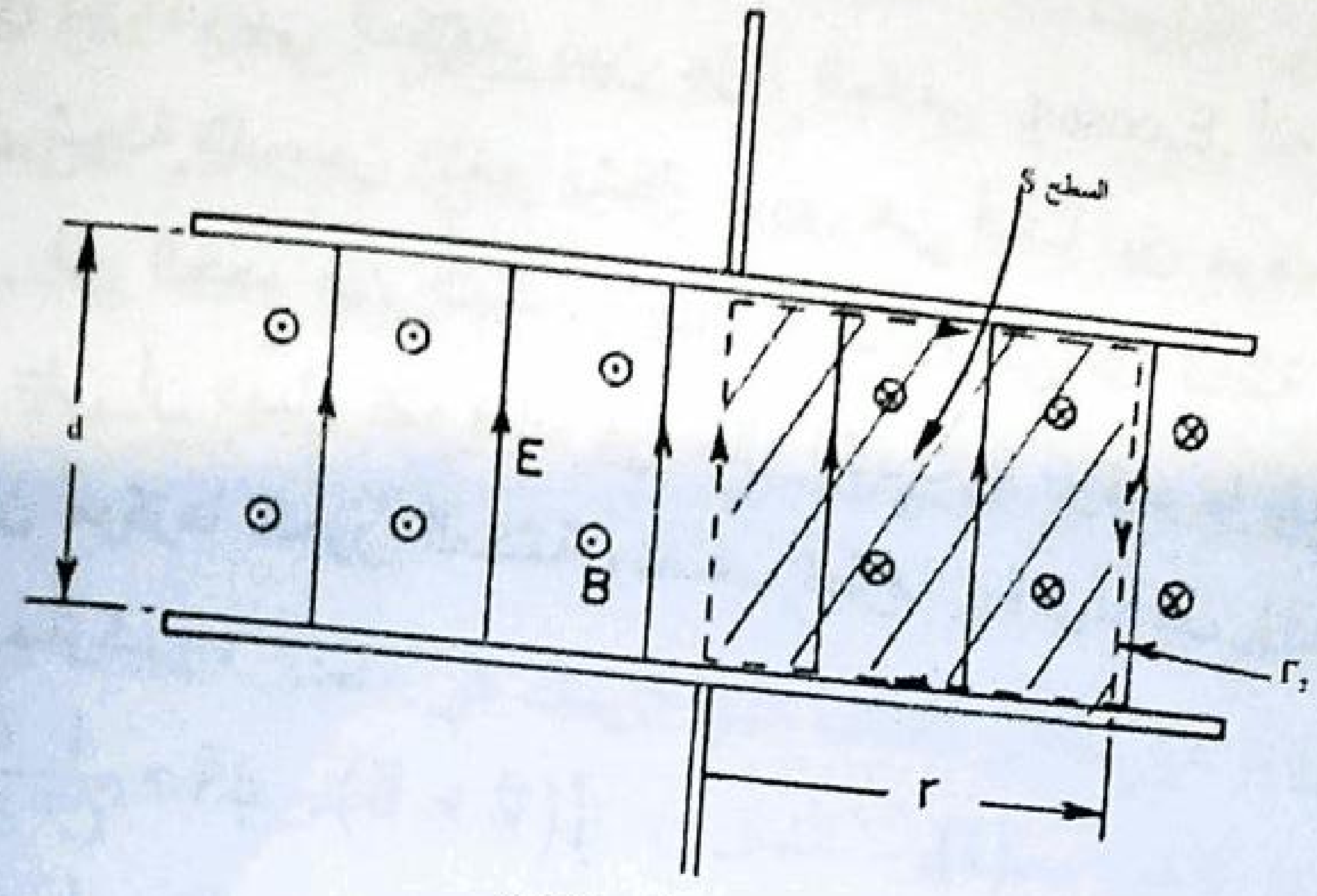
$$-E_2 d = -\frac{i^2\omega^2 r^2 d}{4C^2} E_0 e^{i\omega t}$$

$$E_2 = -\frac{\omega^2 r^2}{4C^2} E_0 e^{i\omega t} \qquad (2.26)$$

يتحول الحقل الكهربائي من دالة جيبية E_1 إلى دالة هي مجموع دالة جيبية ودالة على شكل قطع مكافئ، الشكل.23، ولكن الأمر لن يتوقف عند هذا الحد لأن الحقل الكهربائي $E_1 + E_2$ سينتج حسب (2.22) حقلاً مغنطيسياً إضافياً B_2، ليصبح الحقل المغنطيسي مساوياً لهذا الحقل وللحقل (2.25) الذي نرمز له بـ B_1. ولدينا بالعودة إلى (1) و'(1)

$$\int_\Gamma B_2 \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}$$

وهكذا فالحقل المغنطيسي الناتج عن الحقل الكهربائي دوري هو أيضاً، متغير مع الزمن، وسينتج بفضل معادلة ماكسويل-فارادي حقلاً كهربائياً إضافياً إلى الحقل الأول، نرمز للحقل الأصلي بـ E_1 وللإضافي بـ E_2. لدينا من (2.22) بأخذ سطح مستطيل عمودي على السطح الأول محيطه Γ_2، يمر عبر محور المكثفة، طوله r وعرضه d، الشكل.22b



الشكل.22b

$$\int \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad (2)$$

وباستعمال ستوكس على اليسار من جهة، ونظراً لكون $\vec{B}(r)$ عمودي على السطح من جهة أخرى، فإن

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t}\int d \cdot B(r)\, dr = -\frac{i^2\omega^2 r^2 d}{4C^2} E_0 e^{i\omega t} \qquad (2)'$$

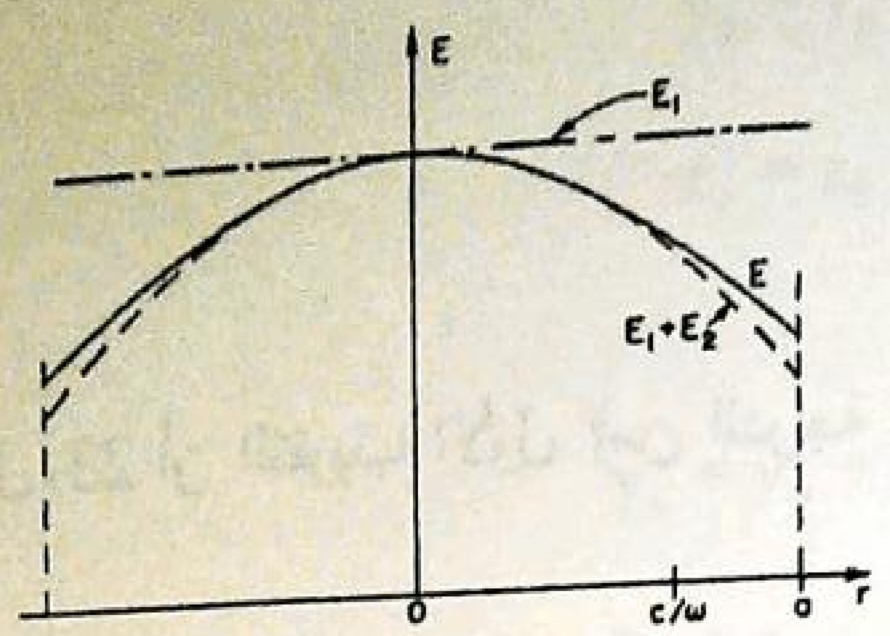
إن $\vec{E}$ عمودي على الطول r، سنفرض أن الحقل المغذي للمكثفة هو بحيث يبقى مساوياً لـ $E_0 e^{i\omega t}$ في المركز و $E_2 = 0$ على المحور أو بعبارة أخرى أن قيمة الحقل في المركز هي التي تعين E_0؛ لا يبقى في التكامل على $\vec{E}$ في '(2) إلا $-E_2 d$

$$-E_2 d = -\frac{i^2\omega^2 r^2 d}{4C^2} E_0 e^{i\omega t}$$

$$E_2 = -\frac{\omega^2 r^2}{4C^2} E_0 e^{i\omega t} \qquad (2.26)$$

يتحول الحقل الكهربائي من دالة جيبية E_1 إلى دالة هي مجموع دالة جيبية ودالة على شكل قطع مكافئ، الشكل.23، ولكن الأمر لن يتوقف عند هذا الحد لأن الحقل الكهربائي $E_1 + E_2$ سينتج حسب (2.22) حقلاً مغنطيسياً إضافياً B_2، ليصبح الحقل المغنطيسي مساوياً لهذا الحقل وللحقل (2.25) الذي نرمز له بـ B_1. ولدينا بالعودة إلى (1) و'(1)

$$\int_\Gamma B_2 \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}$$



الشكل.23

لا نستطيع إخراج E_2 من تحت إشارة التكامل على سطح الدائرة لأنه تابع للمتغير r، $dS = rdrd\theta$ ويصبح التكامل الثنائي على r و θ (بين 0 و 2π)

$$= \frac{2\pi}{C^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^r E_2 r dr$$

ومنه

$$2\pi r B_2(r) = -\frac{2\pi}{C^2} i\omega \cdot \frac{\omega^2 r^4}{4 \cdot 4C^2} E_0 e^{i\omega t}$$

$$B_2(r) = \frac{-i\omega^3 r^3}{16C^4} E_0 e^{i\omega t} \qquad (2.27)$$

وهكذا دواليك إلى اللانهاية: ينتج الحقل B_2 حقلاً كهربائياً E_3، نعينه بواسطة (2) و'(2) و(2.27) فنجد

$$E_3 = \frac{\partial}{\partial t}\int B_2(r)\,dr$$

$$E_3 = \frac{\omega^4 r^4}{64C^4} E_0 e^{i\omega t} \qquad (2.28)$$

و E_3 ينتج بدوره بواسطة (1) و'(1) حقلاً مغنطيسياً B_3. ينتج حقلاً كهربائياً E_4 بواسطة (2) و'(2)، الخ. نلاحظ أن معامل E_2 هو $-\frac{1}{2^2}\left(\frac{\omega r}{C}\right)^2$ ومعامل E_3 هو $+\frac{1}{2^2 \cdot 4^2}\left(\frac{\omega r}{C}\right)^4$ ونجد بالحساب أن معامل E_4 هو $\frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\left(\frac{\omega r}{C}\right)^6$، الخ. وهكذا فالحقل E، بترتيب المخارج بحيث يظهر مربع العاملي (n!)، هو

$$E = E_0 e^{i\omega t}\left[1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{\omega r}{2C}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{\omega r}{2C}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{\omega r}{2C}\right)^6 + \ldots\right]$$

إن السلسلة اللامتناهية بين المعقوفتين هي دالة بسل J_0 Bessel التي صادفناها في الفصل السادس:

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots \qquad (2.29)$$

ونكتب E على الشكل

$$E = E_0 e^{i\omega t} J_0\left(\frac{\omega r}{C}\right) \tag{2.30}$$

يبين منحني E المرسوم في الشكل.23 أن التقريب الأول (من الدرجة الثانية بـ $\left(\frac{\omega r}{C}\right)$ ينطبق على E من أجل التواترات الصغيرة.

الحل التقريبي للمعادلات التفاضلية

فضلنا عرض المسألة الذي أخذناه عن فاينمان[1] على إعطاء النتيجة بشكل مباشر بحل معادلتي ماكسويل بالإحداثيات الأسطوانية – أي حل معادلة لابلاس بالإحداثيات الأسطوانية – ذلك أنه يوضح بجلاء طريقة الحصول على الحلول التقريبية المتتالية للمعادلات التفاضلية ويصل في الوقت ذاته إلى الحل المضبوط لأن سلسلة بسل J_0 متقاربة. إن هذه الطريقة حالة خاصة للمسألة التالية. لتكن لدينا دالتان y و z تابعتان لمتغير r ومشتقاتهما بالنسبة له من الشكل

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dr} = f(r, y, z) \\ \dfrac{dz}{dr} = \varphi(r, y, z) \end{cases} \tag{2.31}$$

ولتكن y_0 و z_0 قيمتي هاتين الدالتين من أجل $r = r_0$. حل هاتين المعادلتين صورياً هو بالمكاملة على المتغير x (r) في المجال $x \in [r_0, r]$

$$y(r) = y_0 + \int_{r_0}^{r} f(x, y, z)dx$$

$$z(r) = z_0 + \int_{r_0}^{r} \varphi(x, y, z)dx$$

لا نعرف حلاً لهما بالاسترباع، لا نعرف كيف نكامل الدالتين f و φ لأن المقدار المكامل يحتوي على الدالتين اللتين نريد حسابهما، لذا نستبدل بهما الدالتين المحددتين بـ y_0 و z_0 فنحصل على الحل التقريبي من الرتبة الأولى

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \int_{r_0}^{r} f(x, y_0, z_0)dx \\ z_1 &= z_0 + \int_{r_0}^{r} \varphi(x, y_0, z_0)dx \end{aligned} \tag{2.32}$$

المكاملة بمتغير واحد x. نتابع العملية لتقريب من الرتبة الثانية بأن نستبدل بـ y و z نتيجة التقريب الأول

[1] دروس فاينمان في الفيزياء، المجلد الثاني 4§.23.

$$y_2 = y_0 + \int_{r_0}^{r} f(x, y_1, z_1)\,dx$$

$$z_2 = z_0 + \int_{r_0}^{r} \varphi(x, y_1, z_1)\,dx$$

وهكذا دواليك

$$y_n = y_0 + \int_{r_0}^{r} f(x, y_{n-1}, z_{n-1})\,dx$$

$$z_n = z_0 + \int_{r_0}^{r} \varphi(x, y_{n-1}, z_{n-1})\,dx$$

إن $\vec{E}$ و $\vec{B}$ في مسألة المكثفة الأسطوانية تابعان للمتغير r وحده $\vec{E} = (0, 0, E_z)$ $E_z = E_z(r, t)$؛ $\vec{B} = (0, B_y, 0)$ $B_y = B_y(r, t)$. نرمز لـ B بـ y و E بـ z ولدينا كحالة خاصة من (2.31) عمودي عليه في اتجاه، عبر السطح S، نسميه y و

$$\frac{dB}{dr} = \frac{dy}{dr} = f(r, z; t) = f(r, E; t)$$

$$\frac{dE}{dr} = \frac{dz}{dr} = \varphi(r, y; t) = \varphi(r, B; t)$$

f لا تتبع لـ y و φ لا تتبع لـ z.

والشرطان البدائيان هما $y_0 = 0$ و $z_0 = E_0 e^{i\omega t} = E_1$؛ $r_0 = 0$، نحسب انطلاقاً من المحور التقريب الأول، إنه نظراً لهذه المعطيات

$$B_1 = \int_0^r f(x, E_1; t)\,dx$$

$$E_2 = E_1 + \int_0^r \varphi(x, B_1; t)\,dx$$

وهما العلاقتان (2.25) و(2.26) الناتجتان عن تكامل الطرفين الثانيين في (1) و(2)

والتقريب الثاني هو

$$B_2 = \int_0^r f(x, E_2; t)\,dx$$

$$E_3 = E_1 + \int_0^r \varphi(x, B_2; t)\,dx$$

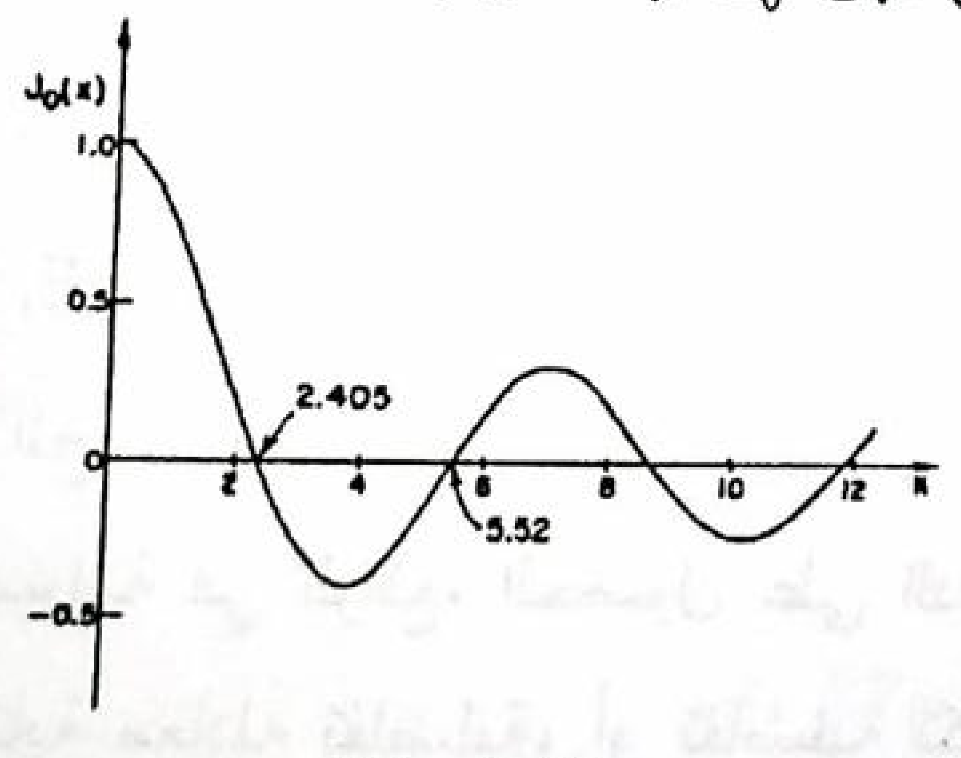
وهما العلاقتان (2.27) و(2.28). الخ.

الحصول على الدالتين y و z كحدين للمتتاليتين، يمكن في شروط معينة، شديدة الصرامة في الواقع، الحصول على الدالتين y و z كحدين للمتتاليتين، لا يعني بالضرورة إمكانية كتابة معادلة تفاضلية، أو تفاضلية تكاملية اللامتناهيتين y_n و z_n. إلا أن كتابة معادلة تفاضلية، أو تفاضلية تكاملية لا يعني بالضرورة إمكانية حلها تحليلياً. ولذا نلجأ إلى حلول تقريبية على غرار ما فعلناه انطلاقاً من المعادلتين (2.31) (أو من جملة معادلات) ونتوقف عند التقريب الثاني أو الثالث، الخ إذا كان هذا التقريب يوائم النتائج التجريبية، بدون البحث عن شرعية هذا التقريب رياضياً، أي عن معرفة ما إذا كانت السلسلة اللامتناهية من التقريبات المتتالية متناهية أم لا – بل ونعلم في أغلب الأحيان أنها غير متناهية. هذا هو محتوى نظرية الاضطرابات التي لا يمكن للفيزيائي الاستغناء عنها. أعطينا مثالاً عليها في نظرية النقل في المجلد

الثاني وخصصنا فصلين كاملين في المجلد الرابع لنظرية الاضطراب وطرق التقريب. وهذا ما يبرر الأهمية التي أعطيناها لحساب الحقل الكهرطيسي في المكثفة الاسطوانية.

4.2- التجويف المرنان

إن سلوك المكثفة هو أقرب ما يكون إلى سلوك الملف (الوشيعة) عندما يرتفع تواتر التيار الخارجي، وهذا ما جعلنا ننظر منذ البداية إلى دارة مكونة من العناصر المثالية الثلاثة (2.1). لدينا هنا حقلان متفاعلان، حقل كهربائي ينتج الشحنات على سطح اللبوسين وحقل مغنطيسي ينتج قوة محركة كهربائية. يلزم علينا لدارستهما العودة إلى مجموعة معادلات ماكسويل الأربع التي تأخذ بعين الاعتبار تغيرات الحقلين في كل الفضاء وبين الموصلات على وجه الخصوص. لننظر عن قرب إلى تغيرات الحقل الكهربائي (2.30) في نقطة ما بعيدة عن المحور مسافة r. إن لدالة بسل – سلسلة بسل – $J_0(x)$ الشكل التالي، الشكل.24. تنعدم من أجل $x_0 = \frac{\omega r}{C} = 2,405$. وتتحول شحنات اللبوسين الموجبة إلى سالبة والسالبة إلى موجبة. إن انعدام الحقل وتحوله الفجائي من موجب إلى سالب في هذه النقطة يعني أن مشتقاته كبيرة فيها، أو أن $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rangle\rangle 0$؛ ويمر تيار متناوب عبر أي موصل يوضع بين لبوسي المكثفة على هذا البعد من المحور. تنطبق نفس المحاكمة على تغيرات الحقل المغنطيسي ذي الطور المتقدم على طور الحقل الكهربائي بـ $\frac{\pi}{2}$ (متناسب مع مشتق E بالنسبة للزمن) المبتدأ بالصفر من أجل $x = 0$ ليصل إلى قيمة عظمى من أجل x_0 ليتناقص بشدة بعدها.



الشكل.24

لنتصور أننا وضعنا صفيحة معدنية على شكل أسطوانة بين لبوسي المكثفة نصف قطرها r مقابل لـ x_0: $r = \frac{2,405C}{\omega}$، $r \langle a$ وارتفاعها d. لا يمر أي تيار فيها نظراً لانعدام الحقل الكهربائي على هذا المحيط ونكون بذلك قد قصرنا الدارة بدون أي تغيير داخل المكثفة؛ لم يعد للتيار الذي يشحن المكثفة

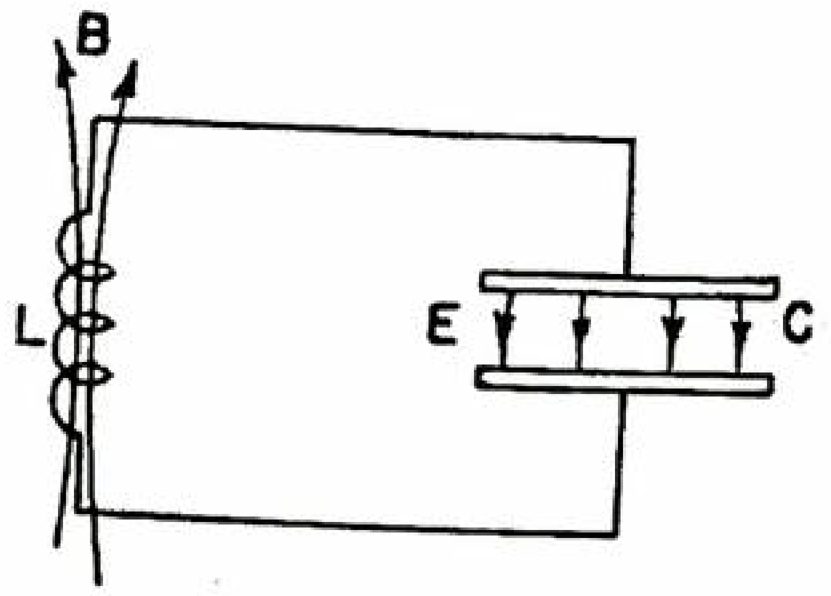
لزوم ولا لطرفي اللبوسين $r \langle a$ ونكون بذلك قد أنتجنا تجويفاً مرناناً، يغذي الحقلان الكهربائي الكهربائي والمغنطيسي فيه بعضهما بتواتر $\omega_0 = \frac{2,405C}{r}$ هو تواتر الإرنان.

تنطبق هذه المحاكمة على كل النقاط التي ينعدم فيها الحقل الكهربائي ويبلغ الحقل المغنطيسي حده الأعلى، في النقطة التالية $x = 5,52$ كما يبين الشكل.24. ولدينا بالتالي تواترات إرنان عديدة نسميها مقامات modes التجويف. تواتر الإرنان الثاني $\omega_0' = \frac{5,52C}{r}$ أكبر أكثر من مرتين من تواتر الإرنان الأول. إلا أن هذا الاهتزاز التوافقي المقسور متخامد أيضاً إذ أن التيار يمر في واقع الأمر على السطح الداخلي للأسطوانة لأننا أزلنا طرفي اللبوسين $r \langle a$ وأزلنا معهما الحقل المغنطيسي الذي هبط فجاءة إلى الصفر؛ وهو ما لم يكن ليقع لولا وجود تيار على السطح الداخلي للأسطوانة : إنه التيار المتناوب الذي يغير إشارة الشحنة بالتناوب على اللبوسين. والخلاصة إن التجويف المرنان هو في واقع الأمر دارة مغلقة (بدون مولد) مؤلفة من العناصر المثالية الثلاث C، L، R ويكافئ في أبسط صوره تفريغ المكثفة حيث تواتر الإرنان هو (2.14)

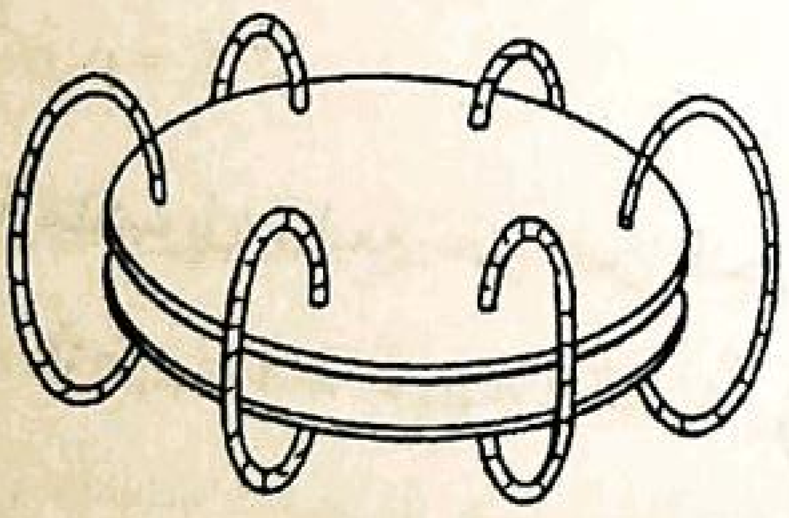
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

تتمثل هذا التجويف على الشكل.25a. يمكن رفع تواتر الإرنان بتخفيض قيمة الممانعة L، بوضع وشيعات متعددة ومتساوية على التوازي، الشكل.25b. لدينا حسب (1.10)

$$L = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{L_i}} = \frac{L_i}{n}$$



الشكل.25a


الشكل.25b

كما يمكن تخفيض الممانعة L بقصر الوشيعة إلى لفة واحدة.

5.2– مفعول القشرة Skin effect

عالجنا في الفصل الخامس (§3.3) مفعول القشرة من وجهة نظر القسم التخيلي لمعامل الانكسار ولكننا لم نتعرض لآلية حدوثه أو لما تؤول إليه معادلات ماكسويل داخل المعدن قرب سطحه. عندما يرتفع تواتر

على السطح برفعه من مقاومة التيار للحركة.

الموجة فإن التحريض الذاتي للمعدن يسعى لحصر التيار على السطح برفعه من مقاومة التيار للحركة. لامتنه، يجنبنا الإحداثيات الأسطوانية وأستعمال دالات بسل، وان لنتصور أن لدينا نصف سطح موصل لامتنه، يجنبنا الإحداثيات الأسطوانية وأستعمال دالات بسل، وان $\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \neq 0$. لدينا في حال التيار المستمر: لنتصور أن لدينا نصف سطح موصل بدون أن يكون توزعها مستقراً كما في حال التيار المستمر: أنابيب التيار موازية لـ y بدون أن يكون توزعها مستقراً كما في

الحالة شبه المستقرة معادلة ماكسويل الرابعة

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad (1)$$

التي ينتج عنها أن

$$0 \equiv \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

وبما أن

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad (2)$$

فإن

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad (3)$$

ولا توجد شحنات داخل الموصل. نكتب معادلة ماكسويل الثانية

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (4)$$

ونأخذ تدويرها

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \equiv \vec{\nabla}\left(\cancel{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}\right)^{=0} - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

أو نظراً لـ (2)

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (2.33)$$

نأخذ تدوير معادلة ماكسويل الرابعة على نفس النحو

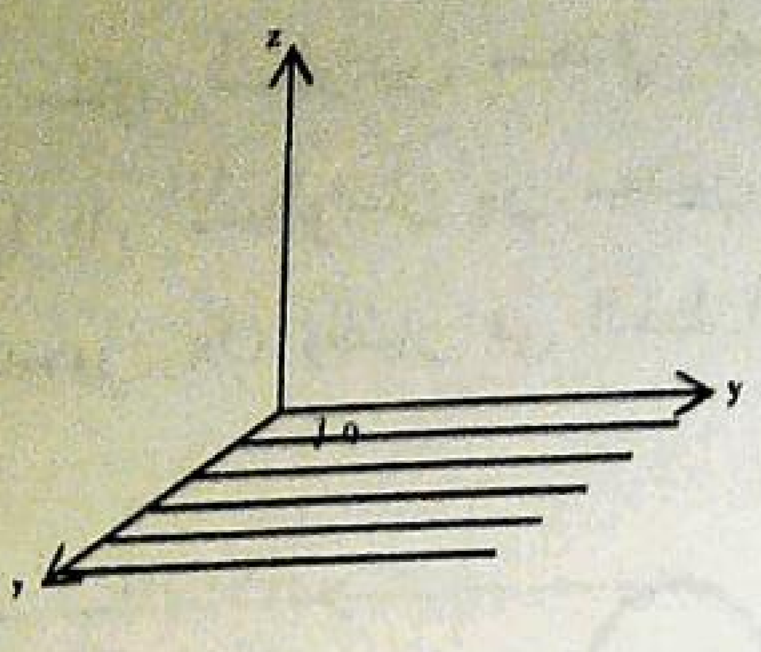
$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \equiv \vec{\nabla}\left(\cancel{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}\right)^{=0} - \nabla^2 B = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J} = \mu_0 \sigma \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

أو نظراً لـ (4)

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (2.34)$$

تذكر هاتان العلاقتان بمعادلة الانتشار التي رأيناها في المجلد الثاني ولكنهما ليستا مضبوطتين لأننا طبقنا تقريب الحالات شبه المستقرة. لنفرض أن الحقل الكهربائي الموازي لـ $\vec{J}$ هو في اتجاه Oy، ويدخل المعدن في الاتجاه السالب لـ z؛ الحقل المغنطيسي عمودي عليه في اتجاه Ox. لدينا

$$E_y(z) = Ae^{i(\omega t + k_z z)} \qquad (2.35)$$



نبدل في (2.33) فنحصل على

$$\frac{d^2E_y(z)}{dz^2} = -k_z^2E_y = i\omega\mu_0\sigma E_y$$

ومنه

$$k_z = \pm e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\mu_0\sigma\omega} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\sqrt{\mu_0\sigma\omega}$$

نأخذ الحل مع إشارة ناقص لنحصل على المقدار الأسي المتناقص

$$E_y(z) = e^{-\sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}}z}$$

ولنجد العمق الفعال من أجل e^{-1}، ($z = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$ كما في ((3.28).5).

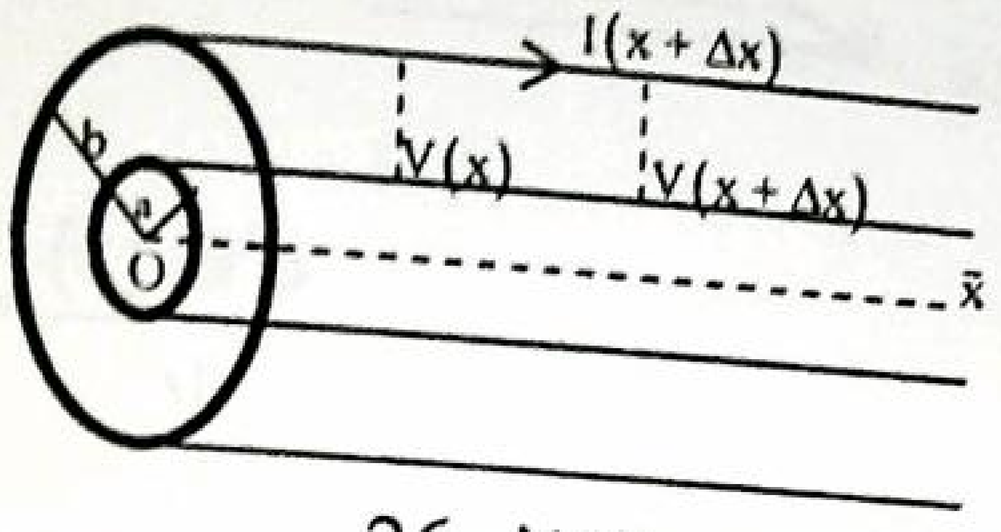
3. قيادة الموجة

1.3- خطوط نقل الطاقة الكهرطيسية

تنتقل الطاقة الكهرطيسية، طاقة التيارات المتناوبة عبر الأسلاك، عبر سلكين يغلقان الدارة بين المولد والمستقبل نسميهما خط النقل. تتبدد الطاقة أثناء النقل لأسباب عديدة، كمفعول جول على سبيل المثال، لكن الأمر يختلف عندما يصبح التواتر عالياً والإشعاع الذي تبثه الشحنات شديداً، ويصبح بالتالي نقل الطاقة عبر الأسلاك ذا كلفة لا تطاق لضعف المردود. لابد والحال هذه من إيجاد وسائل أخرى لنقل الطاقة وإيجاد حوامل فعالة لها توجه الموجات، تقودها من المولد إلى المستقبل يطلق عليها اسم موجهات الموجة Waveguides. هذه إذاً مسألة تقنية يقع على عاتق الهندسة دراستها بالتفصيل. إلا أنه من الممكن طرح المسألة من وجهة نظر أخرى، فقد درسنا مفصلاً إشعاع الشحنات المتحركة في الخلاء وبتقريبات متنوعة وكذا رد فعل الإشعاع على الشحنة وعلينا بالتالي إلقاء نظرة على الإشعاع عندما يكون منحصراً في مجالات معينة في الخلاء ببعد واحد أو بأكثر.

لنبدأ بإعطاء فكرة عن خط النقل عندما يتراوح توتر التيار بين $10^4 - 10^8$ هرتز، متجاوزاً بكثير تواتر الخطوط الهاتفية الواقع في حدود بضعة آلاف هرتز والذي يكفي معه فتل سلكي الخط أحدهما على

الآخر. لنأخذ كمثال على خط النقل سلكين أسطوانيين متحدي المحور "كابل" نصف قطر الأسطوانة الداخلية a والخارجية (وتسمى الدرع) b. الأسطوانتان من معدنين رقيقين والأسطوانة الداخلية مفرغة. مقطع خط النقل العرضاني معين بالمحور Ox والتيار في الخط الخارجي في الاتجاه الموجب لـ x، الشكل.26



الشكل.26

ليكن $V(x)$ فرق الكمون بين الخطين في نقطة ما x وليكن L_0 و C_0 التحريض الذاتي والسعة لواحدة الطول في هذه الدارة. لدينا من معادلة ماكسويل فارادي

$$-\left[V(x+\Delta x, t) - V(x)\right] = L_0 \Delta X \frac{\partial I}{\partial t}$$

التي تتناهى، عندما يتناهى الطول ΔX إلى الصفر، إلى

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = L_0 \frac{\partial I}{\partial t} \qquad (3.1)$$

ومن جهة ثانية فإن فرق الكمون بين السلكين ووجود الشحنات الكهربائية على سطح السلك الداخلي يجعل من النظمة مكثفة، نرمز بـ C_0 إلى سعة واحدة الطول فيها، إن الشحنة الموجودة على واحدة الطول هي

$$q = C_0 V$$

وتلك الموجودة على الطول ΔX هي

$$q = C_0 V \Delta X$$

تغيراتها مع الزمن هي

$$\frac{\partial q}{\partial t} = C_0 \Delta X \frac{\partial V}{\partial t}$$

وتساوي لتناقص شدة التيار بين النقطتين $I(x)$ و $I(x+\Delta x)$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t} \qquad (3.2)$$

نحول المعادلتين التفاضليتين الخطيتين (3.1) و(3.2) بالمتغرين V و I معاً إلى معادلتين من الدرجة الثانية بمتغير واحد بأن تشتق المعادلة الأولى بالنسبة لـ x والثانية بالنسبة لـ t فنحصل بالتخلص من $\frac{\partial^2 I}{\partial t \partial x}$ على

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \qquad (3.3)$$

واشتقاق الأولى بالنسبة لـ t والثانية بالنسبة لـ x يعطينا، بالتخلص من $\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x}$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \qquad (3.4)$$

إنهما معادلتا موجة ببعد واحد : ينتشر الكمون والتيار في الكابل بنفس سرعة الموجة

$$v = \frac{1}{\sqrt{C_0 L_0}} \qquad (3.5)$$

وهكذا فإن الكمون مثلاً هو من الشكل $V(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ ويمكن له أن ينتشر في الاتجاه الموجب أو السالب على حد سواء. وهو في كلتا الحالتين متناسب مع التيار الذي يخضع لنفس العلاقة ومعامل التناسب بينهما هو الممانعة المميزة، Z_0

$$V_\pm = \pm Z_0 I_\pm \qquad (3.6)$$

يمكننا تصور الكابل كسلسلة غير منتهية من الوشائع (الملفات) والمكثفات بدون وجود منبع يغذيه، فهو من وجهة النظر هذه مرشحة وممانعته الذاتية هي، حسب "(1.12)"،

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \qquad (3.7)$$

إنها موجبة وهي بالتالي مقاومة صرفة.

نحصل على معامل التحريض الذاتي مباشرة من حساب الطاقة المغنطيسية في المجال الفاصل بين السلكين $\frac{B^2}{2\mu_0}$ حيث $B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$ ((2.(2.9))

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 d\tau$$

نكتب $d\tau$ من أجل حجم واقع بين السلكين، عنصر السطح فيه $2\pi r dr$ وطوله ℓ، فيصبح التكامل

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_a^b \frac{\mu_0^2 I^2}{(2\pi)^2 r^2} \ell 2\pi r dr$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi} \text{Ln} \frac{b}{a}$$

وبما أن الطاقة تساوي لـ $\frac{LI^2}{2}$ فإن

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \text{Ln} \frac{b}{a}$$

و

$$L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \text{Ln} \frac{b}{a} \qquad (3.8)$$

حسبنا من جهة أخرى سعة مكثفة أسطوانية الشكل طولها ℓ ووجدنا ((1.(4.11)) أن

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \ell}{\text{Ln}\, b/a}$$

وكما أعلاه

$$C_0 = \frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\mathrm{Ln}\, b/a} \qquad (3.9)$$

وأخيراً

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{\mathrm{Ln}\, b/a}{2\pi\varepsilon_0 c} \qquad (3.10)$$

حيث c (ونكتبها صغيرة) هي سرعة الضوء $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$. إنها كذلك سرعة انتشار موجة الكمون والتيار على السلك

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c \qquad (3.5)'$$

فرضنا للوصول إلى هذه النتيجة أن المجال بين السلكين خاو تماماً، لا مواد عازلة أو مغنطيسية فيه وأن التيار يجري على السطح الخارجي للسلك ولا يخترقه، فهو سلك مفرغ وموصل تام في آن واحد.

<u>ملاحظة :</u>

أخذنا الكابل أسطواني الشكل لأن حساب L و C سهل؛ ما من شيء يمنع، شريطة تحقق الفرضين السابقين، من أخذ الموصلين المتوازيين على أي شكل نريد، قاعدة الموصل الداخلي سداسية منتظمة وقاعدة الخارجي قطع ناقص على سبيل المثال. تنتشر الأمواج (موجات الكمون والتيار) بسرعة الضوء في هذه الحالة أيضاً لأن ما يهم في حساب L_0 و C_0 هو المقطع الفاصل بين سطحي السلكين متحدي المحور b - a الذي يجب أن يبقى ثابتاً. إلا أن الممانعة Z_0 لا تساوي للمقدار الخاص المعطى بالعلاقة (3.10).

تبين معادلة الأبعاد بوضوح أن أبعاد $\frac{1}{\varepsilon_0 c}$ هي أبعاد مقاومة كما تقتضيه المعادلة (3.10).

فأبعاد المقاومة هي

$$[R] = [V][I]^{-1} = \frac{[M][L]^2[T]^{-2}}{[Q]}\frac{[T]}{[Q]} = \frac{ML^2T^{-1}}{Q^2}$$

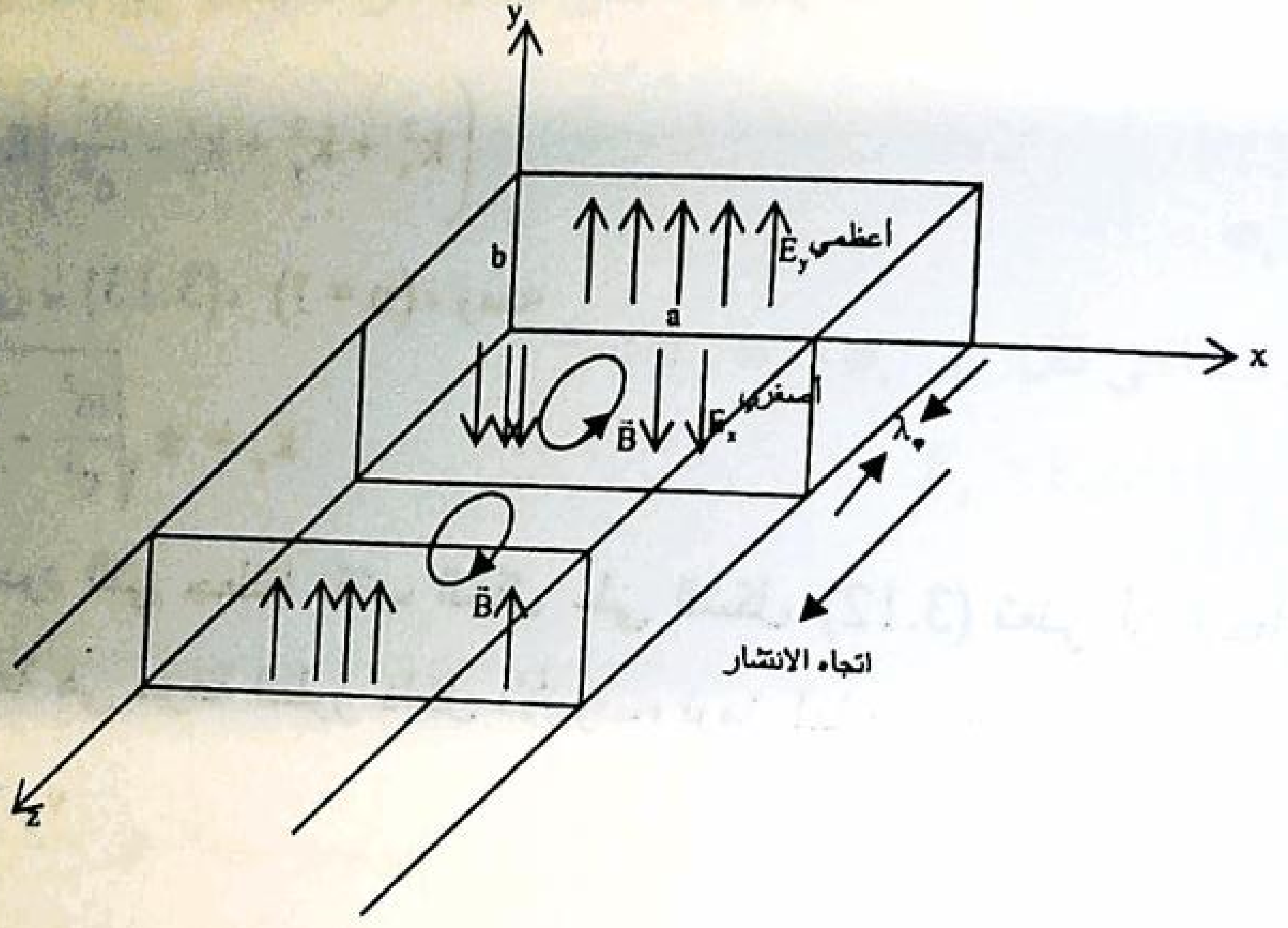
وأبعاد $\frac{1}{\varepsilon_0 c}$ هي

$$\frac{1}{\varepsilon_0 c} = \frac{ML^3T^{-2}}{Q^2} \cdot \frac{T}{L}$$

ويساوي لـ $\frac{4\pi\, 9\cdot 10^9}{3\cdot 10^8} = 120\pi$ أوم. العدد اللوغارتمي في صورة قيمة الممانعة لا يختلف كثيراً عن الواحد ومقاومة الكابل تتراوح عادة بين 50أوم ومئات الأوم.

3.2- مُوجّه الموجة Waveguide المستطيل

رأينا في الفقرة السابقة أن الأسطوانة المجوفة – التجويف المرنان – ينقل الحقل الكهرطيسي بين قاعدة الأسطوانة وسقفها؛ وبالتالي فإننا لسنا بحاجة إلى سلك داخلي لخط النقل في حال التواترات العالية لنقل الطاقة الكهرطيسية عبر التجويف – عبر الحجم الداخلي لموصل ما. سنأخذ هذا الموصل تسهيلاً، ليس على شكل أسطوانة، وإنما على شكل متوازي المستطيلات، طول ضلعي مقطعه العرضاني a و b، نأخذ اتجاهيهما كمحورين Ox ، Oy ونأخذ مولد متوازي المستطيلات كمحور Oz، الشكل.27



الشكل.27

نعلم أنه في حال عبور الضوء من خلال أنبوب فإن لأمواجه حقلاً عرضانياً $\vec{E}$ عمودياً على Oz. وليكن اتجاهه (استقطابه) Oy. يمكن دراسة الحقل E_x على نفس النحو، كل ما علينا فعله هو التبديل بين a و b؛ الحقل $\vec{E}$ هو توضيع هذين الحقلين. تجدر الإشارة إلى أن الموجة ليست مستوية و Oz ليس اتجاه حركتها؛ أو بعبارة الأخرى أن متجهة الموجة $\vec{k}$ ليست موازية لـ Oz لكنها عمودية على Oy لكي يبقى الحقل $\vec{E}$ في اتجاه Oy. لدينا إذاً، $k_y = 0$،

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_z z$$

ونكتب الحقل E_y على الشكل

$$E_y = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = E_0 e^{-ik_x x} e^{i(\omega t - k_z z)} \qquad (3.11)$$

تقتضي الشروط على الحدود – عدم خروج الحقل من الأنبوب – أن يكون $E_y = 0$ من أجل $x = 0$ و $x = a$ أي أن يكون الجزء الحقيقي لـ $e^{-ik_x x}$ من الشكل $\sin k_x x$ الخاضع للشرط $k_x a = n\pi$، $n = 1, 2, ..., n$، ونكتب E_y

$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{i(\omega t - k_z z)} \qquad (3.12)$$

بالشروط على الحدود

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \qquad (3.13)$$

وفي هذا الشرط تحقق مركبات الحقل الكهربائي
وطاقة الحقل الكهربائي حيث لا تحدث داخل الأنبوب الموجه

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

أو

$$\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)E_y = 0$$

$k_y = 0$ ، k_x معطى بـ (3.13) ، ($n = 0$) ومنه

$$k_z = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \qquad (3.14)$$

إن الشروط على الحدود التي ... (3.12) تعني أن الحقل ينتشر في اتجاه z على الدوام بسرعة في ... داخل الأنبوب ... v_p

$$v_p = \frac{\omega}{k_z} \qquad (3.15)$$

ويكون طول موجة هي

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{|k_z|}$$

تسمى طول الموجة في الدليل، ولدينا النسبة بين طول الموجة هذه وطول الموجة الحرة في الفضاء $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$

$$\frac{\lambda_g}{\lambda_0} = \frac{|v_p|}{c} = \frac{\omega}{c\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}} \qquad (3.16)$$

نخرج $\frac{\omega}{c}$ من تحت إشارة الجذر فتختزل مع $\frac{\omega}{c}$ في الصورة، يبقى

$$\frac{\lambda_g}{\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{\omega}\frac{m\pi}{a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0 m}{2a}\right)^2}} \qquad (3.16)'$$

لا نعير اهتماماً الآن بالحقل المغنطيسي، خطوطه دوائر في المستوى xz والمستويات الموازية له، وبما أن $\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E$ ، فإن دوران الحقل المغنطيسي هو في المنطقة التي يأخذ فيها مشتق E_y بالنسبة

للزمن أكبر قيمه أي بين النهايتين العظمى والصغرى لـ E_y حيث ينعدم المشتق فهي إذاً دوائر مركزها $\frac{n\lambda_\varphi}{2}$، $n = 1, 2, \dots$، الشكل.27.

يمكن للموجات المقادة أن تتجه في الاتجاه الموجب أو السالب لـ z حسب إشارة الجذر في (3.14) وهي بذلك لا تختلف عن موجات الكمون والتيار في الكابلات متحدة المحور. يمكن كذلك أن يصبح المقدار المجذور سالباً عندما ينخفض التواتر ويتحول الحقل الكهربائي عندئذ من دالة دورية صرفة إلى دالة دورية مضروبة بدالة متناقصة بشكل أسي $e^{-|k_z|z}$ – لا نعالج الدالة الأسية المتزايدة (k_z مع إشارة $-i$) لأنها غير مقبولة فيزيائياً، يقع ذلك عندما ينعدم الجذر لينتقل من الموجب إلى السالب من أجل تواتر حرج، نرمز له بـ ω_c

$$\omega_c = \frac{\pi c}{a} \quad (3.17)$$

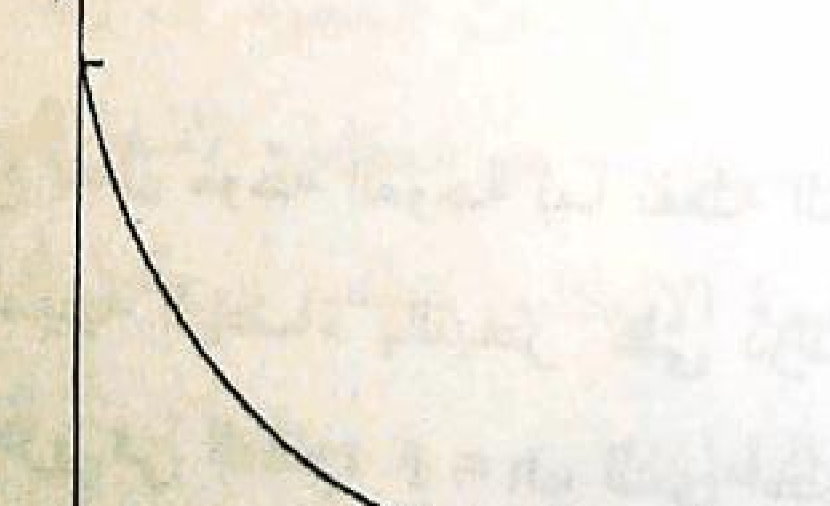
ولدينا من أجل التواترات التي تقل عن ω_c، $\omega_c \rangle \omega$:

$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{-k'_z z} e^{i\omega t} \quad (3.18)$$

حيث

$$k'_z = \left(\frac{\pi^2}{a^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{1/2} \quad (3.19)$$

أخذنا إشارة الجذر موجبة مما يلزمنا باختيار z في الاتجاه الموجب بعيداً عن منابع الحقل الكهرطيسي الموجودة في الاتجاه الآخر ليصبح التناقص الأسي مقبولاً مع الابتعاد عن المنبع. لنفرض المنبع في النقطة $z = 0$ ينخفض الحقل بالمقدار $\frac{1}{e}$ بعد مسافة $z = \frac{1}{k'}$ وهي مسافة قصيرة جداً من أجل التواترات الضعيفة $\frac{\pi}{a} \rangle\rangle \frac{\omega}{c}$، $k' = \frac{\pi}{a}$ و $z = \frac{a}{\pi}$، لذا يسمى التواتر ω_c تواتر القطع Cutoff؛ يبدو منحني تغيرات E_y من أجل التواترات الضعيفة على شكل الدالة الأسية المتناقصة، الشكل.28.



الشكل.28

لنكتب النسبة بين الموجتين λ_φ و λ_0، أي بين السرعتين v_φ و c في (3.16) بدليل التواتر الحرج ω_c

إنها

$$\frac{v_\varphi}{c} = \frac{1}{\left(1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right)^{1/2}}$$

وهي أكبر من الواحد في حالة التواترات المرتفعة $\omega \rangle \omega_c$، حالها في ذلك حال سرعة الضوء في وسط معامل الانكسار فيه أصغر من 1. نعلم أن السرعة الفيزيائية هي سرعة الزمرة وليست سرعة موجة منفردة. إذ لا تحمل الموجة المنفردة الطاقة أو الإشارة. سرعة الزمرة هنا هي، نظراً لـ (3.14) و(3.17)

$$v_{زمرة} = \frac{d\omega}{dk} = k\frac{c^2}{\omega} = \frac{c^2}{\omega}\frac{1}{c}\left[\omega^2 - \omega_c^2\right]^{1/2}$$

$$v_{زمرة} = c\left[1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right]^{1/2} \quad (3.20)$$

لدينا، من جهة أخرى، من العلاقة السابقة

$$v_{زمرة}\, v_\varphi = c^2 \quad (3.21)$$

أخيراً، نعلم أن كثافة طاقة الحقل الكهربائي هي $\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$ ويمكن البرهان أن كثافة طاقة الحقل المغنطيسي في مُوجّه الموجة، هي كما حال التجويف المرنان مساوية لطاقة الحقل الكهربائي. وهكذا فكثافة الطاقة هي $\varepsilon_0 E_0^2$ وتنتشر بسرعة هي سرعة الزمرة $v_{زمرة}$. وهكذا فالاستطاعة المنقولة بواحدة الزمن عبر الموجّه هي

$$\frac{dU}{dt} = \varepsilon_0 E_0^2 cab\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \quad (3.22)$$

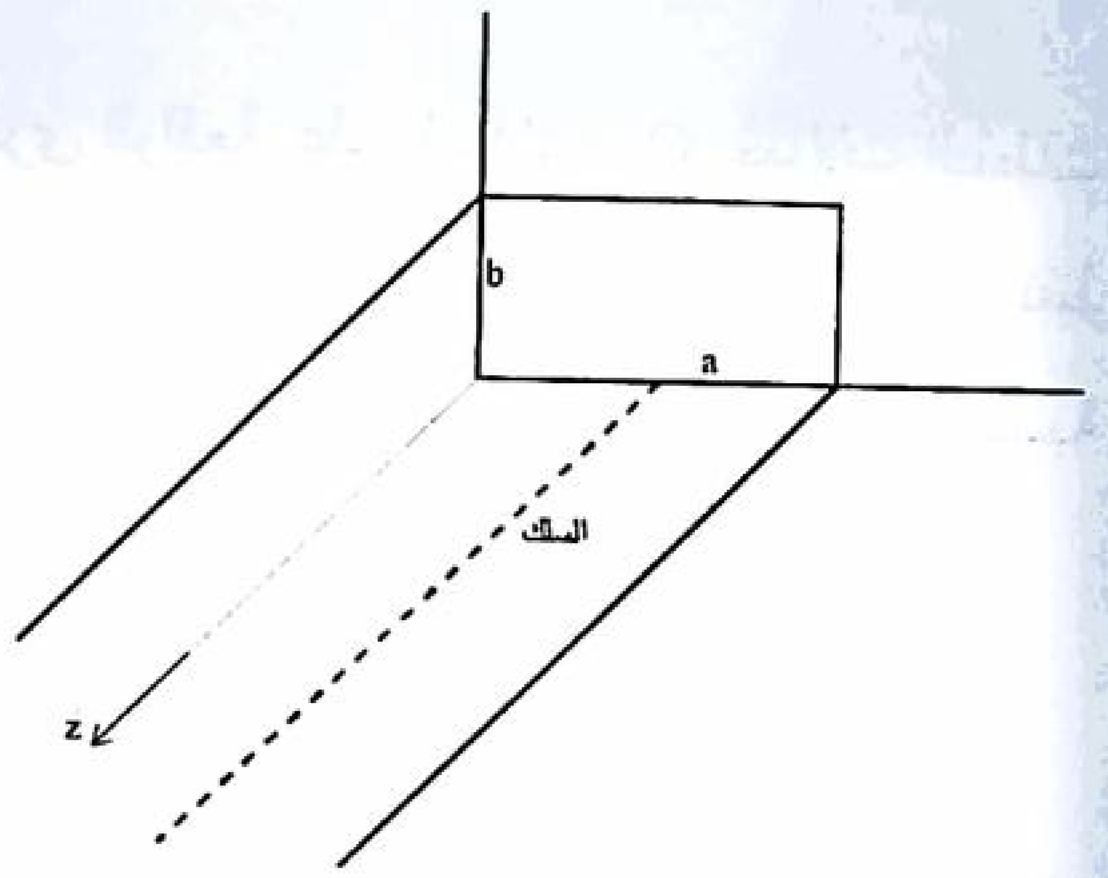
3.3- المقارنة مع الشبيكة البلورية

نستطيع مقارنة تخامد التواتر السريع بفعل موجّه الموجة بما تفعله الشبيكة Lattice البلورية في السماح لأطوال موجة معينة من الأشعة السينية البيضاء بالتبعثر على ذرات البلورة وإيقاف كل أطوال الموجة الأخرى. لا تلعب الإحداثية y أي درو في المقام، n = 1، الذي اخترناه، لذا يمكن أخذ العرض b كبيراً قدر ما نريد وتصور موجّه الموجة على شكل صفيحتين موصلتين متناهيتي الأبعاد y، z يفصل بينهما مجال في اتجاه Ox طوله a. فالمحاكمة التي سنتبعها لا تصح إلا من أجل هذه الهيكلة الهندسية للموجّه. نتصور مصدر الحقل الكهرطيسي سلكاً موازياً لـ Oz يمر في وسط المجال بين الصفيحتين ويجري فيه تيار متناوب تواتره ω، الشكل.29a. يشع هذا السلك حقولاً تحددها الإحداثيات الأسطوانية

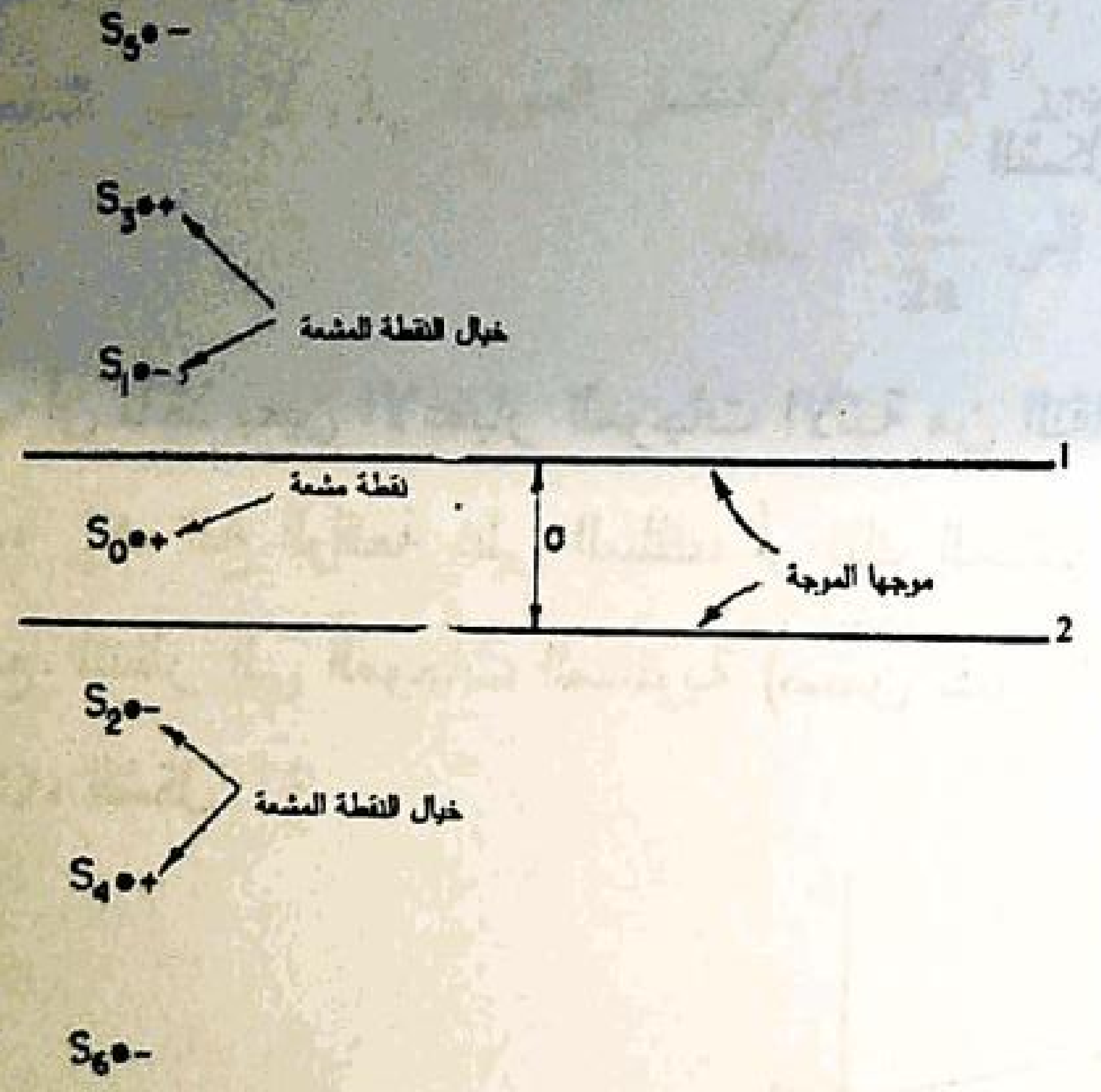
وتتعين بواسطة دالات بسل كما أشرنا. لنفرض أن الحاجزين موصلان كاملان ولنطبق، كما فعلنا في الكهربائية الراكدة، طريقة الخيالات لتعيين حالة الحاجزين الكهربائية على أن نأخذ بعين الاعتبار التأخر الذي تفرضه الكهرطيسية. إن ما يثبت صحة طريقة الخيالات في هذه الحالة هو وجود المرايا التي نرى فيها خيال المنبع الضوئي، أي انتشار الموجة الضوئية.

لتكن S_0 نقطة من السلك المشع، شحنة متحركة موجبة. يحدث هذا المنبع خيالين كما في الكهربائية الراكدة، خلف الحاجزين، موجهي الموجة، 1 و 2 يبعدان عنه نفس المسافة a نرمز لهما بـ S_{1-} و S_{2-}. ثم إن للخيال S_{2-} خيالاً خلف الحاجز 1 نرمز له بـ S_{3+} يبعد عنه مسافة تساوي $\frac{3a}{2}$ ويبعد مسافة a عن S_{1-}، وللخيال S_{1-} خيال خلف الحاجز 2 نرمز له بـ S_{4+} يبعد عنه مسافة $\frac{3a}{2}$ ومسافة a عن S_{2-}.

وهكذا يتكون لدينا على امتداد Ox نقاط تبعد الواحدة منها عن الأخرى المسافة a وشحناتها سالبة وموجبة بالتناوب، الشكل.29b



الشكل.29a

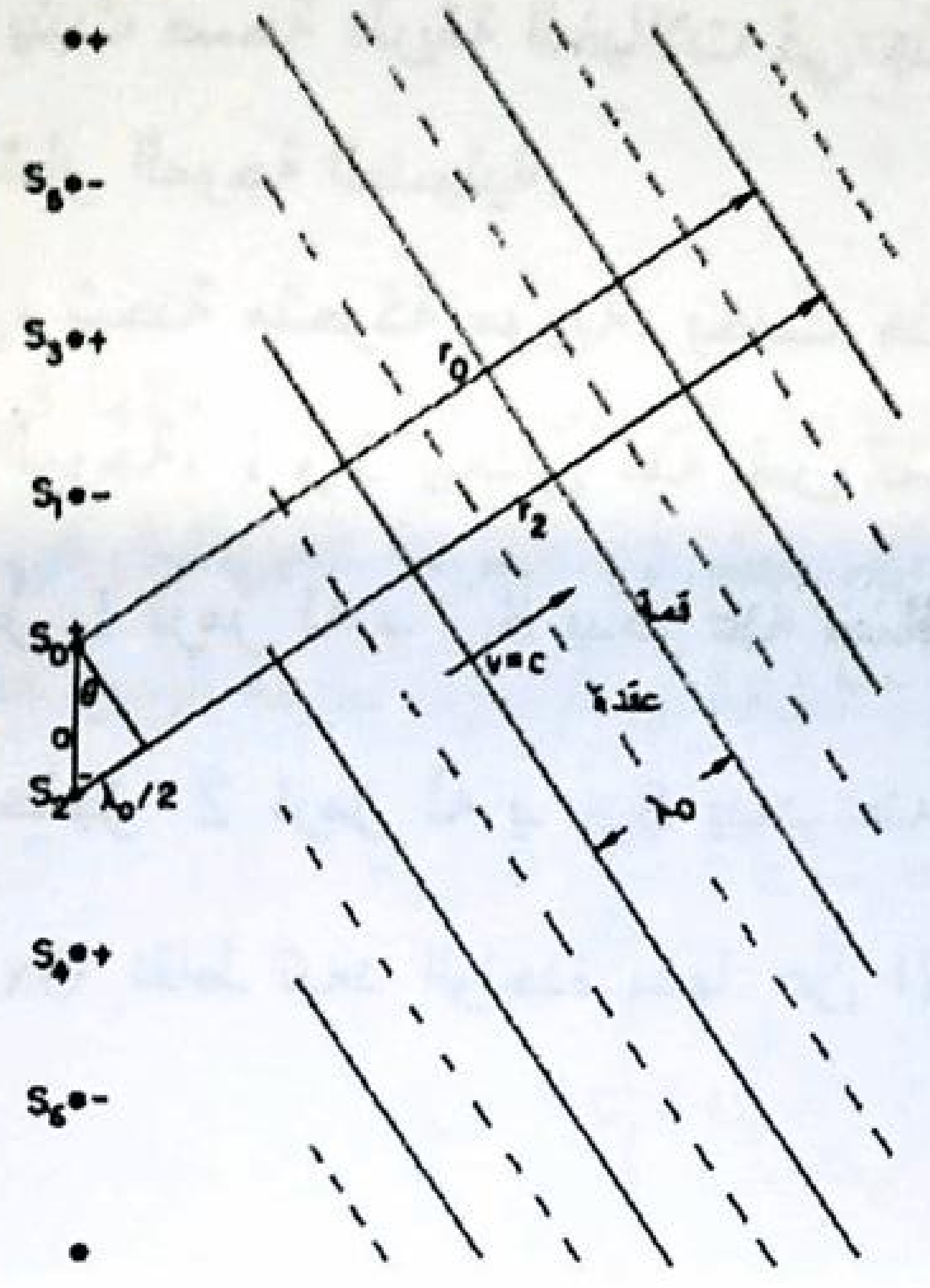


الشكل.29b

يذكر هذا الترتيب بترتيب الشبيكة البلورية ذات الخطوة a. رأينا أن انعراج الأمواج المستوية الصادرة عنها – أي الأمواج البعيدة عن المصدر – هو انعكاس الأشعة السينية ذات التواتر العالي على مجموعة مستويات الشبيكة المتوازية وأن تقوية الانعكاس تتطلب أن يكون فرق الطريق بين الشعاعين الناتجين عن نقطتين متجاورتين S_0 و S_{2-} في النقطتين r_0 و r_2 مساوياً لـ $\frac{\lambda}{2}$ كما في كل الحالات الانعراج والتداخل، محققاً لمعادلة براك Bragg ((2.11).6)

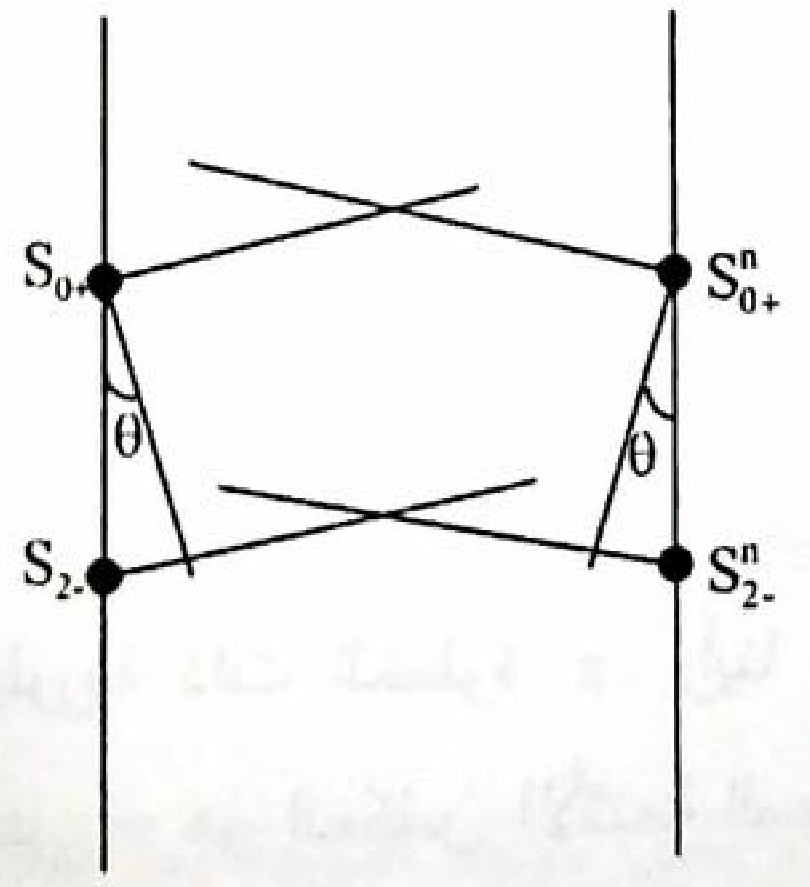
$$\sin\theta = \frac{\lambda_0}{2a} \quad (3.23)$$

يحدد، الشكل.30، بخطوطه المتصلة وضع قمم الموجه والخطوط المتقطعة عقدها، وضع الأهداب المضيئة والمظلمة في الضوء.



الشكل.30

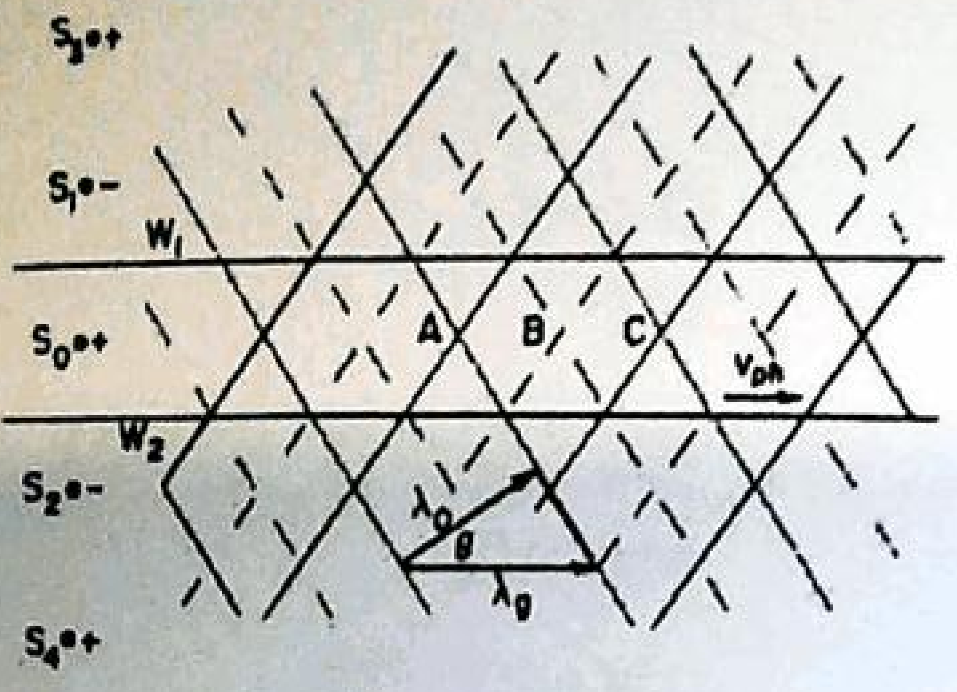
يجب أن نأخذ بعين الاعتبار الموجات الآتية من النقاط الأخرى الواقعة على امتداد Ox خيالات النقطات S''_{0+}، S''_{2-}، الخ الواقعة على السلك، أو تلك المنتشرة من S_0، S_{2-} بزاوية نظيرة الزاوية θ بالنسبة لنقط المنبع. لننظر إلى الموجات المستوية (ضمن نفس الشروط السابقة) نظيرة الموجات التي حددناها بالنسبة لـ Ox، الشكل.31



الشكل.31

يعمل العموديان على المجموعتين من الموجات زاوية θ بينهما وتنطبق قمم المجموعتين في نقاط A و C مثلاً، الشكل.32، تبعد عن بعضها المسافة $\frac{\lambda_0}{\cos\theta}$، فكأن حقل الموجّه ينتشر فيه بطول موجة رمزنا لها بـ λ_φ هي نظراً لـ (3.23)

$$\lambda_\varphi = \frac{\lambda_0}{\cos\varphi} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}} \quad (3.24)$$



الشكل.32

تعطينا العلاقتان (3.23) و(3.24) العلاقة '(3.16)، كما تبين معادلة براك أنه يستحيل أن يكون طول الموجة في الخلاء أكبر من $2a$ إذ يستحيل عندئذ ظهور الانعراج وانتشار الموجة λ_φ. لا يظهر المفعول إلا عندما ينحدر طول الموجة إلى $2a$ ويرتفع التواتر إلى $\omega_0 = \frac{c}{2a}$.

ثبت المصطلحات

الأثير 150-142 Ether

ارتكاسي 348 Reactive

إرنان 355-354-351-227-205 Resonance

استقطاب المائع 230-229

متجهة الاستقطاب الإلكتروني 227-222-221

استقطابية الذرة 262-260-259-234

إشعاع 199-138-127-58

– كابح 300-220-217-215 Bremsstrahlung

شدة الـ – الضوء 271-204-203-201

قطاع الـ – 202

إعادة التنظيم 178 Renormalization

إلكترونات التعادل 249-115-29 Valence

انحناء (تقوس) 335-333-326-325-78 Curvature

انعراج 313-308-302-294-285 Diffraction

Inversion

انعكاس Time -

– زماني 157-155-153 Space

– مكاني 155 Hysterisis

بطاء 255-254-251 Ionosphere

بلاسما الجو المؤين 266

بوزون هيغز 178

تانسور -190-188-187-15-12-3

-232-226-210-209-207

263-233 Divergence

تباعد (تفرق) 12-10 Cavity

تجويف Resonant

– مرنان 365-364

تحريض -114-54-47-44-42-40

– كهربائي 121-119

متجهة الـ – الكهربائي 256-238-224

– المغنطيسي –	256-253-245-238	
تحليل كهربائي	116-114	Electrolyse
تداخل	279	Interference
أهداب الـ –	284	Franges
تردد	-280-279-265-235-203 284	Frequency
تدفق (محصود)	121-119-105-5	Flux
– التيار	74	
تدوير (عقص)	12	Rotationnel (Curl)
تسارع		
– الجر	243	
– كوريوليس	243	
– مطلق	243	
– نسبي	243	
تغيير		
مساير الـ – (انظر تانسور)	155-143-142-103	Covariant
مضاد الـ – (انظر تانسور)	143	Contravariant
تشتت	322-298-296-204	Dispersion
تصدع	254	Dislocation
تضييق مغنطيسي	254	Magnetostriction
تفاعل		
– آني (عن بعد)	196-159	
تواتر (انظر تردد)	-235-234-227-219-155 -355-270-265-264-257 365	
– البلاسما	265	
الـ – الخاص	354	
– القطع	373	Cutoff
ثابتة الزمن	338	
ثنائي قطب هرتز	159	
جداء التلاف	39	Convolution
جسر وطستن	344	
حارقة	336	Caustics
حلزون كورنو	316	

حقل		
محرض	121	Field
– مفهوم الـ	279-103-3	Induced
خلية		
بدائية	231-230	
وستون	116	
الدالامبرسي	143-141	
دالة		
– بسل	361-323-311-310	
– ديراك	268-46-39-38	
– غرين	-92-46-45-40-39-14	
	304-179	
– كمون (مدروج)	46	Harmonic
– هيفسايد	268	
دوران (جولان)	5	Circulation
زمن الارتخاء	264-263-76	Relaxation
الـ سرعة الزاوية (انظر تواتر)	243-242-241	
سعة المكثفة	50	Capacity (capacitance)
الموجة	333-317-309-281-154	Amplitude
سماحية	258-257-223-55-53-22	Permittivity
سيكلوئيد	81	
شبكة بلورية	252	Lattice
شبيكة	253-230	
– رباعية التثليث	231	Tetragonal
– ثلاثية الميل	231	Triclinic
– قائمة المعينات	231	Orthorhombic
– مثلاثية	231	Trigonal
– مسدساتية	231	Hexogonal
– مكعبة	231	Cubic
– وحيدة الميل	231	Monoclinic
الشروط على الحدود	292-275-269-267	
صيغة		Form
– مغلقة	15	Closed
– مضبوطة	15	Exact

طاقة		
الاستبدال	249	Exchange
ذاتية	169-61-60	
طواف	244-242	Precession
طور	337-313-306-281-154	Phase
فرق الـ –	-284-272-234-154-103	
	319-298-295-290-288	
طيف		Spectre
راسم الـ –	80	
الـ – من الرتبة الأولى، الثانية	295	
عرض الـ –	284-281-205	
طريقة الخيالات	376-42-40	Images
عازل		
سماحية الـ	223	Permettivity
ثابتة الـ	259-226-224	
عزم		
– التيار المغنطيسي	107-106-96	
– ثنائي القطب	-160-110-95-42-37-35	
	-217-209-206-202-162	
	237	
– زاوي صميمي (سبين)	247-237-236	Spin
– مداري	235	
غاز		
– قطبي	229-227-221	
– لاقطبي	228-221	
– كامل	230-229-228	
غراديان (تدرج)	10	Gradient
فاراد	47	Farad
فائقية التوصيل	125-76	Superconductivity
فعل	194-189-188-144	
الـ – الأصغر	-328-327-326-189-188	
	331	
الـ قابلية الكهربائية	229-226-223	

قاعدتا كيرشوف	-344-342-341-113-112 345	
قانون		
– آبه	331	
– برنس	330	
– بروستر	274	
– كيرشوف-كلاوزيوس	331	
– لامبير	306	
– مالوس	274	
قوة		
– الفصل	322-320-319	Resolving Power
– فصل التلسكوب	323	
– – العين	323	
– لوارنتس	-87-80-79-78-75-2 -183-144-127-120-108 218-193-186	
لابلاسي	12	
لاغرانجي	-198-196-191-190-144 329-216	
مادة شفافة	261	
ماغنتون بور	239-236	
مبدأ		
– الاستبعاد	249-237	Exclusion
– اللاتحديد	280-2	Uncertainty
– فيرما	-329-327-326-325-324 332	
مبرهنة		
– بابينه	307	
– غاوص	-135-74-20-19-16-14 223-150	
مجسم القطع الناقص		
– – – العطالي	233	
– – – الطاقي	233	

محززة (شبكة) 295-296-298-299-310-
319-321-322

مدلات ميلر 252-301 Miller Indices

مرشحة 346-351-369 Filter

المحاور الرئيسية 233-262

المستوى اللاصق 326-335

مسدد 294-295-308-310-320

معادلة الاتصالية (الاستمرارية) 73-74-82-136-138- Continuity
143-169-266-338

– أولر 150-326

– – لاغرانج 192-329

– بواسون 38-39-40-47-89-91-
139-157

– لابلاس 40-47

معامل

– الاقتران 132-251

– الامتصاص 261-264-276

– التحريض الذاتي 129-130-132-134-369 Self Inductance

– – المتبادل 127-128-132 Mutual -

– الصيغة الذري 299 Atomic form factor

معيار ريلي 319-322-324

الـ مقاومة النوعية 76

الـ ممانعة 337-339-340-344-354

الـ – الفعالة 345

الـ – المميزة 347-350-369

موجة

– مستقرة 291-293 Standing, stationary

سعة الـ – 154-280-283-295-309- Amplitude
317-333

شدة الـ – (الضوء- الإشعاع) 170-201-203-204-210-
213-217-309

طول الـ – 147

متجهة الـ – 154

موجهات الـ – 367 Waveguides

ناقلية كهربائية	76	
نسبية العامة	171-58-3	
نظمة منطقة	179	Rational System
نفوذية	259-22	Permeability
وحيد القطب	246-179-7	Monopole
وشيعة (ملف)	-351-347-339-128-86 364-357	

أسماء العلم

	الصفحات	الأسماء
Abbe	331	أبه
Ahranov	104	أرانوف
Ampère	142-136-120-85-82-75	آمبير
Babinet	307	بابينه
Bessel	375-364-362-361-323-311-310	بسل
Biot-Savart	101-99-85	بيو-سافار
Bohm	104	بوم
Bohr	239-236-227-29-25	بور
Bragg	375-300	براك
Bruhat	280	بروها
Brwester	274	برويستر
Burns	330	برنس
Clausius-Mossotti	260-230	كلاوزيوس-موسوتي
Cornu	318-317-316	كورنو
Coulomb	-135-101-55-32-27-22-19-17-6	كولون
	178	
Curie	247-238-229	كوري
D'alambert	158-153-148-141	دالامبير
Darwin	198	داروين
Dirac	268-246-178-60-46-39-38-7	ديراك
Einstein	325-187-173-172-171-3	آنشتاين
Euler	329-326-192-150	أولر
Farady	-142-135-124-120-119-115-3	فارادي
	368-358-280-224-151	
Fermat	334-332-328-327-326-325-324	فيرما
Fermi	29	فيرمي
urier	281-155-71-69	فوريي

أسماء العلم

الأسماء	الصفحات	
أبه	331	Abbe
أرانوف	104	Ahranov
آمبير	142-136-120-85-82-75	Ampère
بابينه	307	Babinet
بسل	375-364-362-361-323-311-310	Bessel
بيو-سافار	101-99-85	Biot-Savart
بوم	104	Bohm
بور	239-236-227-29-25	Bohr
براك	375-300	Bragg
بروها	280	Bruhat
برويستر	274	Brwester
برنس	330	Burns
كلاوزيوس-موسوتي	260-230	Clausius-Mossotti
كورنو	318-317-316	Cornu
كولون	-135-101-55-32-27-22-19-17-6 178	Coulomb
كوري	247-238-229	Curie
دالامبير	158-153-148-141	D'alambert
داروين	198	Darwin
ديراك	268-246-178-60-46-39-38-7	Dirac
آنشتاين	325-187-173-172-171-3	Einstein
أولر	329-326-192-150	Euler
فارادي	-142-135-124-120-119-115-3 368-358-280-224-151	Farady
فيرما	334-332-328-327-326-325-324	Fermat
فيرمي	29	Fermi
فوريي	281-155-71-69	Fourier

فراونهوفر 320-308 Fraunhofer

فرينل 316-314-313 Fresnel

غاوص -45-31-30-27-25-20-19-16-14 Gauss
-139-135-84-76-74-59-52-49
338-223-150

غرين 304-179-92-46-45-39-14 Green

هيفسايد 268 Heaviside

هايزنبرغ 2 Heisenberg

هرتز 358-274-159-124 Hertz

هيغز 178 Higgs

أوبيتال 296 Hôpital

هويغنز 324-306-280-172 Huygens

جول 83-77-76 Joule

كيرشوف 345-344-342-341-331-113-112 Kirchhoff

لاغرانج 329-328-192 Lagrange

لابلاس 314-120-85-75-74-46-40 Laplace

لامبير 306 Lambert

لاندي 242-238-237-236 Landé

لارمور 243-242 Larmor

لوبيغ 68 Lebesgue

لنز 124 Lenz

لينارد-فيشرت 212-201-176-165-163 Lienard-Wiechert

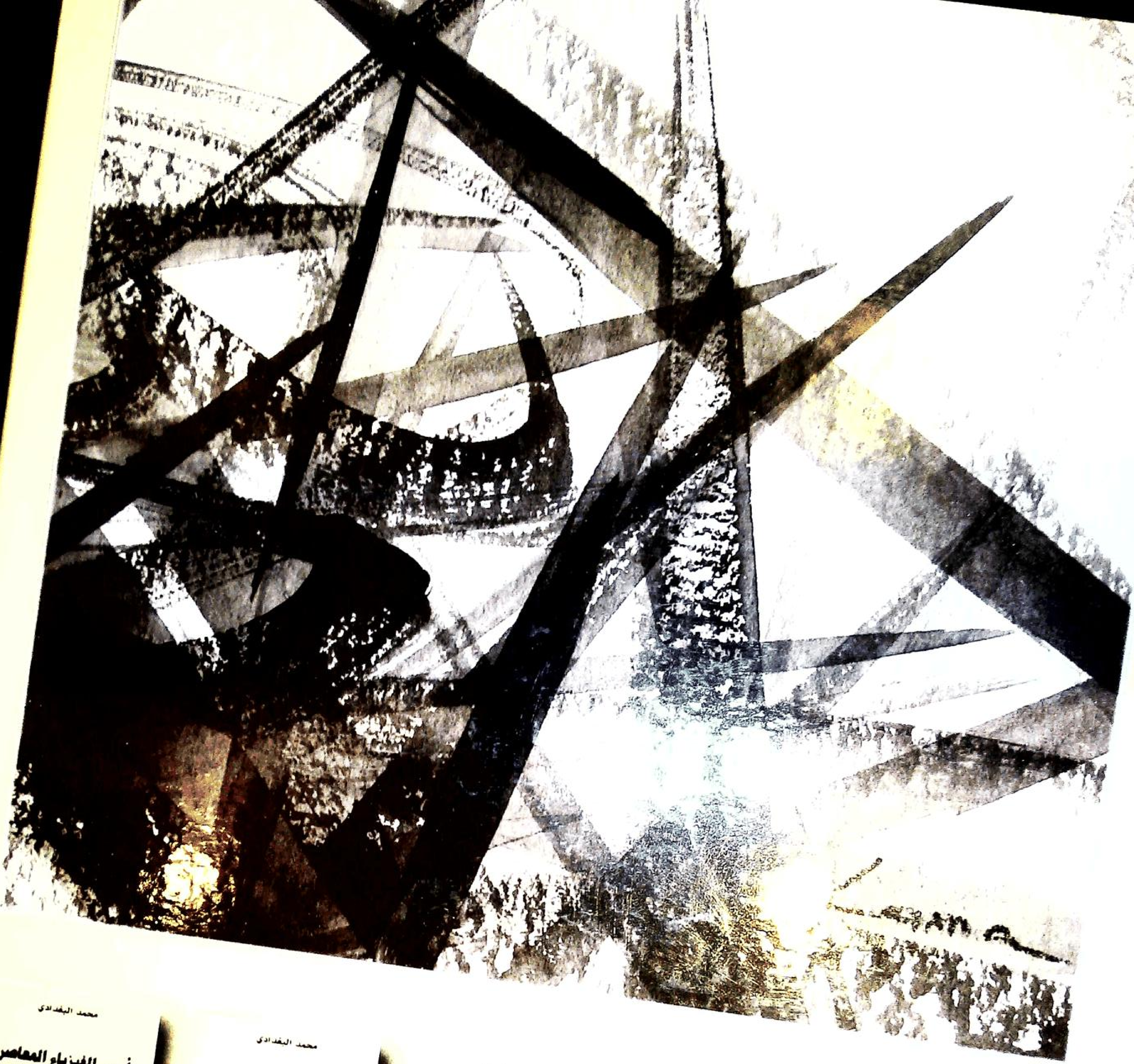
لورانتس -139-127-108-87-79-78-75-73-2 Lorentz
218-144-143

مالوس 274 Malus

ماكسويل -84-82-37-22-20-19-13-12-8-5-4 Maxwell
-133-124-120-119-111-97-91-89-85
-173-157-150-141-138-137-136-135
-280-267-262-256-255-226-224-177
362

Meissner	125	مايسنر
Meixner	308	مايكسنر
Miller	301–252	ميلر
Minkowski	–154–146–144–143–142–103–73–3 190	مينكوفسكي
Newton	324–290–190–185–55–20	نيوتن
Noether	73	نوتر
Ohm	111–77–76	أوم
Oersted	142	أورستد
Ostrogradsky	14	أوستروغرادسكي
Pauli	249–237	باولي
Planck	325–219–103	بلانك
Poincaré	177–14	بوانكاريه
Pointing	174–170	بوينتنغ
Poisson	157–139–91–89–47–40–39–38	بواسون
Rayleigh	324–322–204	ريلي
Retherford	29–25	روذرفورد
Rowland	320–295	رولاند
Rydberg	227	ريدبرغ
Stokes	333–83–64–9	ستوكس
Thomson J.T	25	طومسون
Von Laue	302–300	فون لاو
Weber	76	فيبر
Weiss	252	فيس
Weston	116	وستون
Wheaststone	344	وطستن
Young	282–149	يونغ

طوب بريس
العنوان، رقم 22، زنقة كلكوتة، المحيط، الرباط
الهاتف، 21 31 73 37 05 (212+) - الفاكس ، 28 39 26 37 05 (212+)
الموقع الإلكتروني، www.toppress.ma
البريد الإلكتروني، toppress2@gmail.com



الثمن: 300 درهم